

Основи небесної механіки

1. Закопи Кеплера

1) Не дозволяє врахувати Сонце кривою.

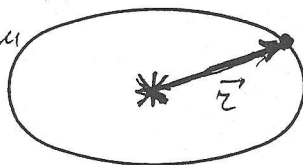
2) Рух планет, який Сонце кривою, який тілом, навколо якого рухаються планети (задачі 1-го тіла)

$$M_{\odot} \gg M_{\text{пл}}$$

$$\frac{M_{\odot}}{M_{\text{Земл}}} \approx 300000$$

2) Відстані від Сонця $\gg$ розміри Сонця і планет

3) З великими ступенем точності можна вважати і Сонце, і планети точковими масами (інтегруваннями точками)



$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F} \parallel \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = [\vec{r} \vec{F}] = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

3) Всі планети рухаються по плоских орбітах

Всі планети рухаються по плоских орбітах



$$4) \text{Повна енергія } E = \frac{L^2}{2mr^2} - \gamma \frac{mM}{r}$$

$$E = -\gamma \frac{m^3 M^2}{2L^2} (1 - \epsilon^2); \quad \epsilon^2 = \left(1 + \frac{2EL^2}{\gamma^2 m^2 M^2}\right)$$

$E \geq 0 \Rightarrow \epsilon \geq 1$ - незамкнена траєкторія;

$E < 0 \Rightarrow \epsilon < 1$ - рух обмежений у просторі (фіктивний) рух

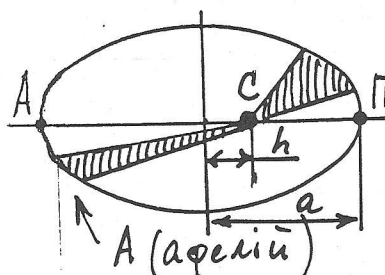
$$\text{Ексцентриситет} - \epsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{\gamma^2 m^2 M^2}\right)^{1/2}$$

Кеплер Йоганн (1571-1630 р.р.)

3.

I. Кожна планета рухається навколо Сонця по еліпсу, в одному з фокусів якого міститься С.

II. Радіус-вектор, проведений від Сонця до планети, описує за однакові проміжки часу однакові площі.



Швидкість планети біля П. най-
більша, а біля А. -
найменша

III. Квадрати періодів обертання будь-якої пари планет навколо Сонця відносяться як куби великих напівосей їхніх еліптичних орбіт

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

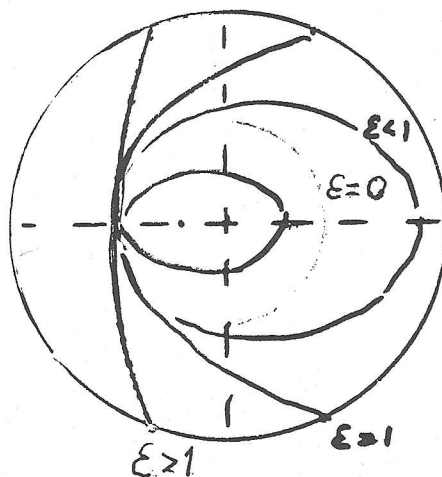
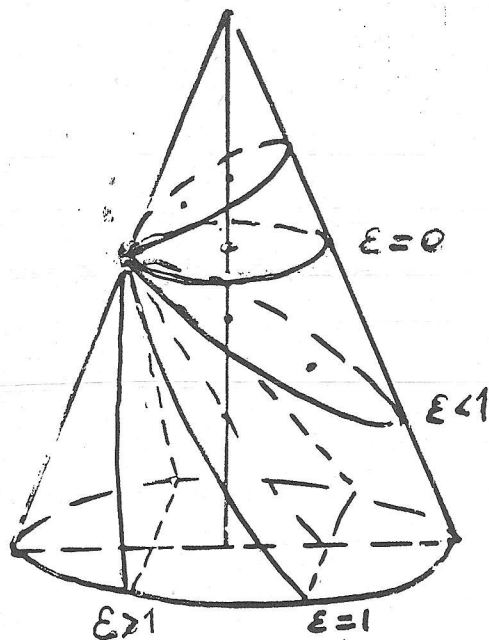
Зауваження:

1. У зв'язі з тим, що $M_c \gg M_{пл}$, випливає, що можна вважати Сонце нерухомим тілом, навколо якого рухаються планети $\Rightarrow$ Задача 1-го тіла!

2. Умова: відстань від Сонця $\gg$ розмір Сонця.

Це означає, що з великим ступенем точності можна вважати, що і Сонце, і планети - точкові маси (матеріальні точки - МТ).

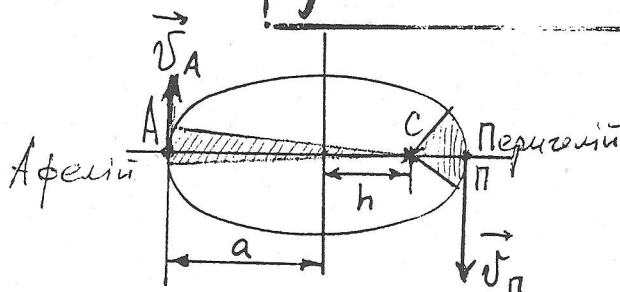
Матвеев, стр. 217-221



$\epsilon = 0$: коло
 $\epsilon < 1$: еліпс
 $\epsilon = 1$: парабола
 $\epsilon > 1$: гіпербола

Рівняння кривої, по якій рухається тіло (планета), в полярних координатах

$$\frac{1}{r} = z = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$



$p = \frac{L^2}{\gamma m^2 M}$ - параметр орбіти

$\epsilon = \frac{h}{a}$ - ексцентриситет

$\epsilon < 0.1$

Венера : $\epsilon = 0.006$

Нептун : $\epsilon = 0.008$

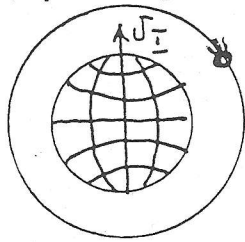
Земля : $\epsilon = 0.016$

$|\vec{v}_P| > |\vec{v}_A|$

Орбіти планет в Сонячній системі - майже колові

Космічні швидкості

Перша косм. шв. - шв., яку необхідно надати тілу, щоб воно стало супутником Землі



$$F_{\text{бц}} = \frac{m v_I^2}{r} = \gamma \frac{m M_3}{r^2} = F_{\text{зр.}}$$

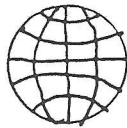
$$\underline{F_{\text{бц}} = F_{\text{зр.}}}$$

$$\boxed{v_I = \sqrt{\gamma \frac{M_3}{R_3}}}$$

$$v_I = 7,9 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

$$v_I = \sqrt{g R_3}$$

Друга космічна швидкість



$$v_{II} \rightarrow \dots \rightarrow \infty$$

$$\underline{E_k = E_{\text{зр.3.}}}$$

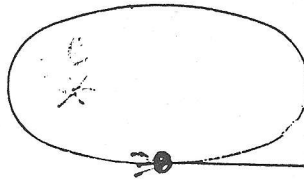
$$\frac{m v_{II}^2}{2} = \gamma \frac{m M_3}{r};$$

$$\boxed{v_{II} = \sqrt{2\gamma \frac{M_3}{R_3}}}$$

$$v_{II} = v_I \cdot \sqrt{2} = 11,2 \text{ км/с}$$

Третя космічна швидкість

$$\frac{m v_{III}^2}{2} = \gamma \frac{m M_c}{R_{\text{орб}}}$$



$$\underline{E_k = E_{\text{зр.с.}}}$$

$$v_{III} = \sqrt{2\gamma \frac{M_c}{R_{\text{орб}}}}$$

$$v_{III} = 42 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$