Поле тяжіння

напрямок $\vec{r}$ і $\vec{F}$ протилежні

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{або} \quad \vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$ Закон Ньютона

де $\gamma = 6.7 \cdot 10^{-11}$ $Н \cdot м^2/кг^2$ – гравіт. стала

m_1, m_2 – точкові маси

Напруженість поля тяжіння – $\vec{G}$

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad [G] = [g] = \frac{м}{с^2}$$

Силова характеристика поля тяжіння

На поверхні Землі $G = 9.8 \frac{м}{с^2}$

$$\vec{G} = -\gamma \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \; ; \quad F = G \cdot m$$

Потенціал поля тяжіння – φ

$$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} \qquad \left(\text{При } r = \infty \quad U = 0 \right)$$

див. залежність на рис.

потенціал $\varphi = \frac{U}{m}$; потенціальна енергія $\boxed{U = m \cdot \varphi}$

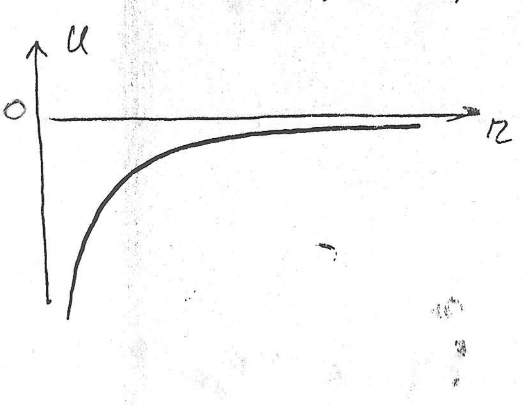
енергетична характеристика поля тяжіння

$$A_{12} = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Зв'язок між $\vec{G}$ та φ

$\vec{F} = -\nabla U$ вже було!

$$m \cdot \vec{G} = -\nabla (m\varphi) \Rightarrow \boxed{\vec{G} = -\nabla \varphi}$$



Принцип еквівалентності

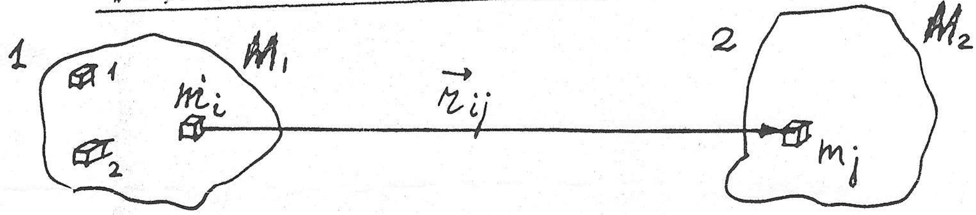
$F = m_i a$ m_i – інертна маса

$F = \gamma \frac{m_г \cdot M}{r^2}$ $m_г$ – гравітаційна маса

Ніякими експериментами всередині системи неможливо встановити, чи знаходиться система в стані прискореного руху чи перебуває в однорідному гравітаційному полі.

Вся сукупність експериментальних фактів вказує на те, що інертна і гравітаційна маси всіх тіл строго пропорційні одна одній.

Тяжіння неточкових мас



$$\vec{f}_{ij} = -\gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \qquad (1)$$

$$\vec{f}_{1j} = -\gamma \sum_{i=1}^{N_1} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \qquad (2)$$

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \cdot \vec{r}_{ij} \qquad (3)$$

Зауваження: 1) якщо тіло 1 розбити на N_1, а тіло 2 – на N_2 елементарних мас, то сума (3) буде містити $N_1 \cdot N_2$ доданків;

2) практично сумування (3) зводиться до інтегрування і, взагалі кажучи, є досить складною математичною задачею;

3) якщо взаємодіють тіла однорідні та такі, що мають правильну форму, обчислювання F_{12} сильно спрощується (див нижче);

4) приклад 1: взаємодія двох однорідних куль;

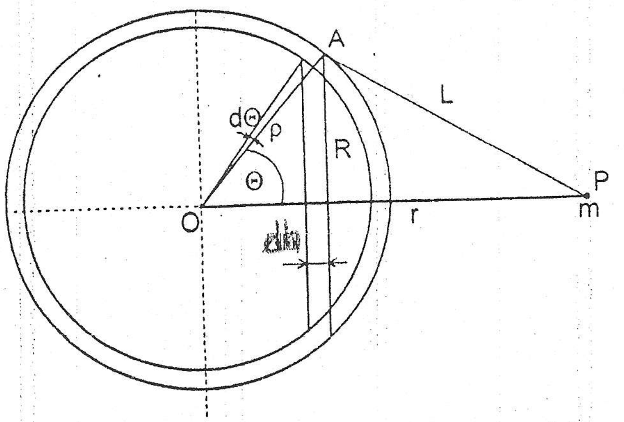
5) приклад 2: взаємодія однорідної кулі та матеріальної точки (земна куля та тіло на її поверхні)

ВЗАЄМОДІЯ КУЛІ З МАТЕРІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ

Є частинка, маса якої m і яку треба розглядати як матеріальну точку, і є однорідна куля маси M. Частинка знаходиться поза кулі на відстані r від її центра. Треба знайти: а) потенціальну енергію гравітаційної взаємодії частинки і кулі; б) силу, з якою взаємодіють куля та частинка.

Будемо вважати, що куля, крім маси M, характеризується і радіусом ~~R. (Далі R скоротиться~~ якими і в кінцевий результат, як побачимо, не ввійде).

Розглянемо (подумки виділимо) у кулі тонкий сферичний



приповерхневий шар радіусом ρ. Маса цього шару - dM. Товщина шару з нескінченно тонкою стінкою - $d\rho$

Умовно проведемо дві паралельні між собою площини, що відстоять одна від другої на відстані dh і перпендикулярні до відрізку OP, який з'єднує центр кулі та матеріальну частинку. Ці площини виділять із приповерхневого шару елементарний поясок у вигляді кільця радіусу R, шириною $d\rho$ та площею ds. Величина

$$ds = 2\pi R \cdot d\rho \ ,$$

де $R = \rho \sin\theta$, а $d\rho = \rho \cdot d\theta$.

Таким чином:

$$ds = 2\pi(\rho \cdot \sin\theta)\rho \cdot d\theta = 2\pi\rho^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \qquad (1)$$

Відношення маси dM тонкого сферичного шару до маси dM' елементарного пояска (товщини $d\rho$ яких однакові) дорівнює відношенню їх площ:

$$\frac{dM'}{dM} = \frac{ds}{4\pi\rho^2} \qquad (2)$$

$$dM' = dM \frac{2\pi\rho^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta}{4\pi\rho^2} = \frac{dM}{2} \cdot \sin\theta \cdot d\theta\ . \qquad (3)$$

Через те, що кожна точка елементарного пояска рівновіддалена від матеріальної частинки, для характеристики їх взаємодії можна скористатись формулами, які вводились для точкових мас. Зокрема, потенціальна енергія гравітаційної взаємодії частинки з елементарним пояском

$$dU' = -\gamma \frac{m \cdot dM'}{L} = -\gamma \frac{m \cdot dM}{2L} \cdot \sin\theta \cdot d\theta\ , \qquad (4)$$

де L - відстань від будь-якої точки пояска до матеріальної частинки ($L = AP$ на рис.6).

Для трикутника OAP теорема косинусів має вигляд

$$L^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho \cdot r \cdot \cos\theta \qquad (5)$$

Продиференцюємо (5) (ρ та r - сталі):

$$2L \cdot dL = 2\rho \cdot r \cdot \sin\theta\, d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{L} = \frac{dL}{\rho \cdot r} \qquad (6)$$

(6)→(4): $$dU' = -\gamma \frac{m \cdot dM}{2\rho \cdot r} \cdot dL \qquad (7)$$

Зваживши на те, що величина L, як видно з рис.6, змінюється від $(r-\rho)$ до $(r+\rho)$, проінтегруємо (7). Цей інтеграл буде означати потенціальну енергію гравітаційної взаємодії частинки з тонким сферичним шаром

$$dU = \int dU' = -\int\limits_{r-\rho}^{r+\rho} \gamma \frac{m \cdot dM}{2\rho \cdot r} \cdot dL =$$
$$= -\gamma \frac{m \cdot dM}{2\rho \cdot r} \cdot (r + \rho - r + \rho) = -\gamma \frac{m \cdot dM}{r} \quad (8)$$

Інтегруючи за всіма тонкими шарами, знайдемо шукану потенціальну енергію гравітаційної взаємодії матеріальної частинки і кулі

$$U = \int dU \quad (9)$$

та масу кулі $\int dM = M$:

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r} \quad . \quad (10)$$

Висновки: а) потенціальна енергія гравітаційної взаємодії матеріальної частинки і кулі така ж сама, як і у випадку, коли б вся маса кулі була б зосереджена у одній точці – центрі кулі;

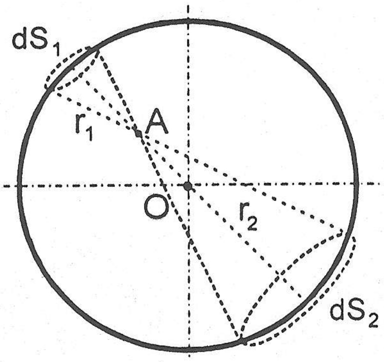
б) сила – це градієнт потенціальної енергії із знаком "-": $F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$. Тому шукана сила, з якою куля діє на частинку,

$$F_r = -\gamma \frac{mM}{r^2} \quad ; \quad (11)$$

в) вираз (11) – закон Ньютона для взаємодії двох точкових мас, тобто, сила, з якою взаємодіють частинка і куля, така ж сама, як і у випадку, коли б вся маса кулі була б зосереджена у одній точці – центрі кулі.

г) розмір кулі не важливий.

НАПРУЖЕНІСТЬ ПОЛЯ ГРАВІТАЦІЇ ВСЕРЕДИНІ ОДНОРІДНОГО СФЕРИЧНОГО ШАРУ



Побудуємо два подібних конуси з малим кутом розвороту та вершинами, що дотикаються в точці A (рис.).

Висоти конусів - r_1 та r_2. Площі основ конусів - dS_1 та dS_2. Тілесні кути розвороту обох конусів рівні: $\Omega_1 = \Omega_2$. Враховуючи визначення тілесного кута, цю рівність можна переписати:

$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dS_1}{dS_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad . \qquad (1)$$

Враховуючи, що товщина сферичного шару - h, а густина матеріалу, з якого складається шар, - ρ, домножимо і поділимо ліву частину (1) на добуток $h \cdot \rho$:

$$\frac{h \cdot \rho \cdot dS_1}{h \cdot \rho \cdot dS_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} .$$

Врахуємо, що $h \cdot \rho \cdot dS_1 = dM_1$ та $h \cdot \rho \cdot dS_2 = dM_2$, де dM_1 та dM_2 - маси відповідних основ конусів. З цього витікає, що $\frac{dM_1}{dM_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \Rightarrow$

$$\frac{dM_1}{dM_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = 1 \qquad (2)$$

Виходячи із визначення сил dF_1 та dF_2 всесвітнього тяжіння, які діють між точковими масами – пробною масою m та масами відповідних основ конусів dM_1 та dM_2, - запишемо:

$$dF_1 : dF_2 = \frac{m \cdot dM_1}{r_1^2} : \frac{m \cdot dM_2}{r_2^2} \equiv \frac{dM_1 \cdot r_2^2}{dM_2 \cdot r_1^2} \qquad (3)$$

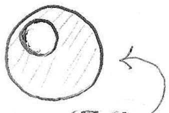
Співставивши (2) та (3), маємо:

$$dF_1 : dF_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad dF_1 = -dF_2 \;. \qquad (4)$$

Із (4) видно, що сила тяжіння dF_1, яка діє між пробною масою m та ділянкою сферичного шару площею dS_1, компенсується силою dF_2, яка діє на пробну масу m з боку ділянки сферичного шару площею dS_2. Розповсюджуючи цей результат на всю поверхню сферичного шару, можна прийти до висновку, що гравітаційної взаємодії між пробною масою m та сферичним шаром не існує. Сила тяжіння, яка діє на пробна масу A всередині однорідного сферичного шару, дорівнює нулю.

Звернемо увагу на такі обставини:

1. Точка A, в якій розташовувалась пробна маса обиралась довільно. Це означає, що напруженість гравітаційного поля всередині симетричного відносно центру однорідного сферичного шару дорівнює нулю в будь-якій точці порожнини.

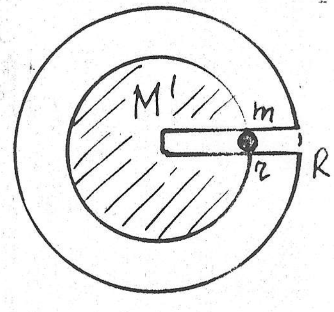


Не виконується

2. Важливим для справедливості отриманого результату є припущення про співпадання центрів кулі та порожнини (їх симетричність відносно центру). Важливим є також однорідність шару та рівномірність його товщини.

3. Розглядаючи напруженість гравітаційного поля всередині однорідного сферичного шару і довівши, що вона дорівнює нулю в будь-якій точці порожнини, ми розглядали лише поле гравітації, яке утворює сферичний шар. Безумовно, це не означає, що всередині сферичного шару немає гравітаційних полів від інших джерел, наприклад, від Землі.

Сила тяжіння вглибині Землі

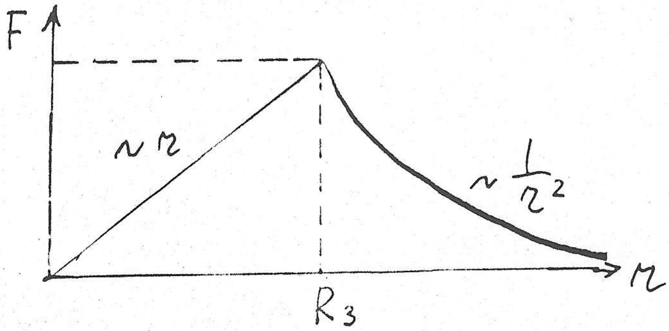


$$F = \gamma \frac{m M_з}{R_з^2}$$ на поверхні

$$F' = \gamma \frac{m M'}{r^2} =$$

$$= \gamma \frac{m}{r^2} \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 =$$

$$= \left(\frac{4}{3}\gamma\rho\pi m\right)\cdot r = const \cdot r$$



На висотах $h \sim 20$ км та $R_з = 6300$ км
$\frac{h}{R_з} \sim 3\cdot 10^{-3}$ $\left(\frac{h}{R_з}\right)^2 \sim 10^{-5}$

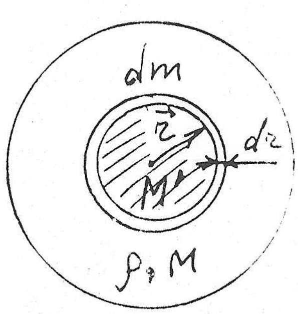
На висоті h над поверхнею Землі

$$F = \gamma \frac{m M_з}{(R_з + h)^2} = \gamma \frac{m M_з}{R_з^2\left(1 + \frac{h}{R_з}\right)^2} \approx \gamma \frac{m M_з}{R_з^2}$$

Гравітаційна енергія

ГЕ – енергія гравітаційної взаємодії частинок, з яких складається тіло.

ГЕ – це робота, яку необхідно виконати, щоб розщепити тіло на елементарні маси і рознести їх на нескінченну віддаль



Елементарна пот. ен. кульового шару. Враховуємо дію лише внутр. частини кулі:

$$dU = -\gamma \frac{dm \cdot M'}{r} = -\gamma \frac{\rho \cdot 4\pi r^2 dr \cdot M'}{r} =$$

$$= -\gamma \frac{\rho \cdot 4\pi r^2 \cdot dr \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{r} =$$

$$= -\frac{16}{3}\pi^2 \rho^2 r^4 dr$$

$$U_{грав} = \int_0^R dU = -\gamma\,\frac{16\pi^2}{3}\rho^2\int_0^R r^4\,dr =$$

$$= -\gamma\,\frac{16}{3}\pi^2\rho^2\,\frac{R^5}{5} \overset{①}{=} -\frac{16}{15}\gamma\pi^2\,\frac{M^2}{\frac{16}{9}\pi^2\cdot R^6} =$$

для кулі

$$\boxed{= -\frac{3}{5}\gamma M^2\cdot\frac{1}{R} = U_{грав}}$$

① $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Гравітаційний радіус

$E_0 = mc^2$

$\gamma\frac{M^2}{R_{гр}} \approx Mc^2$

$R_{гр}$ – гравіт. рад.

$R_{гр} = \gamma\frac{M}{c^2}$.

Для Землі:

$$R_{гр} = \frac{6.7\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}{9\cdot10^{16}} = 4\cdot10^{-3}\ м = 4\ мм$$

Для Сонця $R_{гр} = 1$ км

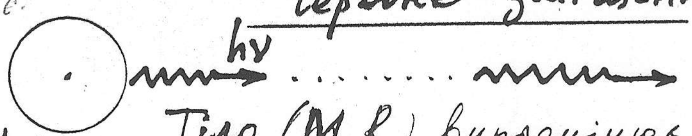
Розмір Всесвіту: Матвеев, с. 216

Чорні дірки: Матвеев, с. 217

не читав!

Червоне зміщення

Матвеев, § 29 ст 145 !!!



M, R Тіло (M, R) випромінює квант світла (фотон)

$$h\nu = mc^2 \Rightarrow m = \frac{h\nu}{c^2}$$

$U = -\gamma\frac{mM}{R}$ – ен. гравіт. взаєм. на поверхні зірки

На відстані ен. фотона $E = h\nu - \gamma\frac{mM}{R} =$

$$= h\nu - \gamma\frac{h\nu M}{Rc^2} = h\nu\left(1 - \gamma\frac{M}{R\cdot c^2}\right) = h\nu'$$

$\nu' < \nu$ або $\lambda' > \lambda$

Світло (фотон), рухаючись у гравіт. полі, змінює (збільшує) свою довжину хвилі (λ)

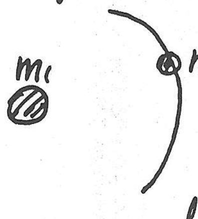
Рух тіл в гравітаційному полі

Задача одного тіла

Матвеєв, с. 229

Припускається, що

$m_1 \gg m_2$

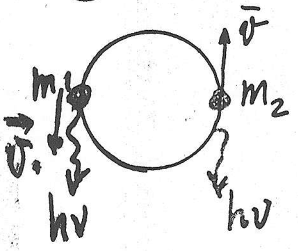


m_1 – джерело сили тяжіння

Аналізується рух тіла m_2

Масивне тіло m_1 вважається нерухомим

Є об'єкти, в яких $m_1 \sim m_2$

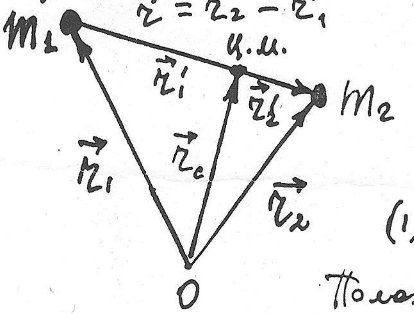


1) Подвійні зірки

2) Рух Місяця по орбіті навколо Землі не завжди можна описати, як рух без впливу Місяця на рух Землі: див. Матвеєв, § 45

Матвеєв, § 46 **Проблема двох тіл!**

$\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$



У ІСВ:

$$(1)\quad \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec r_1}{dt^2} = \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\dfrac{\vec r}{r} \\ m_2 \dfrac{d^2\vec r_2}{dt^2} = -\gamma \dfrac{m_1 m_2}{r^2}\dfrac{\vec r}{r} \end{cases}$$

Положення ц.м. характеризує

$$r_c = (m_1 r_1 + m_2 r_2)\cdot\frac{1}{m_1+m_2}$$

1) Ц.м. рухається рівномірно і прямолінійно

2) Тіла з масами m_1 і m_2 рухаються так, що в Ц-СВ їх сумарний імпульс дорівнює нулю.

Однак розв'язувати задачу зручніше не в Ц-СВ, а в K'-СВ, зв'язаній з одним із тіл. Для цього з (1):

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec r_2 - \vec r_1) = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\gamma\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec r$$

зведена маса $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

$$\boxed{\mu\cdot\frac{d^2 r}{dt^2} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec r}$$

– це рівняння подібне до рівняння в задачі одного тіла