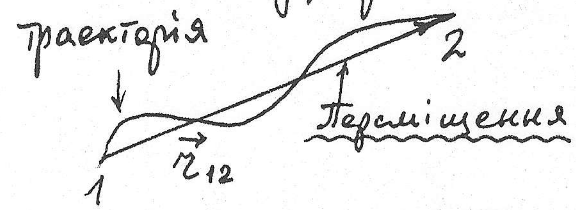
СРС: 1,2,3 !

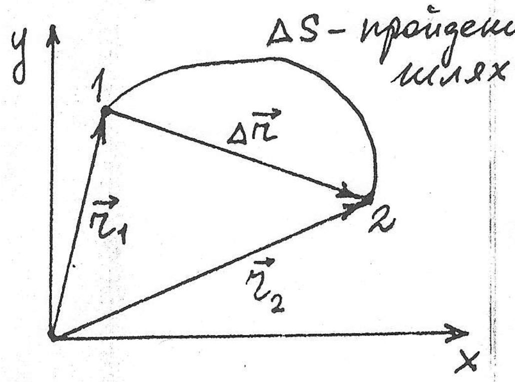
Іродов. „Основные законы механики"

Швидкість

Матеріальна точка (МТ) - тіло, розмірами якого в умовах даної конкретної задачі можна знехтувати.

Траєкторія - лінія, яку описує МТ при своєму русі. В залежності від форми траєкторії рух може бути прямолінійним, рухом по колу, криволінійним тощо.





$\Delta\vec{r}$ - вектор переміщення

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\cdot\vec{i} + \Delta y\cdot\vec{j} + \Delta z\cdot\vec{k}$$

де $\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta y = y_2 - y_1$; $\Delta z = z_2 - z_1$

Середня швидкість $\langle\vec{v}\rangle$ за проміжок часу Δt

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$\langle\vec{v}\rangle$ - вектор, напрям якого збігається з напрямом переміщення $\Delta\vec{r}$

Миттєва швидкість (або просто - швидкість):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1)$$

$\vec{v}$ - вектор, напрямок якого збігається із напрямом дотичної до траєкторії у напрямі руху

Швидкість є функція часу: $\upsilon(t)$

З (1): $d\vec{r} = \vec{\upsilon}(t)\cdot dt$

Переміщення за довільний проміжок часу $\Delta t = t - t_0$:

$$\int_{r(t_0)}^{r(t)} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}(t)\cdot dt$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}(t)\cdot dt}$$ Кінематичне рівняння руху

У декартових координатах:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\cdot\vec{i} + \upsilon_y\cdot\vec{j} + \upsilon_z\cdot\vec{k}$$

де $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$; $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$; $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$$ υ – модуль вектора шв.

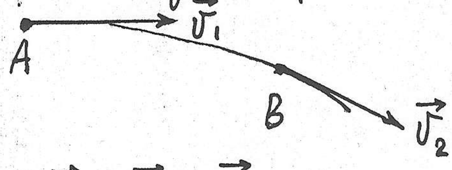
$$\upsilon = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

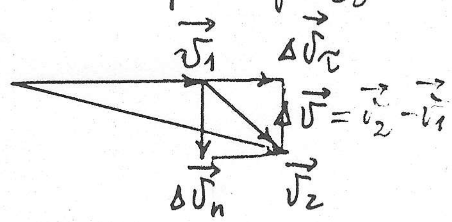
Скалярна середня швидкість $\langle \upsilon_{ск} \rangle = \dfrac{S}{t}$

$$\langle \upsilon_{ск} \rangle = \frac{\upsilon_1\cdot t_1 + \upsilon_2 t_2}{t_1 + t_2}$$

Прискорення

МТ може рухатись нерівномірно: її швидкість змінюється із часом за модулем і напрямком. Такий рух називається змінним і характеризується прискоренням





$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Середнє прискорення за час Δt

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Миттєве прискорення (або прискорення)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\vec{a}\rangle = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

При змінному русі $\vec{a} = \vec{a}(t)$.

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)\cdot dt$$

Швидкість за проміжок часу від t_0 до t

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)\cdot dt$$

Середнє прискорення $\langle\vec{a}\rangle = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)\cdot dt$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

де $a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$; $a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$

Розкладемо вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ на два взаємно перпендикулярні: $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ та $\Delta\vec{\upsilon}_n$ – тангенціальну та нормальну складові, відповідно.

$$\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_\tau + \Delta\vec{\upsilon}_n$$ (див. попередній рис.).

$$\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t} \Rightarrow \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}_\tau}{dt} + \frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n}$$

Тангенціальне (дотичне) прискорення $\vec{a}_\tau$ характеризує зміну $\vec{\upsilon}$ за модулем

$$\boxed{a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}}$$

Нормальне прискорення a_n характеризує зміну $\vec{\upsilon}$ за напрямом

$$\boxed{a_n = \frac{\upsilon^2}{R}}$$

Рівнозмінний рух: $a = const \neq f(t)$

Рівноприскорений рух: $a > 0$

Рівносповільнений рух: $a < 0$

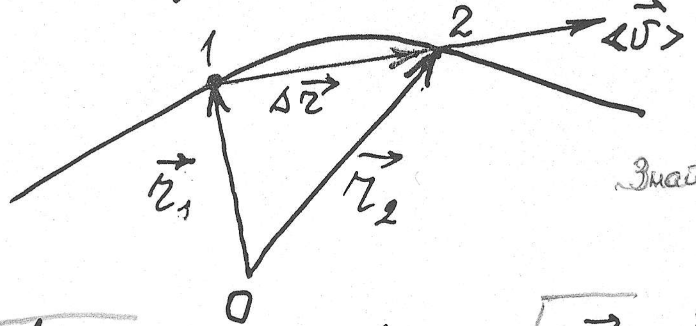
Якщо $a(t)$, то рух – нерівномірно-прискорений

Якщо $a = 0$, то рух рівномірний (без прискорення, із сталою швидкістю).

3 (Три) ~~описи~~ способи опису руху МТ:

1) – векторний; 2) – координатний
3) – за допомогою параметрів траєкторії, або природній (рос. – „естественный“).

I. Векторний спосіб



Дано:
Радіус-вектор $\vec{r}$
Траєкторія т. А – геометр. місце кінців $\vec{r}$

Знайти: Швидкість т. А
Вектор переміщення $\Delta\vec{r}$ – приріст $\vec{r}$ за час Δt

Вектор сер. шв

$$\vec{v}_{ср} = \langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Напрямок $\langle\vec{v}\rangle$ співпадає з $\Delta\vec{r}$

Вектор миттєвої шв.

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$|\vec{v}| = v = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

Х-ки руху т. А: швидкість та прискорення

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \qquad |\vec{a}| = a = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$$

Описати рух МТ – значить знайти, за яким законом змінюються $\vec{r}(t)$ або $\vec{v}(t)$ при відомих (заданих) початкових умовах: $\vec{v}(t_0)$ або $\vec{r}(t_0)$

годограф вектора???

Пряма задача кінематики:

Дано: $\vec{r}(t)$ Знайти: $\vec{v}(t)$; $\vec{a}(t)$; $|\vec{v}| = f(t)$

Приклад: $\vec{r} = \vec{A}t + \vec{B}t^2/2$ A, B – сталі вектори. Їх модулі мають відповідні розмірності

1) $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{A} + \vec{B}t$

2) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{B} = const$ ($\neq f(t)$) – рух рівноприскорений

3) $v = |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^2} = \sqrt{\vec{A}^2 + 2\vec{A}\vec{B}t + \vec{B}^2 t^2}$ – NEW!

Обернена (зворотня) задача кінематики

Дано: закон зміни у часі прискорення: $\vec{a}(t)$

Знайти: $\vec{v}(t)$; $\vec{r}(t)$ ① Знайдемо $\vec{v}(t)$:

Розв'язок: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$

$v_x = \int_0^t a_x\,dt$; $v_y = \int_0^t a_y \cdot dt$ $v_z = \int_0^t a_z\,dt$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ – за визнач. $\Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt$

$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \Delta\vec{v}$ (1) $\begin{cases} \vec{v}_0 \text{ – початкова шв.} \\ \vec{v}_0 \equiv \vec{v}(t=0) \equiv \vec{v}(0) \end{cases}$

Однієї залежності $\vec{a}(t)$ – замало!!

Треба знати початкові умови: $v(0)$ та $r(0)$

Продовжуємо: З інш. боку $\Delta\vec{v} = \int_0^t \vec{a}\,dt = \vec{a}\int_0^t dt = \vec{a} \cdot t$ (2)

якщо $\vec{a}$ – const

Поєднуємо (1) та (2):

$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \vec{a}t$

$\boxed{\vec{v}(t) = \Delta\vec{v} + \vec{v}_0 \overset{(2)}{=} \vec{a}t + \vec{v}_0}$! (A)

② Знайдемо $\vec{r}(t)$:

$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$ (3) – за визначенням миттєвої швидк.

Інтегруємо (3): $\int_{r_0}^{r} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \Delta\vec{r}$

З іншого боку: $\Delta\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) \cdot dt \overset{(A)}{=} \int_0^t (\vec{a}t + \vec{v}_0)\,dt =$

$= \int_0^t \vec{a}t\,dt + \int_0^t \vec{v}_0\,dt = \frac{\vec{a}t^2}{2} + \vec{v}_0 t = \Delta\vec{r}(t)$ (Б)

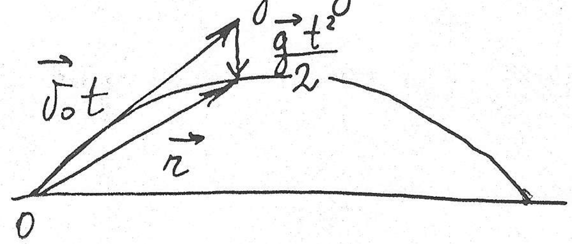
Але знайдений $\Delta\vec{r}$ ще не $\vec{r}(t)$! Треба знайти $\vec{r}(t)$!

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 \quad \text{— за визнач.}$$

$$\vec{r}(t) = \Delta\vec{r} + \vec{r}_0 = \boxed{\frac{\vec{a}t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0} \; ! \qquad (5)$$

(5)

Приклад: камінець, кинутий під кутом до горизонту з початковою швидкістю $\vec{v}_0$



$\vec{a} = const = \vec{g}$

$\vec{r}_0 = 0$ відносно т. кидку

З (5): $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$

Вектор $\vec{r}$ є сумою 2-х векторів

II. Координатний спосіб.

Обов'язково треба обрати СК!

$x(t)$; $y(t)$; $z(t)$ — закон руху МТ (дано)

Знайти: $\vec{v}(t)$; $\vec{a}(t)$; $|\vec{v}| = f(t)$

Розв'язок:

$v_x = \frac{dx}{dt}$ $\quad dx$ — проекція вектора переміщення $d\vec{r}$ на ось OX

$v_y = \frac{dy}{dt}$; $\quad v_z = \frac{dz}{dt}$

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ $\quad dv_x$ — проекція вектора приросту швидкості $d\vec{v}$ на ось OX

$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$; $\quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$

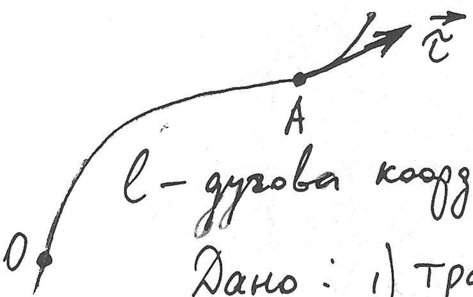
$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Напрямок $\vec{v}$ задається напрямними косинусами

$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}$ $\quad \cos\beta = \frac{v_y}{v}$ $\quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v}$

де $\alpha = \widehat{\vec{x}\,\vec{v}}$; $\beta = \widehat{\vec{y}\,\vec{v}}$ $\quad \gamma = \widehat{\vec{z}\,\vec{v}}$ $\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

III Опис руху за допомогою параметрів траєкторії



l – відстань вздовж траєкторії від обраного початку відліку

l – дугова коорд.

Дано: 1) траєкторія руху т. A

2) початок відліку (т. O)

3) додатній напрямок відліку дугової коорд.

4) закон руху т. A (тобто $l(t)$).

Швидкість точки

Введемо одиничний вектор $\vec\tau$, направлений по дотичній в даній точці траєкторії в сторону зростання дугової коорд.

$\vec\tau$ – змінний вектор: $\vec\tau(t)$!

Вектор $\vec v$ шв. т. A направлений по дотичній (за визн.)

Тому $\boxed{\vec v = v_\tau \cdot \vec\tau}$ (1)

(1,а) $\boxed{v_\tau = |\vec v| = v}$ ← з (1)

Як було: або $\vec A = \lvert\vec A\rvert \cdot \vec i$	$\vec v = v_x \cdot \vec i$ $\lvert\vec v\rvert = v_x$

З інш. боку (1,б) $\boxed{v_\tau = \frac{dl}{dt}}$ – за визначенням проекції v на напрямок вектора τ (тут за визн.)

З (1),(1,б) $\boxed{\vec v(t) = \frac{dl}{dt} \cdot \vec\tau}$

Прискорення точки

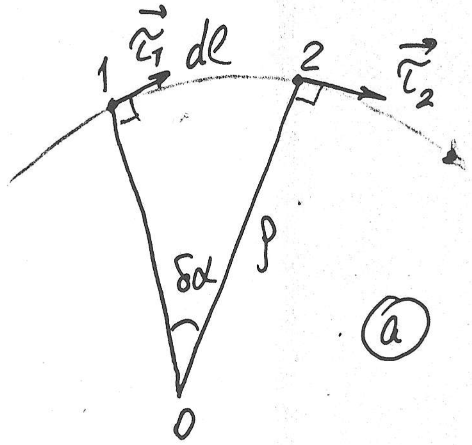
Продиференц. (1) по часу: $\vec a = \frac{d\vec v}{dt} \underset{(1)}{=} \frac{dv_\tau}{dt} \cdot \vec\tau + v_\tau \cdot \frac{d\vec\tau}{dt}$ (А)

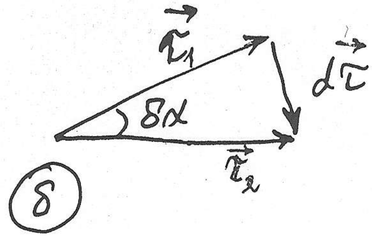
II доданок (А): $v_\tau \cdot \frac{d\vec\tau}{dt} = v_\tau \cdot \frac{d\vec\tau}{dt} \cdot \frac{dl}{dl} = v_\tau \cdot \frac{d\vec\tau}{dl} \cdot \overbrace{\frac{dl}{dt}}^{=v_\tau} =$

$$= v_\tau \cdot \frac{d\vec\tau}{dl} \cdot v_\tau = v^2 \cdot \frac{d\vec\tau}{dl} \quad (Б)$$

(До речі: $\frac{d\vec\tau}{dt} = v \cdot \frac{d\vec\tau}{dl}$)

Визначемо приріст вектора $\vec{\tau}$ на ділянці dl: $\frac{d\vec{\tau}}{dl}$:





$\tau_{1,2}$ – одиничні (!) вектори

$|\vec{\tau}_1| = 1$

$|\vec{\tau}_2| = 1$

1. Спрямуємо т. 2 до т. 1. Результатом буде:
   - відрізок траєкторії dl прямує до дуги кола з центром в деякій т. O;
   - т. O назвемо в цьому випадку центром кривизни траєкт. в даній т. A, а радіус ρ відповідає радіусу кола – називає радіус кривизни траєкт в даній точці A
2. З (а): $d\alpha = \frac{|d\vec{l}|}{\rho}$ (2)

   З (б) $d\alpha = \frac{|d\vec{\tau}|}{1} = |d\vec{\tau}|$ (3)

(2) = (3): $\frac{|d\vec{l}|}{\rho} = |d\vec{\tau}|$, або $\frac{dl}{\rho} = d\tau$, або $\boxed{\frac{d\tau}{dl} = \frac{1}{\rho}}$ (4)

Якщо $dl \to 0$, то $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$ (це видно з рис. (б)).

Введемо один. вектор $\vec{n}$ нормалі до траєкторії до дотичної в т. 1, направлений до центру кривизни. Удомножимо $(4) \cdot \vec{n}$

?

$$\frac{d\tau}{dl} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{n}}{\rho} \xRightarrow{d\vec{\tau} \parallel \vec{n}} \boxed{\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{\vec{n}}{\rho}} \quad (5)$$

(5) → (A) із урахуванням (Б):

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v^2 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v^2 \frac{\vec{n}}{\rho} = \boxed{\frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} = \vec{a}} \quad (6)$$

$\vec{a_\tau} = \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec{\tau}$ – тангенц. приcкор.

$\vec{a_n} = \frac{\upsilon^2}{\rho}\cdot\vec{n}$ – нормальне приск.

$|\vec{a_\tau}| = a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$

$|\vec{a_n}| = a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}$

Модуль повного прискорення:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{\rho}\right)^2} =$$

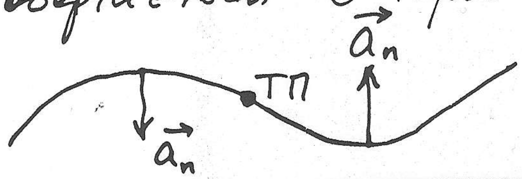
$$= \sqrt{\dot{\upsilon}^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{\rho}\right)^2}$$

похідна за часом

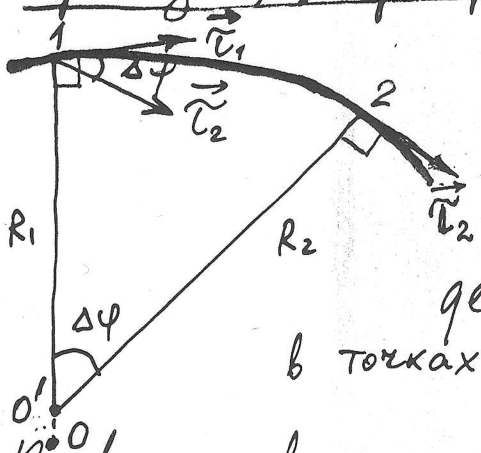
Аналіз:

1. Вектори $\vec{a_\tau}$ та $\vec{a_n}$ взаємно перпендикулярні.
2. $\vec{a_\tau}$ направл. уздовж траєкторії руху, по дотичній.
3. $\vec{a_n}$ направл. уздовж нормалі до траєкторії руху, до центру кривизни траєкторії.
4. Під час руху МТ по колу норм. приск. наз. доцентровим, оскільки центр кривизни для всіх точок траєкторії один та збігається з центром кола.
5. Модуль танг. прискор. $|\vec{a_\tau}| = |\dot{\vec{\upsilon}}| = \dot{\upsilon}$
6. Якщо $\dot{\upsilon} > 0$ (шв. зростає по величині), то $\vec{a_\tau}$ направлений в той же бік, що і $\vec{\tau}$ (в сторону $\vec{\upsilon}$).
7. Якщо $\dot{\upsilon} < 0$ (шв. із часом зменшується), то вектори $\vec{\upsilon}$ та $\vec{a_\tau}$ направлені в протилежні сторони.
8. При рівномірному русі ($\dot{\upsilon} = 0$) танг. приск. немає ($a_\tau = 0$)
9. Величина $\vec{a_n}$ визначається ρ та υ: $a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}$
10. При прямолінійному русі ($\rho \to \infty$) $a_n = 0$

11. В точці перегибу криволінійної траєкторії (ТП) $\vec{a}_n$ обертається в нуль



Кривизна, центр кривизни, радіус кривизни



Кривизна

$$C = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{d\varphi}{dl}$$

де $\Delta\varphi$ - кут між дотичними до кривої в точках, які відстоять одна від одної на Δl

Кривизна визначає швидкість повороту дотичної при переміщенні вздовж кривої (Δl - переміщення).

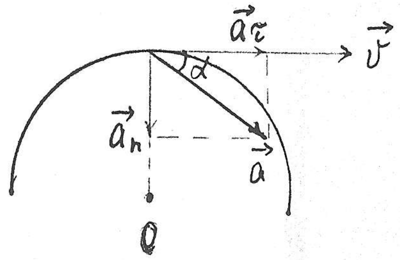
Радіус кривизни $$R = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta l}{d\varphi} = \frac{dl}{d\varphi}$$

R - радіус кола, яке злівається в даній точці траєкторії з її кривою на нескінченно малій її ділянці.

1) $\vec{R}_1 \perp \vec{\tau}_1$; $\vec{R}_2 \perp \vec{\tau}_2$

2) Для кривої, яка не є колом, $R_1 \neq R_2$

3) Якщо $2 \to 1$, то точка $O' \to O$ - центр кривизни т. 1.



Прискорення $\vec{a}$ направлене вздовж дотичної до годографу швидкості (Самостійна робота для відмінників)!

Кінематика обертального руху

$\vec{\varphi}$ – псевдовектор, або аксіальний вектор

Кутова швидкість $\quad \vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$

$$|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}; \qquad [\vec{\omega}] = \frac{рад}{с}$$

Для $\vec{\omega} = const$ – рівномірне обертання: $\omega = \dfrac{\varphi}{t}$

Період обертання $\quad \boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{\nu}} \Leftarrow$ тіло робить 1 оберт: $\varphi = 2\pi$; $\Delta t = T$

Число обертів за одиницю часу $\quad \boxed{\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}} \qquad \omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{2\pi}{T}$

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu}$$

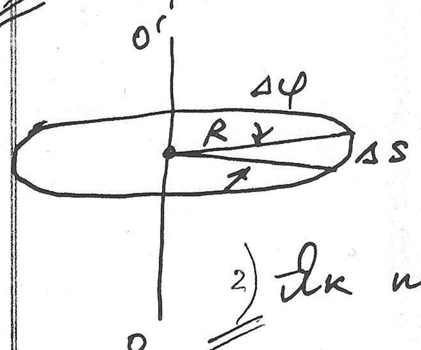
Кутове прискор.

Вектор $\vec{\omega}$ може змінюватись як за велич., так і за напрямк – за час Δt приріст $\Delta\vec{\omega}$. Тоді

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad [\beta] = \frac{рад}{с^2}$$

Лінійна швидкість тв. тіла, що обертається

1) $v = f(\omega, R)$



$$\Delta S = R \cdot \Delta\varphi$$

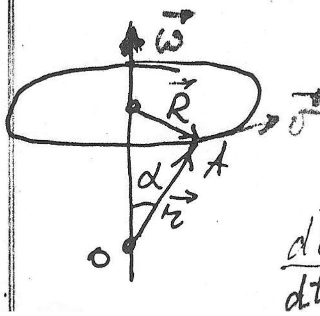
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$$

зв'язок за модулем $\quad \boxed{v = R \cdot \omega} \quad (1)$

2) Як пов'язані вектори $\vec{v}$ та $\vec{\omega}$:

З малюнку: $[\vec{\omega}\,\vec{r}] \parallel \vec{v}$

$\omega \cdot r \cdot \sin\alpha \equiv \omega R$ або $\quad \boxed{\vec{v} = [\vec{\omega}\,\vec{r}]} \quad (2)$



3) $\boxed{\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}} \qquad a_n = v^2/R = \omega^2 R \sim R$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau \overset{(1)}{=} R\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} = R \cdot \vec{\beta} \sim R; \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4} \sim R$$