ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

1. Детальний розгляд поведінки системи матеріальних тіл за допомогою рівняння руху часто буває зробити важко або навіть неможливо. Але існує метод, який із загальних принципів, що витікають із законів Ньютона, дозволяє розв'язати ту ж задачу (знайти стан системи – координату та швидкість - в будь-який момент часу) альтернативним способом. Цей метод пов'язаний із застосуванням законів збереження (ЗЗ).

2. ЗЗ дають загальні властивості руху без розв'язування рівнянь руху і детальної інформації про розвиток процесів у часі.

3. В математичному розумінні ЗЗ в механіці є першими інтегралами рівнянь руху.

4. Серед функцій стану, що зберігаються, найбільш важливу роль грають енергія, імпульс та момент імпульсу. Ці три величини мають важливу спільну властивість адитивності: їх значення для системи, яка складається із частин, дорівнює сумі значень для кожної із частин.

5. ЗЗ мають досить глибоке спільне походження, пов'язане із фундаментальними властивостями симетрій часу і простору: однорідністю і ізотропністю.

6. ЗЗ відносяться до числа найбільш фундаментальних принципів фізики, вони далеко виходять за межі механіки і являють собою універсальні закони природи.

7. Якщо в ході або в результаті розв'язування задачі з'ясовується, що якийсь процес протирічить законам збереження, то зразу ж можна стверджувати, що цей процес неможливий і не має сенсу намагатись його реалізувати (наприклад, побудувати "вічний" двигун).

8. ЗЗ не залежать ні від траєкторії матеріального тіла ні від характеру діючих сил. Останнє дозволяє використовувати закони збереження навіть тоді, коли сили та їх природа не визначені (наприклад, у фізиці елементарних частинок).

9. Є задачі, в яких сили точно відомі і які можуть бути розв'язані за допомогою рівнянь руху. Формально із законів

збереження ніякої додаткової інформації отримати не можна. Але фактично застосування законів збереження часто дозволяє отримати розв'язок більш простим способом. Тому при розв'язуванні нових задач зазвичай слід притримуватись наступного порядку: спробувати застосувати один за одним відповідні закони збереження і, тільки переконавшись, що цього недостатньо, переходити до розв'язку за допомогою рівнянь руху.

10. Єдиною мірою руху в усіх його формах є енергія.

11. Робота – міра передачі енергії.

12. Закон збереження механічної енергії (ЗЗЕ): ***в інерціальній системі відліку механічна енергія замкненої системи частинок, в якій немає непотенціальних сил, зберігається в процесі руху:***

$$E = E_{кін} + U = const\,. \tag{4.1}$$

Таку систему називають консервативною.

При русі МТ в консервативній замкненій системі зберігається повна механічна енергія, кінетична та потенціальна енергії в загальному випадку при цьому змінюються. Однак ці зміни відбуваються завжди так, що приріст однієї з них в точності дорівнює втраті іншої, тобто

$$\Delta E_{кін} = -\Delta U\,. \tag{4.2}$$

Якщо замкнена система неконсервативна, тобто в ній є непотенціальні сили, то механічна енергія такої дисипативної системи зменшується:

$$E_2 - E_2 = A^{диссип.}_{внутр} < 0$$

13. Більш глибоке осмислення закону збереження механічної енергії привело до фундаментального висновку про існування в природі універсального закону збереження енергії: ***енергія ніколи не зникає і не з'являється, вона лише перетворюється із однієї форми в іншу.***

При цьому поняття енергії прийшлось розширити за рахунок введення нових її форм: крім механічної енергії, існує енергія електромагнітного поля, хімічна енергія, ядерна тощо.

Таким чином, універсальний ЗЗЕ охоплює і ті фізичні явища, на які закони Ньютона не розповсюджуються.

14. ЗЗ мають переваги і недоліки порівняно із застосуванням рівняння руху.

- ЗЗ дозволяють отримувати найбільш загальні висновки про механічні процеси, не деталізуючи їх розгляд, як це робиться в рівняннях руху;
- ЗЗ не залежать від траєкторії руху;
- ЗЗ не залежать від характеру сил, що діють в системі. Більш того, навіть не знаючи природу сил, можна застосовувати ЗЗ;
- ЗЗ помітно спрощує процес отримання інформації про механічні процеси порівняно з рівняннями руху, які потребують інколи досить складного і тривалого розв'язку;
- До недоліків (особливостей) ЗЗ слід віднести той факт, що частіш всього ЗЗ дозволяють отримати інформацію про стан системи в конкретний момент часу, наприклад, визначити швидкість ракети в кінці її виводу на орбіту або висоту останньої. Рівняння руху дозволяє визначити координату, швидкість або прискорення в будь-який момент часу і в будь-якій точці траєкторії.
- ЗЗ ніякої додаткової порівняно з рівняннями руху інформації про рух не дають.

15. ЗЗ виконуються не для будь-яких систем матеріальних точок (тіл), а тільки для ізольованих (замкнених) систем. Але в деяких випадках ЗЗ виконуються і для незамкнених систем тіл:

1) Для неізольованої системи МТ часто можна визначити певні напрямки, вздовж яких рух можна розглядати як рух ізольованої системи, хоча в цілому система залишається неізольованою. Із трьох ЗЗ два пов'язані із збереженням векторних величин: це ЗЗІ та ЗЗМІ. Може статись, що система неізольована, але зовнішні сили діють лише в певних напрямах. Тоді відповідним вибором системи координат можна досягти того, що одна або дві проекції зовнішніх сил перетворюються в нуль. Тоді неізольована система набуває вздовж цих напрямів властивостей ізольованої системи.

Таким чином, для "частково ізольованої" системи можна записати ЗЗІ та ЗЗМІ.

2) Є випадки, коли система МТ неізольована, на неї діють зовнішні сили, але ці сили компенсують себе повністю або вздовж деяких напрямків (частково). Це призводить до того що до такої неізольованої системи можна застосувати ЗЗ.

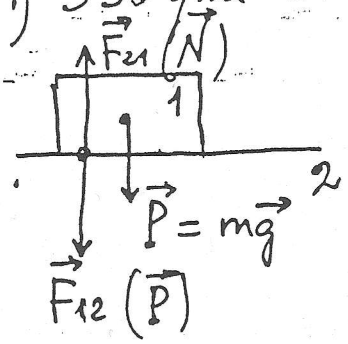
16. Закон збереження механічної енергії виконується не завжди. Він не виконується для незамкнених неконсервативних систем МТ. Прикладом невиконання закону збереження механічної енергії є непружний удар, в якому частина механічної енергії переходить в теплову (внутрішню) енергію.

ЗЗЕ виконується завжди: в механіці, в електриці, в атомній фізиці, в інших розділах фізики, в мікросвіті, в повсякденному житті людини, у Всесвіті. Сучасній науці невідомі факти невиконання закону збереження енергії. Глибоке осмислювання цього питання привело до фундаментального висновку про існування в природі універсального закону збереження енергії: енергія ніколи не створюється і не знищується, вона може тільки переходити із однієї форми в іншу або нею можуть обмінюватися між собою окремі види матерії.

Універсальний закон збереження енергії охоплює і ті фізичні явища, на які закони Ньютона не розповсюджуються. Тому він не може бути доведений із цих законів, а повинен розглядатись як самостійний закон, який являє собою одне з найбільш широких узагальнюючих дослідних фактів.

Закон збереження імпульсу

1) ЗЗІ для системи з 2-х МТ



$$\vec F_{12} = -\vec F_{21} \quad (\vec N = -\vec P)$$

$$\frac{d\vec p}{dt} = \sum \vec F = 0$$

$d\vec p = 0$ або $\vec p = const.$

2) Сила, що діє на замкнену СМТ

$$\vec F = \sum_i \vec F_i^{(i)} + \sum_i \vec F_i^{(e)} = \sum_i \vec F_i^{(e)} = \vec F^{(e)}$$

3) Рівняння (основне р-ня) руху СМТ

$$\frac{d\vec p}{dt} = \vec F^{(e)}$$

4) Якщо $\vec F^{(e)} = 0$, тобто замкн. СМТ,

то $\boxed{\frac{d\vec p}{dt} = 0} \Rightarrow d\vec p = 0 \Rightarrow \vec p = const$

Зауваження:

1. Система не ізольована, але геом. сума зовн. сил $= 0$: ЗЗ імп. виконується як і для ізольованої системи
2. „Частково" ізольована система
$\vec F^{(e)} \neq 0$ – система не ізольована, повний імпульс не зберігається. Але: зберігається проекція на один з напрямів

$$\frac{d\vec p_x}{dt} = 0 \Rightarrow \vec p_x = const$$

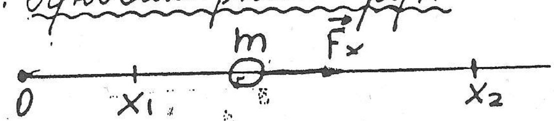
хоча: $\frac{d\vec p_y}{dt} \neq 0$; $\frac{d\vec p_z}{dt} \neq 0$

$\frac{d\vec p}{dt} \neq 0$; $\vec p_y \neq const$

$\vec p_z \neq const$; $\vec p \neq const$

Закон збереження енергії

1. Одновимірний рух



$$\frac{m \cdot d\upsilon_x}{dt} = F_x \Big| * \upsilon_x$$

$$\frac{m \cdot \upsilon_x \cdot d\upsilon_x}{dt} = F_x \cdot \upsilon_x \quad (1)$$

З математики:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\upsilon_x \cdot \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\upsilon_x^2)}{dt} \quad (2) \qquad (2) \to (1):$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon_x^2}{2}\right) = F_x \cdot \upsilon_x \equiv F_x \frac{dx}{dt}$$

$$d\left(\frac{m\upsilon_x^2}{2}\right) = F_x \cdot dx \Rightarrow \int_{\upsilon_{x1}}^{\upsilon_{x2}} d\left(\frac{m\upsilon_x^2}{2}\right) = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx$$

$$\frac{m\upsilon_{x2}^2}{2} - \frac{m\upsilon_{x1}^2}{2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx \equiv A \quad (3)$$

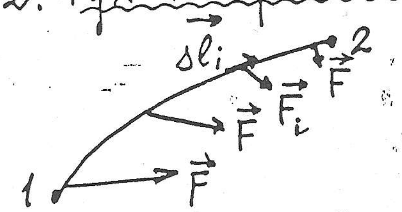
$\boxed{\Delta E_K = A!}$ – ЗЗ кінет. ен. при русі МТ по прямій лінії (вздовж Ox).

Зміна кін. ен. МТ під час її переміщення між двома положеннями дорівнює роботі, яка при цьому виконується силою.

З (3) видно, що кін. ен. змінюється, якщо $F_x \neq 0$! ≡ Кін. ен. не зберігається, якщо $\vec{F} \neq 0$

Коли $F_x = 0$ з (3): $\Delta E_K = \cancel{const}\ 0 \Rightarrow \upsilon = const$

2. Рух по довільній траєкторії



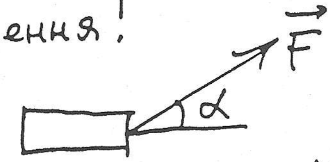
$$dA = (\vec{F}\cdot d\vec{l})$$

$$A = \int_L \vec{F}\, d\vec{l}$$

Робота сили $\vec{F}$ вздовж кривої L

Переміщення МТ НЕ збігається з напрямом сили.

Роботу виконує компонента сили уздовж переміщення.



$$A = |\vec{F}|\cdot s\cdot\cos\alpha$$

$$m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \Big| \times \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$m\,\frac{\vec{v}\cdot d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{v}^2 \to v^2$; $\boxed{d\vec{r} \Rightarrow d\vec{l}}$; інтегруємо

$$\boxed{\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{l}}$$

$$\boxed{E_{K2} - E_{K1} = A_{12}}$$

ЗЗ ен. при русі МТ по криволінійній траєкторії

Робота сили при переміщенні МТ дорівнює (приросту) кін. енергії цієї МТ.

Якщо $\vec{F} = 0$, то $\frac{mv^2}{2} = const \Rightarrow mv = const$

$v = const \Rightarrow \vec{v} = const.$

У відсутності сили траєкторія руху МТ є пряма лінія.

Зауваження про універсальний х-р [illegible]

Потенціальні сили (ПС)

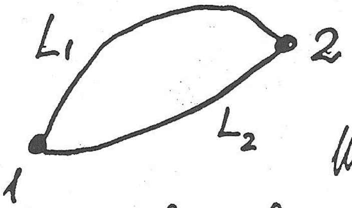
Потенціальні $\equiv$ консервативні (майже)

I визначення ПС: робота ПС по переміщенню між 2-ма точками НЕ залежить від шляху переміщення.

Приклад пот. сил — сили гравітації.

Приклад непот. сил — сили тертя.

II визначення ПС: робота ПС залежить тільки від початкової та кінцевої точок траєкторії і не залежить від вигляду траєкторії.



$$A_{12} = \int_{L_1} \vec{F}\cdot d\vec{l}\ ; \quad A_{12} = \int_{L_2} \vec{F}\, d\vec{l}$$

Шляхи інтегрування різні.

1) $\Delta A = \int_{L_1} - \int_{L_2} = 0$

2) $\int_{1(L_1)}^{2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_{2(L_2)}^{1} \vec{F}\cdot d\vec{l} \Rightarrow \int_{1(L_1)}^{2} + \int_{2(L_2)}^{1} = 0$

III Інтеграл по замкненому контуру $\boxed{\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0}$

Сили є консервативними, якщо в стаціонарному випадку їх робота на будь-якому замкненому шляху дорівнює нулю.

Центральні сили (ЦС)

ЦС залежать тільки від відстані між тілами, що взаємодіють, і направлені по прямій, яка проходить через ці тіла (через їх ц.м.).

Приклад ЦС — сили гравітації

Можна довести, що ЦС є потенц. силами.

ЦС $\not\Rightarrow$ ПС

ПС $\Rightarrow$ ЦС

Потенціальна енергія МТ в полі

Без доведення:

Якщо F_x, F_y, F_z є проекціями потенц. сили, то існує така функція $E_n(x,y,z)$ (пот. енергія), за допомогою якої ці проекції можна записати:

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z} \qquad (1)$$

$F_x = -\frac{dU}{dx}$, коли $y = const$, $z = const$:

$\frac{d}{dx} \to \frac{\partial}{\partial x}$,

Похідна від функції однієї змінної → частинну похідну від ф-ції декількох змінних

Далі: $dA = \vec{F}\cdot d\vec{l} = F_x\, dl_x + F_y\, dl_y + F_z\, dl_z =$

$= F_x\cdot dx + F_y\cdot dy + F_z\, dz =$ $\qquad dA = -dU$

$$= -\frac{\partial E_n}{\partial x}\cdot dx - \frac{\partial E_n}{\partial y}\cdot dy - \frac{\partial E_n}{\partial z}\cdot dz = -dE_n \quad (2)$$

Закон збереження повної енергії

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{l} = -\int_1^2 dE_n = -(E_{n2} - E_{n1}) \qquad (3)$$

Робота сил у потенціальному полі залежить від початкової та кінцевої точок траєкторії і не залежить від її вигляду.

Раніше було: $A = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$. Тоді:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = -(E_{n2} - E_{n1})$$

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} + E_{n2} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + E_{n1}$$

$$\boxed{\frac{m\upsilon^2}{2} + E_n = const}$$

Сума кін. ен. та пот. ен. під час руху залишається сталою.

Закон збереження (закон перетворення) енергії

Стосується замкнених систем!

Для незамкненої системи:

$$(E_{k2} + E_{n2}) - (E_{k1} + E_{n1}) = A_{зовн.\,сил}$$

Енергія ніколи не зникає і не з'являється, а тільки перетворюється з енергії одного виду в іншу.

Зв'язок сили і потенціальної енергії

$dA = -dE_п$ — було

$F_x = -\frac{\partial E_п}{\partial x}$ | $*\vec{i}$

$+$ $F_y = -\frac{\partial E_п}{\partial y}$ | $*\vec{j}$

$+$ $F_z = -\frac{\partial E_п}{\partial z}$ | $*\vec{k}$

$F_x\cdot\vec{i} + F_y\cdot\vec{j} + F_z\cdot\vec{k} = \vec{F}$ — якщо скласти ліві частини.

Якщо скласти праві частини:

$-\left(\vec{i}\cdot\frac{\partial E_п}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial E_п}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial E_п}{\partial z}\right) = -\operatorname{grad} \vec{E}_п$ — вектор! (градієнт, оператор)

$$\boxed{\vec{F} = -\operatorname{grad} E_п = -\nabla E_п}$$ (∇ — „набла").

(!)

Закономі слова по ЗЗ

1) ЗЗ — фундаментальні закони, бо виконуються у різних розділах фізики.
2) ЗЗ — три: I $\vec{p} = const$; $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \vec{F}^e = 0$ замкн. сист.
   II $\vec{L} = const$ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow \vec{M} = 0$ — система замкн.
   III $E_{замкн.сист.} = const$
3) Всі три ЗЗ справедливі для замкнених (ізольованих) систем.

Закони збереження та симетрії простору і часу.

1. ЗЗ імпульсу зв'язаний з однорідністю простору.
2. ЗЗ моменту імп. зв'язаний з ізотропністю простору.
3. ЗЗ енергії зв'язаний з однорідністю часу.

1. Зв'язок ЗЗ імпульсу з однорідністю простору

ЗЗІ доводимо для ізольованої системи, виходячи із $\overline{\text{II}}$ та $\overline{\text{III}}$ з.Н.

Доведемо що:

$\overline{\text{III}}$ з.Н. випливає з однорідності простору:

Що таке однорідність простору:

1. Ідентичність (еквівалентність) всіх точок прост
2. Розвиток подій в ізольованій СМТ не залежить від того, в точках якої обл. простору ця система локалізована.
3. Коли всі точки ізольованої СМТ змістити на $\delta\vec{r}$, то ні стан системи, ні її внутрішній рух не зміняться.
4. Повна робота внутр. сил СМТ при зміщенні її на $\delta\vec{r}$ має дорівнювати нулю

$$0 = \delta A = (\delta\vec{r} \cdot \sum \vec{F}_i)$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} + \sum_i \vec{F}_i^{(i)} = \vec{F}^{(e)} +$$

$$+ \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \underbrace{\vec{F}^{(e)}}_{=0 \text{ для ізол. сист}} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \underbrace{(\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij})}_{} =$$

$\delta\vec{r} \neq 0$, Значить:

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j (F_{ij} + F_{ji}) = 0$$

За визначенням $F_{ij} = -F_{ji}$ – $\overline{\text{III}}$ з.Н.

Отримали (довели) справедливість $\overline{\text{III}}$ закон Ньютона

Висновок: Справедливість $\overline{\text{III}}$ з.Н і ЗЗІ ізольованої системи МТ зумовлені однорідністю простору

Закони збереження

1) Рух тіл із змінною масою

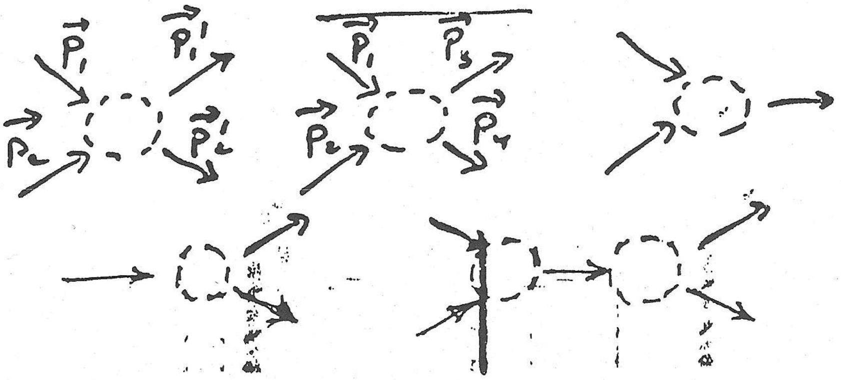
1. Реактивний рух.
2. Рівняння Мещерського.
3. Формули Ціолковського.

2) Зіткнення

1. Визначення зіткнень і удару.
2. Пружний удар.
3. Векторна діаграма пружн. уд.
4. Розгляд зіткнення в системі центру мас.
5. Сповільнення нейтронів.
6. Комптон-ефект.
7. Непружний удар.
8. Поглинання та випускання фотонів.

Зіткненнями наз. взаємодію двох тіл (частинок), яка відбувається у відносно малій обл. простору та протягом відносно малого проміжку часу, так, що поза цією областю та цим проміжком можна говорити про невзаємодіючі тіла.

Удар – взаємодія, при якій міняються імпульси тіл без зміни координат.



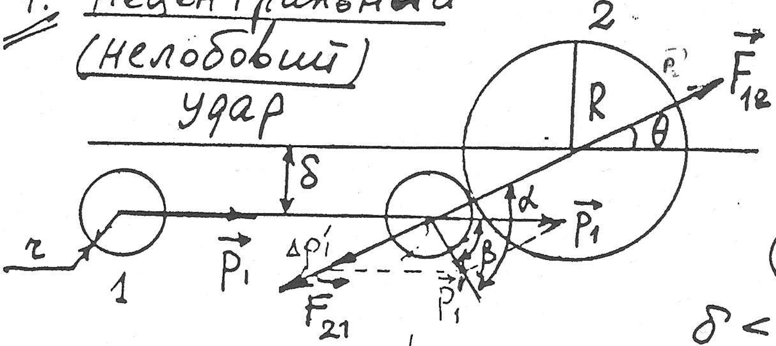
Векторна (імпульсна) діаграма пружного співудару (зіткнення) двох куль

1) β – кут відхилення; $\beta = \vec{p}_1 \widehat{\ } \vec{p}_1{}'$

2) θ – кут зміни напрямку імпульсу кулі 2

3) δ – прицільна відстань

1. Нецентральний (нелобовий) удар



$$(R + r)\cdot \sin\theta = \delta$$

$$\delta < R + r \Leftarrow \sin\theta \le 1$$

4) кут розльоту – $\alpha = \vec{p}_1{}' \widehat{,} \vec{p}_2{}'$; $\theta = \vec{p}_1 \widehat{\ } \vec{p}_2{}'$

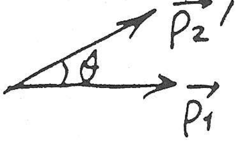
$\vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \vec{p}_2 = 0$ (вибором СВ) $\quad \alpha = \beta + \theta$

Для $\delta = 0$ (або $\theta = 0$) удар наз. лобовим

$$\begin{cases} (1)\ \dfrac{p_1^2}{2m_1} = \dfrac{p_1'^2}{2m_1} + \dfrac{p_2'^2}{2m_2} & E_к = E_{к1}' + E_{к2}' \text{ (ЗЗ енерг.)} \\ (2)\ \vec{p}_1 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' & \text{ЗЗ імпульсу} \end{cases}$$

$$(2'):\ \vec{p}_1{}' = \vec{p}_1 - \vec{p}_2{}' \xRightarrow{(2') \to (1)} \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2{}')^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2{}'^2}{2m_2};$$

$$\cancel{\frac{p_1^2}{2m_1}} = \cancel{\frac{p_1^2}{2m_1}} - \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2{}')}{m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \quad \Big| \quad \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2{}')}{\cancel{m_1}} = \frac{p_2'^2}{2}\left(\frac{m_1 + m_2}{\cancel{m_1} m_2}\right)$$



$$(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2{}') \equiv p_1 \cdot p_2' \cdot \cos\theta = p_2'^2 \frac{m_1 + m_2}{2m_2} \quad \boxed{p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos\theta} \ !$$

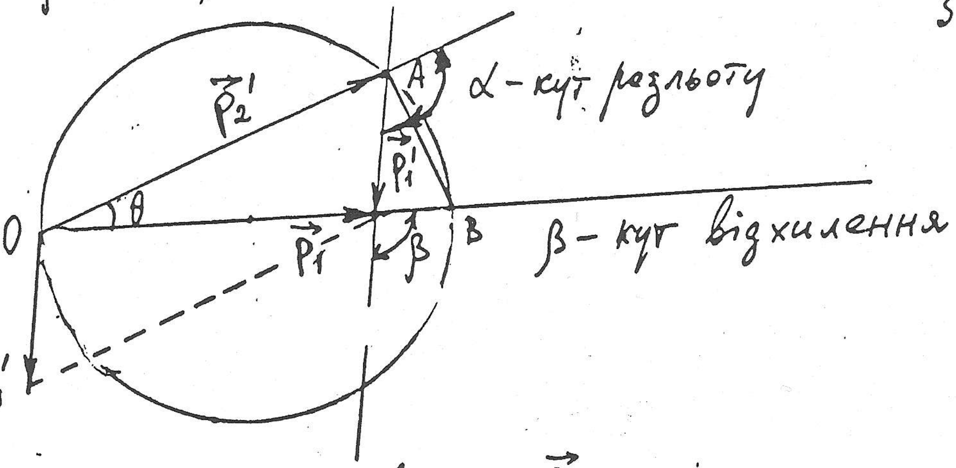
$$!\ p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \cos\theta\ !$$

Побудова векторної діаграми

Дано: p_1; m_1; m_2; θ

Знайти: $\vec{p}_2\,'$; $\vec{p}_1\,'$; α; β

Випадок $m_1 < m_2$ або $\frac{2m_2}{m_1+m_2} > 1$.

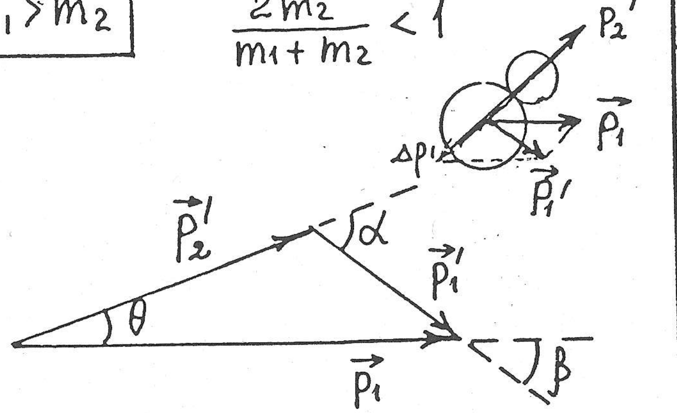
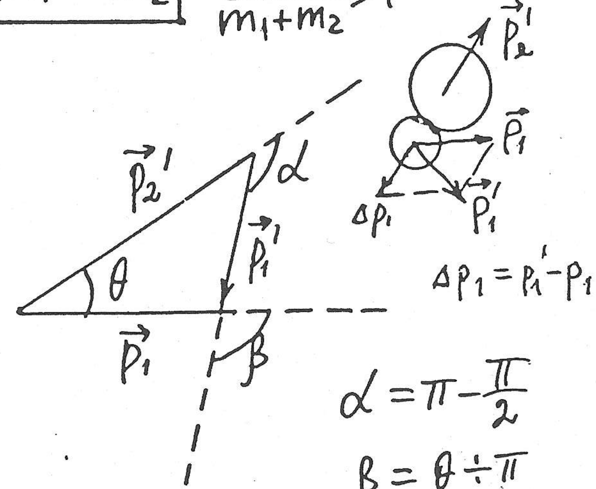
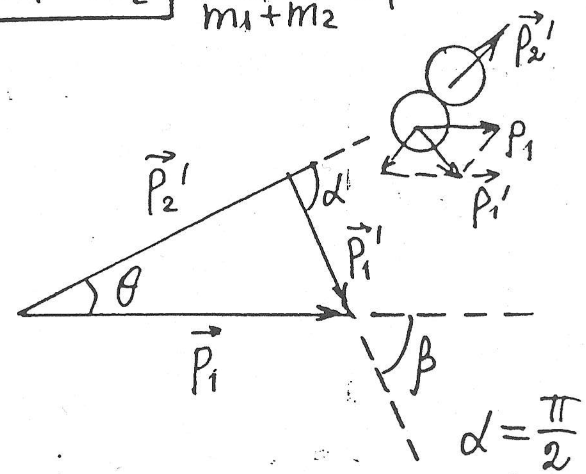


1. Проводимо з т. O вектор $\vec{p}_1$
2. Будуємо коло діаметром $\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\cdot p_1\right)$, щоб воно проходило через т. O
3. Знаючи кут θ будуємо з т. O промінь, який вказує напрямок руху кулі 2 після удару. Точка A – перетин цього променя з колом. Відрізок OA дасть величину p_2':
4. Отримуємо $\vec{p}_1\,'$ (напрямок і величину), з'єднуючи т. A з кінцем вектора $\vec{p}_1$
5. ~~З △OAB знаходимо~~ $p_2' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}p_1\cdot\cos\theta$ (аналітично для перевірки)
6. З векторної діаграми отримали: $\vec{p}_2\,'$, $\vec{p}_1\,'$, кути β, α.

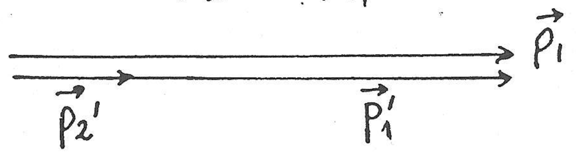
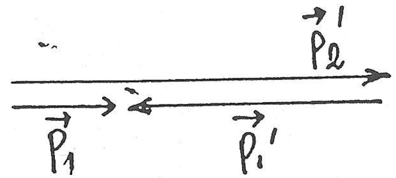
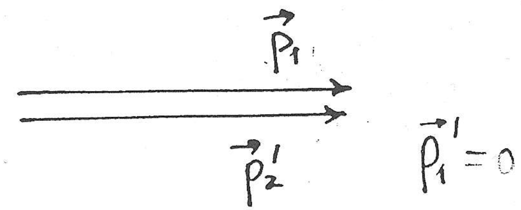
Аналіз:
1) $\pi/2 < \alpha < \pi$
2) $0 < \beta < \pi$ (частинка 1 може відхилитись дуже мало, а може змінити свій рух на протилежний).
3) Усі характеристики зіткнення визначаються кутом θ. Конкретне значення θ закони збереження не дають, хоча $\theta = \arcsin\frac{\delta}{R+r}$.
4) Максимальне значення p_1', коли $\theta = 0$ – лобовий (центральний) удар

Матвеєв (рос.: с. 224; укр. с. 203)
Стрелков с. 123

$$\boxed{p_2' = \frac{2m_2}{m_1+m_2} p_1 \cos\theta}$$

$m_1 > m_2$	$m_1 < m_2$	$m_1 = m_2$
$\frac{2m_2}{m_1+m_2} < 1$	$\frac{2m_2}{m_1+m_2} > 1$	$\frac{2m_2}{m_1+m_2} = 1$
		
	$\Delta p_1 = p_1' - p_1$	
$\alpha = 0 \div \frac{\pi}{2}$	$\alpha = \pi - \frac{\pi}{2}$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$
$\sin\beta_{max} = \frac{m_2}{m_1}$; $\beta = 0 \div \beta_{max}$	$\beta = \theta \div \pi$	$\beta = 0 \div \frac{\pi}{2}$

$\theta = 0$ (центр. удар) : $p_2' = \frac{2m_2}{m_1+m_2} p_1$; $E_2' = \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{4m_2^2}{(m_1+m_2)^2} \cdot \frac{p_1^2}{2m_2} \frac{m_1}{m_1} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} \cdot E_1$; $V_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} \cdot V_1$; $V_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} V_1$

$m_1 \gg m_2$	$m_1 \ll m_2$	$m_1 = m_2$
$p_2' \approx 2\frac{m_2}{m_1} p_1$; $p_2' \ll p_1$	$p_2' = 2p_1$; $V_2' = 2\frac{m_1}{m_2} V_1$	$p_2' = p_1$; $V_2' = V_1$
$V_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} V_1 \Rightarrow V_2' \approx 2V_1$	$V_2' \ll V_1$	$E_2' = E_1$; $V_1' = 0$
$E_2' = 4\frac{m_2}{m_1} E_1$; $E_2' \ll E_1$	$V_1' = -V_1$	
	$E_2' = 4\frac{m_1}{m_2} E$	
	$E_2' \ll E_1$	
		

Рух тіл із змінною масою. Реактивний рух.

1) $v \ll c$ 2) маса змінюється за рахунок маси самого тіла 3) Розглянемо випадок ракети:

$$m(t),\ \vec{v}(t),\ \vec{p}(t) \to \begin{matrix}(m-\Delta m)\cdot(\vec{v}+\Delta\vec{v}) \\ (m+dm)\cdot(\vec{v}+d\vec{v})\end{matrix} \quad \begin{vmatrix} dm = -\Delta m \\ dm < 0 \end{vmatrix}$$

Крім $\Delta\vec{p}_{рак}$ є імп. (кількість руху) газів, які утворились за час dt. Він дорівнює $dm_{газ}\cdot v_{газ}$

Закон збереження імпульсу:

$$(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) + dm_{газ}\cdot\vec{v}_{газ} - m\vec{v} = \vec{F}\cdot dt \qquad (1)$$

$\vec{F}$ – геом. сума всіх зовн. сил, які діють на ракету

$$\cancel{mv} + m\cdot dv + dm\cdot v + dm\cdot dv + dm_г\cdot v_г - \cancel{mv} = F\cdot dt$$

- нехтуємо $dm\cdot dv$
- маса зберігається (закон зберех. маси): $dm = -dm_{газ}$
- введемо відн. шв. $\vec{u} = \vec{v}_{газ} - \vec{v}$, $\vec{u}$ – шв. витікання газів відносно ракети

$$m\cdot d\vec{v} = \vec{u}\cdot dm + \vec{F}\cdot dt \qquad (2)$$

$$\boxed{m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\cdot\frac{dm}{dt} + \vec{F}}$$ Рівняння Мещерського (3)

$\vec{u}\cdot\frac{dm}{dt}$ – реактивна сила (сила тяги ракети)

Неправильно, але наглядно: $\vec{u} = -\vec{v}$. Тоді

$$m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(m\cdot\vec{v}) = \vec{F}}$$

Для ракети $F = 0 \Rightarrow m\cdot d\vec{v} = \vec{u}\cdot dm \qquad (4)$

У скалярному вигляді: $m\cdot dv = -u\cdot dm$

$\frac{dv}{dm} = -\frac{u}{m}$. Якщо $u = const$, то

$$\int dv = -\int \frac{u}{m}\cdot dm + c$$

$$v = -u\int\frac{dm}{m} + c = -u\cdot \ln m + c$$

Початк. умови: $t=0;\ v=0;\ m=m_0$

$$0 = -u\cdot \ln m_0 + c \Rightarrow c = u\cdot \ln m_0$$

$$\boxed{v = u\cdot \ln\frac{m_0}{m}} \Rightarrow \boxed{\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{u}}}$$

Наслідок р-ня Мещерського – формула Ціолковського

Якщо $t=0;\ v=v_0;\ m=m_0$, то

$$m = m_0 e^{-\frac{v-v_0}{u}}$$

Приклад 1. $v_0=0;\ v=8$ км/с; $u=3\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$

$$\frac{m_0}{m} = e^{8/3} \approx 14 \quad \text{або} \quad m = \frac{m_0}{14}$$

Пр. 2: $v_0=0;\ v=8$ км/с; $u=4$ км/с

$$\frac{m_0}{m} \approx e^2 \approx 7 \qquad m = \frac{m_0}{7}$$

m – „корисна" маса

Сучасні ракети: $u = 3 \div 5$ км/с

З урахуванням витрат на гальмування при поверненні $m \approx \frac{m_0}{400}$

Застосування законів збереження до руху тіл у центр. гравітац. полі

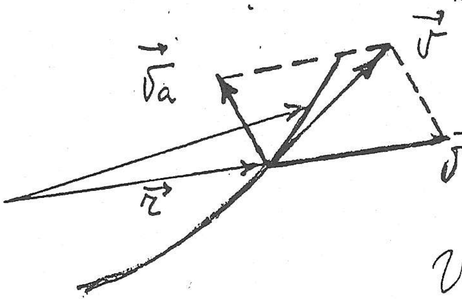
Савельєв с. 111

Кучерук с. 141

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r} = const \qquad (1)$$

$$L = mvr = mr^2\omega = const \qquad (1')$$

$l = 0$ (поле центральне) $\Rightarrow \vec{M} = 0$



$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_a$

v_p – радіальна

v_a – азимутальна

$$v_a = \omega r$$

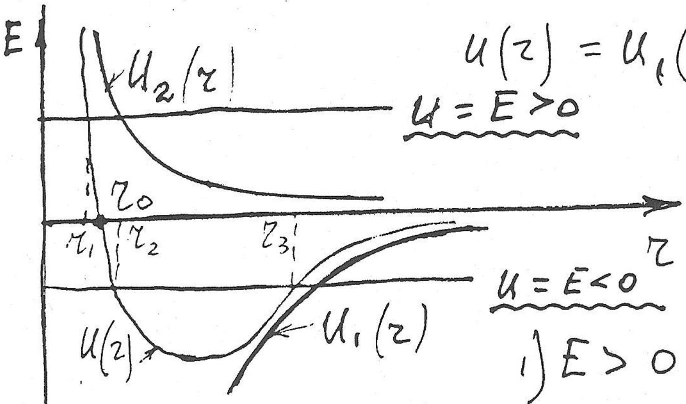
$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} v_p^2 + \frac{m}{2} v_a^2 = \frac{m}{2} v_p^2 + \frac{m}{2} r^2\omega^2 =$$

$$= \frac{mv_p^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} \qquad (2)$$

$$(2) \to (1): \quad \underbrace{\frac{mv_p^2}{2}}_{\neq f(r);\ = f(v)} \underbrace{- \gamma \frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}}_{\neq f(v);\ = U(r)} = E = const$$

$$\boxed{U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}}$$ потенц. ен

Коли рух буде обмеженим у просторі (траєкторія – еліпс, рух фінітний):



$$U(r) = U_1(r) + U_2(r)$$

$$U_1(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$$

$$U_2(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$$

1) $E > 0$ – рух інфінітний, траєкт. гіперб.

2) $E < 0$ – мають місце 2 точки (r_2 та r_3), які визначають і обмежують у просторі рух (фінітний рух)

3) $E = 0$ – рух інфінітний, траєкторія парабол.