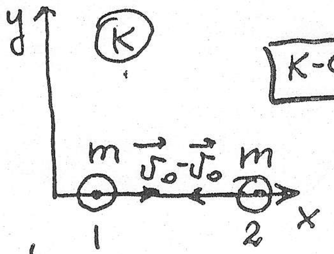
Динаміка СТВ

I. Релятивістський імпульс

Закон збер. імп. не інваріантний до перетв. Лор.

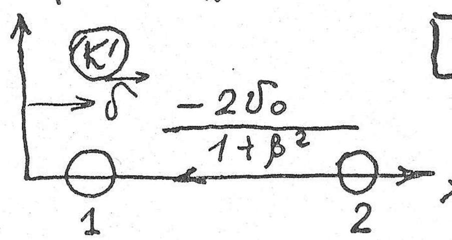
Абс. непружний удар.



K-СВ: Після зіткнення кулі будуть покоїтьcя

ЗЗІ : $mv_0 - mv_0 = 0$ ОК!

$\beta = \frac{v}{c}$



K'-СВ: пов'язана із кулею 1, в ній вона покоїться

До зіткнення:

$v_1' = 0$

$v_2' = -2v_0 \frac{1}{1+\frac{v^2}{c^2}}$

Після зіткнення:

$v_1' = v_2' = -v_0$

Сумарний імпульс:

до зіткнення : $-2mv_0 \frac{1}{1+\beta^2}$ | ЗЗІ не виконується

після зіткнення : $-2mv_0$

?

1. Якщо $v \ll c$, то сум. імп (імп. системи) до і після зіткнення практично однакові. (ЗЗІ майже виконується).
2. Для великих v явне порушення ЗЗІ.
3. Треба шукати такий вираз для імп., щоб ЗЗІ був інваріантним по відн. до перетв. Лоренца.
4. Релят. вираз для $\vec{p}$ повинен при $v \ll c$ переходити в ньютонівськ. вигляд $\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$

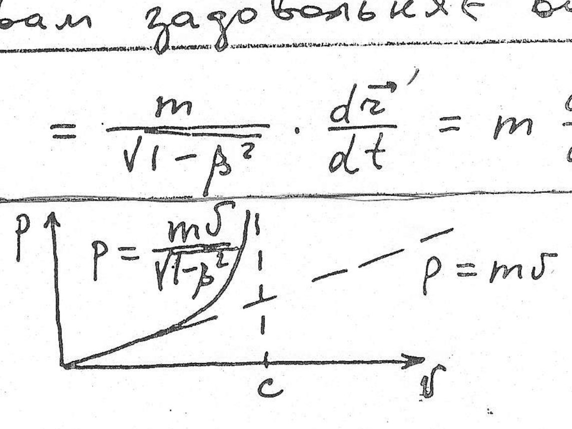
СРС: Можна показати, що таким умовам задовольняє вираз

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau}}$$

$\vec{p} = m\vec{v} \cdot \gamma$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Коеф. Лоренца



M – інваріант

2. Релятивістська енергія

$$p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{c}{c} = \frac{c m \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p^2 = \frac{c^2 m^2 \beta^2}{1-\beta^2} \quad (1)$$

$$1 = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \quad \Big| * m^2c^4$$

$$m^2c^4 = \frac{m^2c^4}{1-\beta^2} - \frac{m^2c^4\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{m^2c^4}{1-\beta^2} -$$

$$- \frac{m^2c^2\beta^2}{1-\beta^2}c^2 \underset{\uparrow(1)}{=} \frac{m^2c^4}{1-\beta^2} - p^2c^2 \quad (2)$$

зліва – inv $\Rightarrow$ справа – inv

Якщо $\beta \leq 1 \Rightarrow$ Ряд Тейлора: $(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \ldots\right) = mc^2 + \frac{m\upsilon^2}{2} + \ldots$$

$E_{кін}$! $\Rightarrow$ зліва від знака „$\approx$" теж енергія!

$$(3) \quad \boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad E = mc^2\gamma$$

Повернемось до inv (2):

$$! \; m^2c^4 \underset{\uparrow(3)}{=} E^2 - p^2c^2 \Rightarrow E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \; !$$

4-ий інваріант

$$(4) \quad \boxed{E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}}$$

1 Якщо порівняти (3) з виразом рял. імпул. $\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\vec{\upsilon}}{c^2}E}$$

2 Якщо $\upsilon = 0 \Rightarrow p = 0$

$\boxed{E = mc^2 = E_0}$ – ен. спокою

3 $\underline{\upsilon = c} \Rightarrow p = \frac{E}{c} \Rightarrow (E^2 = p^2c^2 + m^2c^4) \Rightarrow$

$$E^2 = \frac{E^2}{\cancel{c^2}}\cdot\cancel{c^2} + m^2c^4 \Rightarrow \underline{m = 0}!$$

Безмасова частинка ($m=0$) із $\upsilon = c$: фотон

$E_0 = 0$. В стані спокою не існує. Зупинити значить знищити. „Покой ей только снится"!

4 Якщо $\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = dt$, то

$\boxed{E = mc^2 \frac{dt}{d\tau}}$; Крім того $\boxed{E = mc^2\gamma}$

5 $E_{кін} = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1)$. Якщо $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то можна скористатись розкладом у ряд $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots$

При $\beta \ll 1$ $E_{кін} = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$

6 Як і в клас. механіці, в СТВ ен. та імпульс адитивні: $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$; $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$

7 „Масивне" тіло $(m \neq 0)$ не може рухатись із шв. світла $(E \to \infty, p \to \infty)$.

8 В СТВ мають місце ЗЗІ та ЗЗЕ ізольованої частинки або ізольованої системи ч-ок

9 Перетворення Лоренца для енергії та імп.

$E \to (E' + \vec{v}\vec{p}')\gamma$; $p_x = \left(p_x' + \frac{vE}{c^2}\right)\gamma$

$p_y \to p_y'$; $p_z \to p_z'$

10 $E^2 - p^2c^2 = inv$, хоча $E \neq inv$ та $p \neq inv$.

11 Для розглянутого вище випадку абс. непружного удару 2-х куль:

Після удару: імпульс системи дорівнює нулю;

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

Після удару кулі зупиняються, а їх повна енергія являє собою лише енергію спокою: $E = E_0 = Mc^2$.

Із закону збереження повної ен. при ударі маємо:

ЗЗЕ: $Mc^2 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow M \neq 2m!$ $M > 2m$

Збільшення маси при ударі дорівнює

$$\Delta m = M - 2m = 2m\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

В релятивістській механіці маса не адитивна

$M \sim E_0$

4. Зв'язок між силою та прискоренням

$\vec F = \frac{d\vec p}{dt}$ та $\vec a = \frac{d\vec v}{dt}$ — В СТВ зберігають ньютонівські співвідношення

В СТВ: $E = mc^2\gamma$; $\vec p = m\vec v\gamma$

$$\boxed{\vec F = \frac{d(m\vec v\gamma)}{dt}} = m\left[\gamma\frac{d\vec v}{dt} + \vec v\cdot\frac{d\gamma}{dt}\right] =$$

$$= m\left[\gamma\frac{d\vec v}{dt} + \vec v\,\frac{d\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}}{dt}\right] =$$

$$= m\left[\gamma\frac{d\vec v}{dt} + \vec v\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\frac{d\vec v}{dt}\right] =$$

$$= m\left(\gamma\frac{d\vec v}{dt} + \frac{v^2}{c^2}\gamma^3\frac{d\vec v}{dt}\right) = m\left[\gamma\vec a + \vec\beta\gamma^3(\vec\beta\cdot\vec a)\right] \quad (A)$$

$\vec F = \vec F_\parallel + \vec F_\perp$

а) Якщо $\vec F\perp\vec v$, то $\vec F = \vec F_\parallel = m\gamma\vec a$

б) Якщо $\vec F\parallel\vec v$, то $\vec F = \vec F_\perp = m\gamma^3\vec\beta(\vec\beta\cdot\vec a)$

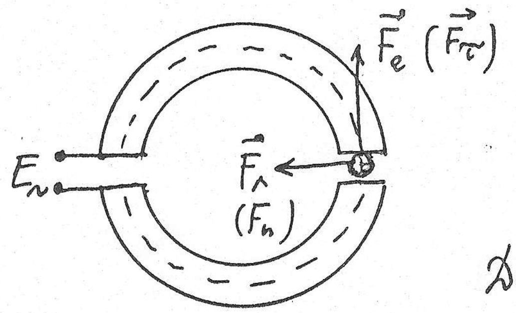
Висновки: 1) Незвичайне з т.з. ньютонівської механіки рівняння (А) правильно описує рух релят. частинки і вже 100 років підтверджує;
2) $\vec a\parallel\vec F$ лише тоді, коли $\vec F\perp\vec v$;
3) В інших випадках (крім $\vec F\perp\vec v$) до прискор. додається складова, паралельна швидкості ($\vec v$);
4) Ця складова пропорц. $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$ і в разі $v\ll c$ нею можна знехтувати;
5) інертність частинки по напрямку руху $\neq$ інертності частинки, яка перпендик. до швидкості руху: $m\gamma\neq m\gamma^3\beta^2$;
6) якщо визначити інертну масу як відношення $\vec F/\vec a$, то ця величина в СТВ залежить від взаємного розташування напрямків $\vec F$ та $\vec v$ і тому однозначним чином її визначити не можна. Маса не є мірою інертн. в СТВ.
7) єдиної міри інертності для релят. частинки не існує, оскільки опір тіла прискорюючій його силі залежить від кута між силою та швидкістю.

$\vec F\big|_{\vec F\parallel\vec a} = \vec F_\parallel$; $\vec F\big|_{\vec F\perp\vec a} = \vec F_\perp$

$\vec\beta = \frac{\vec v}{c}$

1. $\vec F\parallel\vec a$ лише у випадку, коли $\vec F\perp\vec v$: покажемо це в 2-му додатку (А):
$\beta\cdot a\cdot\cos\widehat{\vec a\,\vec\beta} = \beta a\cdot\cos\widehat{\vec a\,\vec v} = \beta a\cdot\sin\widehat{\vec a\,\vec F}$
Щоб $\sin\widehat{\vec a\,\vec F} = 0$, необх. $\widehat{\vec a\,\vec F} = 0 \Rightarrow \vec F\parallel\vec a \Rightarrow \vec F = \vec F_\parallel$
2. В інших випадках (крім $\vec F\perp\vec v$) до сили $F_\parallel$ (складової, що паралельна $\vec a$) додається сила $F_\perp$, що перпендикулярна $\vec a$.
$\vec F_\perp = m\gamma^3\vec\beta(\vec\beta\cdot\vec a)$. Ця складова $\sim\frac{v^2}{c^2}$ і при $v\ll c$ $F_\perp\to 0$.
3. Величина $F_\perp$ максимальна в разі, коли $\vec F\parallel\vec v$. Це викликане тим, що $\cos\widehat{\vec a\cdot\vec v} = \cos\widehat{\vec a\cdot\vec F} = \cos\frac{\pi}{2} = 1$
4. У випадку, коли $\vec F\parallel\vec v$ ($\vec F\perp\vec a \Rightarrow \vec F = \vec F_\perp$) величина $F_\parallel = 0 \Rightarrow F_\perp = \beta^2\gamma^3 a \Rightarrow$
$F = F_\perp$

3. Основне рівняння динаміки в СТВ.



$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]\right)$$

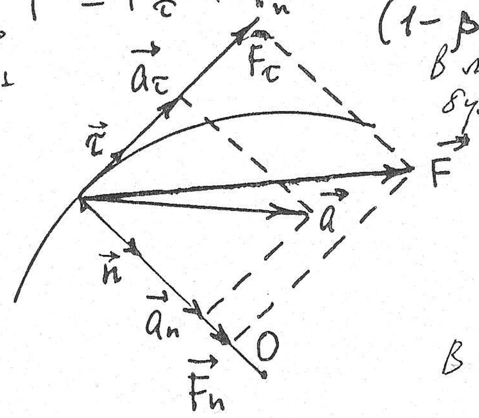
Експеримент дає: — див. рис. 2.

$$\frac{F_n}{a_n} = \frac{const}{(1-\beta^2)^{1/2}}; \quad \frac{F_\tau}{a_\tau} = \frac{const}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

Для $v \ll c$ $\quad \frac{F}{a} = const$ — міра інертн. частинки =

$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + \frac{m}{(1-\beta^2)^{1/2}}\cdot\frac{v^2}{R}\cdot\vec{n}$$ — рівнян руху

$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$



В лекції „Кінематика", Спосіб опису руху — „природній" було:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\cdot\vec{n} \Rightarrow$$ В класичн механіці

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a} = m\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + m\frac{v^2}{R}\cdot\vec{n}$$

Було також: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + v\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt}$

В СТВ: $$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\vec{\tau} + \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv\vec{\tau}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad \text{де } \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Вигляд осн. рівняння динаміки в СТВ та в клас. механіці однакові.

Але: 1) $\vec{p}$ — релятив. імпульс

2) $\vec{F} \nparallel \vec{a}$

У релят. механіці:

- прискорення не збігається за напрямом з $\vec{F}$ з причини:
- відмінність інертності частинки, що рухається уздовж швидкості і перпендикулярно до неї

Неправильно „$m_\perp \neq m_\parallel$", але можна стверджувати

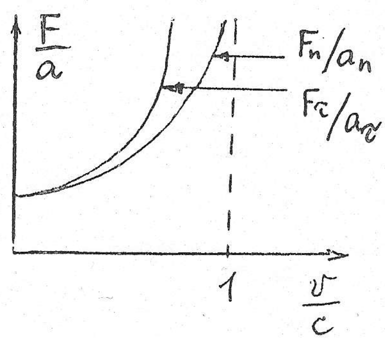


Рис. 2

Зв'язок маси та енергії. Приклади взаємоперетворень енергії спокою і кінетичної енергії.

Ейнштейн (1905 р.) відкрив фіз. сенс маси, ввівши у фізику поняття енергії спокою $E_0 = mc^2$

$$E - E_0 = E_{кін} \Rightarrow E - E_{кін} = E_0 = mc^2$$

Треба казати про „еквівалентність енергії спокою та маси". ≡ Маса тіла є міра енергії, що міститься в ньому.

Пр. 1. Реакція поділу ядер U^{235}

$$U^{235} + n \rightarrow {}^{140}Cs + {}^{94}Rb + 2n$$

Маса спокою U^{235} і повільного нейтрона > сум. маси спокою частинок в правій частині формули ~ на $4 \cdot 10^{-28}$ кг

Цьому надлишку маси відповідає внутр. енергія

$$\Delta E = c^2 \cdot \Delta m = (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-28} \approx 4 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}$$

Ця ен. перетворюється в кін. ен. частинок, що утворились, та в енергію ел.м. випромінювання.

$(\Delta m / m) \sim 0.9 \cdot 10^{-3}$

Пр. 2. Термоядерні реакції (синтез ядер) — на Сонці

$$2e + 4p \rightarrow {}^4He + 2\nu + E_{кін} \qquad \nu \text{ — нейтріно}$$

Енергія, що виділяється $E_{кін} = 93.3$ МеВ

$m_p = 938$ МеВ; $m_e = 0.5$ МеВ $\Rightarrow (\Delta m / m) = 0.8 \cdot 10^{-2} = 0.8\%$!

Пр. 3. Анігіляція електрона та протона

Утворюються 2 фотона. Вся енергія спокою e та p переходить в кін. ен. фотонів.

Пр. 4. Горіння метану (газова горілка на кухні)

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$ Виділяється ен 35.6 МДж/м³

$(\Delta m / m) = 10^{-10}$ В хім. реакціях величина $(\Delta m / m)$ на 7-8 порядків менша, ніж в ядерних, але суть механізму виділення енергії така ж сама! енергія спокою переходить в кінетичну енергію

Маса тіла змінюється завжди, коли змінюється його внутрішня енергія. Наприклад:

1) при нагріванні залізного утюга на 200° його маса збільшується на величину $(\Delta m/m) = 10^{-12}$

2) при плавленні деякої кількості льоду (лід перетворюється у воду) $(\Delta m/m) = 3.7\cdot 10^{-12}$

3) При непружному ударі 2-х частинок, маса спокою утворених частинок (m_Σ) в системі центра мас дорівнює $m_\Sigma = m_1 + m_2 + \frac{E_{k1} + E_{k2}}{c^2}$, тобто $m_\Sigma > m_1 + m_2$

4). Згорання вуглецю в атмосфері кисню:

$$C + O_2 \to CO_2$$

$$12\,г + 32\,г \to 44\,г$$

Виділяється тепло ~ 100 ккал $= 100\cdot 4.2\cdot 10^{10}$ ерг

Такій кількості енергії відповідає маса Δm

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{4\cdot 10^{12}\,ерг}{9\cdot 10^{20}\,см^2/с^2} \sim 0.5\cdot 10^{-8}\,г$$

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{0.5\cdot 10^{-8}}{44} \sim 10^{-10}$$

5) Ен. спокою тв. тіла або системи зв'язаних взаємодіючих частинок (молекул, атомів, нуклонів тощо) не дорівнює сумі власних енергій $m_i c^2$ всіх частинок, які входять в цю систему, у вільному стані.

Для розщеплення такої системи на її складові частини необхідно здійснити деяку роботу A проти сил зв'язку. Із закону збереження енергії

$$\sum_{i=1}^{N} m_i c^2 = E_0 + A \quad або \quad E_0 = \sum_{i=1}^{N} m_i c^2 - \Delta E$$

де $\Delta E = A > 0$ – енергія зв'язку системи

Відповідно, маса M системи менша за суму мас всіх частинок цієї системи у вільному стані

$$\Delta m = M - \sum_{i=1}^{N} m_i = -\frac{\Delta E}{c^2} < 0.$$

Сучасні уявлення про масу

Л.Б. Окунь Усп. физ. наук 1989, т. 158, № 3, с. 511
2000, т. 170, № 12, с. 1364

1. М. – є лоренцовий інваріант
2. М. ізольованої системи зберігається із часом
3. М. не адитивна

Ен. та імпульс адитивні. Сумарна ен. (E) двох вільних тіл дорівнює сумі їх енергій $E = E_1 + E_2$
Аналогічно $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Крім того, $E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$

$$m^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{\vec{p}^2}{c^2} = inv$$

$$m^2 = \frac{(E_1+E_2)^2}{c^4} - \frac{(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2}{c^2} = \frac{(E_1+E_2)^2}{c^4} - \frac{p_1^2 + 2\vec{p}_1\vec{p}_2 + p_2^2}{c^2}$$

$$= \frac{(E_1+E_2)^2}{c^4} - \frac{1}{c^2}\Big(p_1^2 + p_2^2 + \underbrace{2\,\frac{E_1 \cdot E_2}{c^4}\,\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}_{=2E_1E_2\frac{v_1 \cdot v_2}{c^4}\cdot\cos\theta}\Big) \neq (m_1+m_2)^2$$

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$$

Сумарна маса виявляється залежною від кута між $\vec{p}_1$ та $\vec{p}_2$.
Маса системи із 2-х частинок з ен. E у кожної з них

$v \approx c$ дорівнює $m_{\downarrow\uparrow} = \frac{2E}{c^2}$, якщо вони летять в протилежні напрямки

$m_{\uparrow\uparrow} = 0$, якщо частинки летять в одну сторону.

Якщо $v \ll c$, то $m_1 + m_2 \simeq m$

4. У Ньютона теж $m \neq m(v)$. Чим відрізняється трактування маси в СТВ та в клас. механіці? В СТВ:
а) існують безмасові частинки; б) $m_1 + m_2 \neq m$ М. – не адитивна

Савельев, § 69

4-вимірний вектор енергії-імпульсу

Матвєєв, с. 73-75

1. 3-вимірний простір (евклідів пр-р):

$\vec{A}$ – будь-який вектор

$|\vec{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = inv$ (компоненти вектора при повороті СК перетворюються по тим же законам, що і координати).

2. 4-вимірний простір (Мінковськ.)

По аналогії із 3-хвим. простором під 4-вимірним вектором розуміють сукупність 4-х величин: a_t, a_x, a_z, a_y, які перетворюються по тим же формулам, що і ct, x, y, z у перетвореннях Лоренца для коорд. і часу

Квадрат такого 4-вектора визначається як $a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = inv$

3. Виберемо сукупність таких величин: $E/c, p_x, p_y, p_z$ (1)

Так само, як і за визначенням:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = inv = m^2c^2$$

Цей inv пов'язаний з формулою

$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ – Ця формула є наслідком твердження, що сукупність величин (1) утворює 4-вектор

Чотири-вектор простору-часу.

3-вектор: $\vec{r}(x, y, z)$

4-вектор: $\vec{S}(x, y, z, ict)$ характеризує простір-час як одне ціле

Простір і час пов'язані між собою:

$$t = \frac{t' + \left(\frac{v}{c^2}\right)\cdot x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$!

$i = \sqrt{-1}$
c = швидкість світла

(1908 р.)

4-вимірний простір ввів Герман Мінковський

Положення МТ в кожний момент часу визначається 4-ма коорд.: x, y, z, t ($t \to ct$ або $t \to ict$).

світова – „мировая"

Точка в 4-вимірному просторі наз. світовою точкою

Рух МТ в 4-вимірн. просторі-часі зображається світовою лінією

Явища у 4-вимірн. пр.-часі наз. подіями

Відстань між 2-ма подіями (світовими точками) є 4-вимірний вектор переміщення – $\Delta\vec{S}$

(A) $\Delta S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2\Delta t^2 =$

$= \Delta l^2 - c^2\Delta t^2$ де $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

По Галілею: $\Delta l = inv$; $\Delta t = inv$.

По СТВ: $\Delta l = \Delta l_0 \sqrt{1-\beta^2}$; $\Delta t = \Delta\tau / \sqrt{1-\beta^2}$

Можна (треба! СРС!) показати, що $\Delta S^2 = \Delta S'^2 = inv$ хоча $\Delta l \neq inv$; $\Delta t \neq inv$

ΔS^2 – (просторово-часовий інтервал)^2 є інваріантом

Савельєв с. 228–231 | Кучерук та інш с. 198–200 | Матвєєв с. 78–79

Доведення того, що $\Delta S^2 = inv$:

Скористаємось формулами $\Delta x = \frac{\Delta x' + v\cdot\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\Delta y = \Delta y'$; $\Delta z = \Delta z'$; $\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\cdot\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Підставимо ці вирази в (A):

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 = \frac{1}{1-\beta^2}\left(\Delta x'^2 + 2v\cdot\Delta t'\cdot\Delta x' + v^2\Delta\right.$$

$$+ \Delta z'^2 + \Delta y'^2 - c^2\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\left(\Delta t'^2 + 2\frac{v}{c^2}\cdot\Delta x'\cdot\Delta t' + \frac{v^2}{c^4}\cdot\Delta x'^2\right) =$$

$$= \Delta x'^2\underbrace{\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right)}_{=1} + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2\Delta t'^2\underbrace{\left(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{1-\beta^2}\frac{v^2}{c^2}\right)}_{=1} = $$

Три типи інтервалів:

1. Просторовоподібний інтервал : $\Delta S^2 > 0 \Rightarrow$
Події в двох світових точках не можуть бути зв'язані причинно. Тоді $\Delta l > ct \Rightarrow \Delta S^2 > 0$.
З того, що $\Delta S^2 = \Delta S'^2$, випливає, що в усіх ІСВ ці події не мають причинно-наслідкового зв'язку: ці події ніяк не можуть впливати одна на другу ≡ не існує способу передати взаємодію (інформ.) із швидкістю > шв. світла c ≡ події, розділені таким інтервалом, ні в одній із СВ не можуть бути просторово суміщеними. Але завжди можна знайти таку СВ, в якій ці події відбуваються одночасно ($\Delta t = 0$).
2. Часоподібний інтервал : $\Delta S^2 < 0 \Rightarrow$
Для подій, які зв'язані причинним зв'язком, можна завжди знайти таку ІСВ, в якій події відбуваються в одній і тій ж самій точці простору в послідовні проміжки часу: $\Delta l = 0$; $\Delta S^2 = -c^2 \cdot \Delta t^2 < 0$. Не існує такої СВ, в якій ці дві події відбувалися би одночасно: тоді мало б бути $\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta S^2 = \Delta l^2 > 0$, що суперечить умові $\Delta S^2 < 0$!
3. Нульовий інтервал : $\Delta S^2 = 0 \Rightarrow$
$\Delta l = ct$: Такий інтервал існує між подіями які зв'язані між собою взаємодією, що передається із швидкістю світла.

Події, зв'язані між собою причинно-наслідковим зв'язком, можуть бути розділені лише часоподібним або нульовим інтервалами.

Події, які відбуваються з однією і тією ж самою частинкою ($m \neq 0$), можуть бути розділені лише часоподібним інтервалом.

Відстань Δl між точками, в яких відбуваються події, розділені просторовоподібним інтервалом, перевищує величину $c \cdot \Delta t$. Тому ці події ніяк не можуть впливати одна на іншу, тобто не можуть бути причинно зв'язаними. Це випливає з [illegible] яка передається із швидкістю $v > c$.