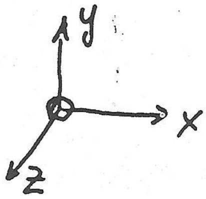
Рух твердого тіла. (Механіка тв. тіла).

Матвєєв, Гл. 8 (§ 31-35); Сивухин Гл. VII; Савельев Гл. V

Ступені вільності системи тіл

N - кількість тіл

1)



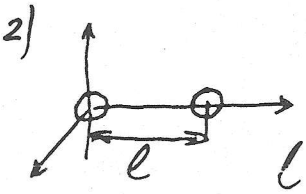
$N = 1$

$i = 3$ (ступінь вільності)

1) x, y, z

2) v_x, v_y, v_z

2)



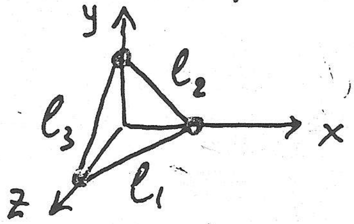
$N = 2$

$i = 5$

$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \cancel{z_2}$

3)



$\boxed{i = 3N - S}$! S - кільк. зв'язків

$i = 3 \cdot 3 - 3 = 6$

1) $x_1, y_1, \cancel{z_1}, x_2, y_2, \cancel{z_2}, x_3, y_3, \cancel{z_3}$ (6)

М.б. 2) $v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ (6)

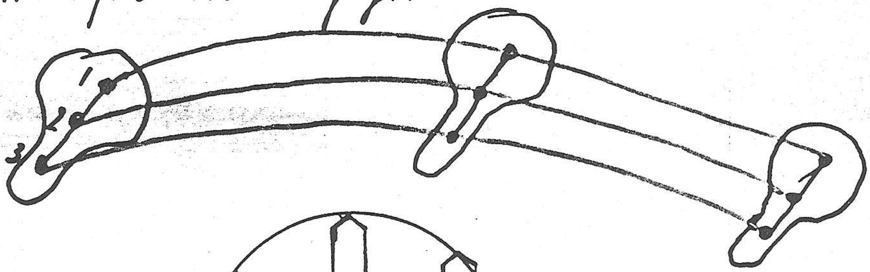
Ступінь вільності системи тіл - кількість незалежних параметрів, що однозначно визначають (характеризують) стан і положення тв. тіла.

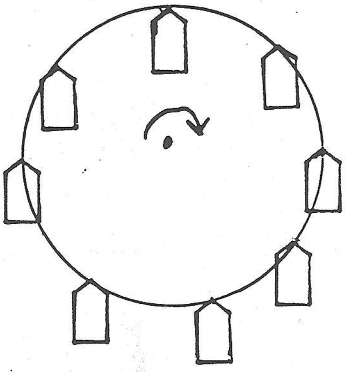
Параметрами м.б. різні фізичні величини (коорд., швидкість, кути тощо).

Абсолютно тверде тіло - в механіці недеформоване тверде тіло в СМТ відстані між точками постійні

Типи рухів твердого тіла

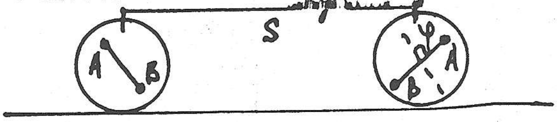
1. Поступальний рух





2. Обертальний рух

3. Змішаний: поступально-обертальний



4. Плоский рух — рух тв. тіла, при якому будь-яка точка тіла в процесі руху залишається в одній з паралельних площин.

Поступальний
• в такому швидкості і прискорення однакові.

• Будь-яка лінія тіла проведена в тілі паралельна самій собі.

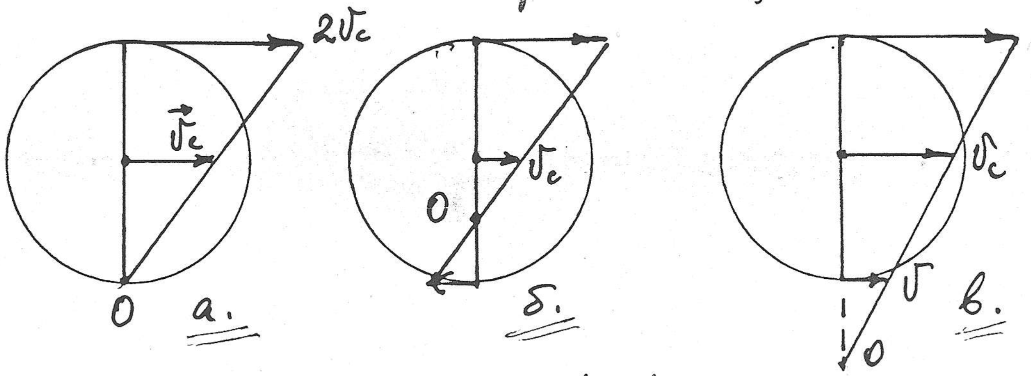
• Всі точки тіла описують однакові траєкторії.

Поступальний рух матеріальної точки немає сенсу.

Обертальний рух - будь-яка точка тіла крім тих, що на осі описує коло.

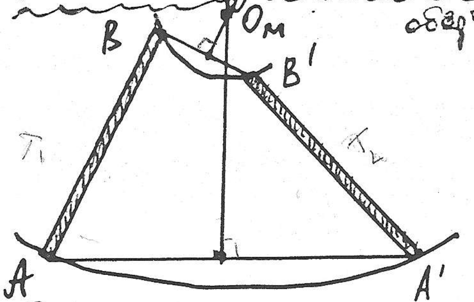
Найчастіше змішаний рух.

Миттєва вісь обертання (МВО)



МВО – та вісь для якої поступальна швидк. дорівнює нулю.

Плоске переміщення тв. тіла можна представити як обертання навколо осі $O_м$. Спосіб знаходження $O_м$:



Ділимо навпіл і проводимо перпендикуляри до т. перетину – $O_м$

Спосіб знаходження МВО, рухом навколо якої плоске переміщення тв. тіла подається у вигляді чистого обертання.

Властивості МВО:

1. Із часом МВО змінюється (вісь – миттєва!)
2. МВО – уявна вісь, яка не має свого матеріального носія.
3. Точки, які лежать на МВО мат. тіла, перебувають у стані спокою і рух тіла зводиться у даний момент часу до „чистого" обертання навколо цієї осі.

Кінематика обертального руху – див. лекцію 2.

$\vec v = [\vec\omega \cdot \vec R]$; $\vec v = \frac{d\vec r}{dt}$; $\vec\omega = \frac{d\vec\varphi}{dt}$;

$\vec a_\tau = \vec\tau \cdot \frac{dv}{dt} = R \cdot \dot{\vec\omega}$; $\vec a_n = \vec n\, v^2/R$; $\vec a = \vec a_\tau + \vec a_n$.

Статика твердого тіла

Умови рівноваги

1) $\sum \vec{M}_{i\,зовн.} = 0$ 2) $\sum \vec{F}_{i\,зовн} = 0$

Динаміка твердого тіла

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$ рівняння моментів $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \vec{L}^c = \sum \vec{L}_i$$

Обертання навколо ц.м. $\vec{L}^c$ – власний мом. імп.

$$\vec{L}^c = [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r} \cdot m\vec{v}] =$$

$$= m[\vec{r}[\vec{\omega} \times \vec{r}]] = m\{\vec{\omega}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}\underbrace{(\vec{r}\vec{\omega})}_{0}\}$$

$$= m(r^2\vec{\omega}) \Rightarrow \boxed{J = \sum m_i r_i^2}$$

$$\boxed{\vec{L}^c = J \cdot \vec{\omega}}$$

$[\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

$\vec{\omega}$, $\vec{r}$

J – момент інерції тіла відносно центра мас.

Основне рівняння динаміки обертального руху тв. тіла

II Закон Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \;\Big|\, * \vec{l} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (1)$$

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

Сила, що діє на тв. тіло задається:
- величиною; – напрямом;
- точкою прикладання.

центр мас = центр інерції

$$d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt = \vec{F} \cdot \vec{r}\, dt = (\vec{F} \cdot dt)\, \vec{r} =$$

$$= d(m\vec{v}) \cdot \vec{r} = d(m\vec{\omega}\vec{r})\,\vec{r} = d(mr^2\vec{\omega}) =$$

$$= d(J \cdot \vec{\omega}) \Rightarrow \boxed{\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}} \quad (2)$$

$$(2) \to (1): \; \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(J \cdot \vec{\omega}) =$$

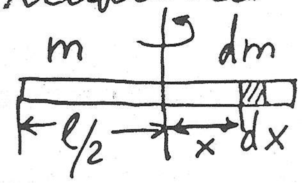
$$= J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J \cdot \vec{\beta}$$

$$(3) \quad \boxed{\vec{M} = J \cdot \vec{\beta}}$$ Основне рівняння обертального руху твердого тіла

Через те, що $\beta \sim \frac{1}{J}$, можна стверджувати, що момент інерції тіла відносно осі є мірою інертності тіла при його обертанні навколо…

Приклади вирахування моментів інерції

1. Стержень I



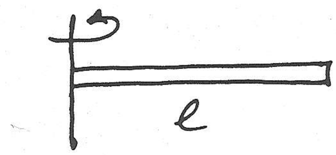
$$dJ = dm \cdot x^2$$

$$dm = \rho \cdot dv = \frac{m}{v} \cdot dv = \frac{m}{l \cdot \cancel{S}} dx \cdot \cancel{S} =$$

$$= m\frac{dx}{l}; \quad dJ = \frac{m}{l} \cdot x^2 dx \quad (1)$$

$$J = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{3l} x^3 \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m}{3l} \cdot 2\frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} ml^2$$

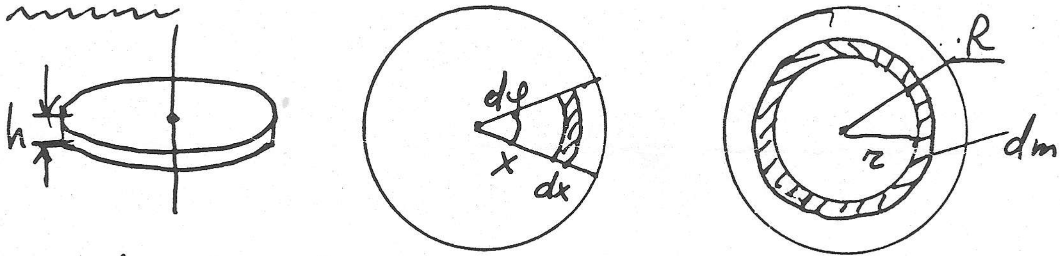
2. Стержень II



$$3(1): \; J = \frac{m}{l}\int_0^l x^2 dx = \frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_0^l =$$

$$= \frac{1}{3} ml^2$$

3. Диск



$$dJ = dm \cdot r^2 \qquad \frac{dm}{m} = \frac{S_1 \cdot h \cdot \cancel{\rho}}{S_2 \cdot h \cdot \cancel{\rho}} = \frac{2\pi r \cdot dr}{\pi R^2}$$

$$dm = \frac{2r \cdot dr}{R^2} \cdot m \Rightarrow dJ = \frac{2r^3}{R^2} \cdot m\, dr$$

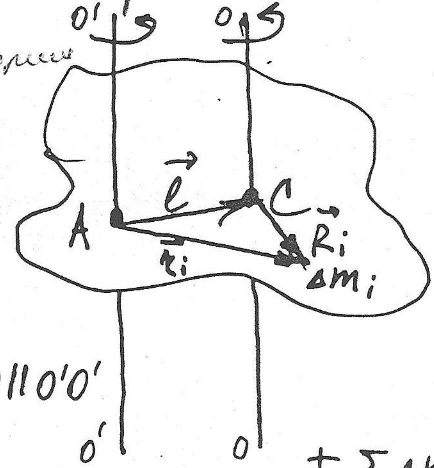
$$J = \int_0^R \frac{2r\,dr}{R^2} m \cdot r^2 = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} mR^2$$

Теорема Гюйгенса – Штейнера

Дано
тіло довільної форми
маси m
момент інерції цього тіла відносно осі OO через центр мас J_0
Знайти момент інерції відносно будь-якої осі паралельно OO

$OO \parallel O'O'$



$$\Delta J_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 = \Delta m_i (\vec{R}_i + \vec{l})^2;$$

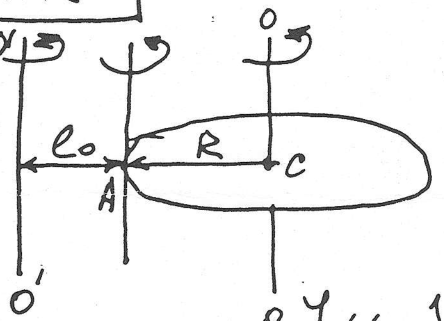
$$J_A = \sum \Delta J_i = \sum \Delta m_i R_i^2 + \sum \Delta m_i \cdot 2(\vec{R}_i \cdot \vec{l}) + \sum \Delta m_i \cdot l^2 = J_0 + \sum \Delta m_i 2(\vec{R}_i \cdot \vec{l}) + ml^2$$

$$2\sum \Delta m_i (\vec{R}_i \cdot \vec{l}) = \frac{2\sum(\Delta m_i R_i l \cos\alpha) \cdot \sum \Delta m_i}{\sum \Delta m_i}, \quad \frac{\sum \Delta m_i R_i}{\sum \Delta m_i} = R_c$$

Якщо ось обертання проходить через ц.м., то $R_i = R_c = 0$. Тоді

$$\boxed{J_A = J_0 + ml^2}$$

Приклад:



$$J_c = \frac{1}{2} mR^2$$

$$J_A = J_c + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

$$J_{OO'} = \frac{1}{2} mR^2 + m(R + l_0)^2$$

Тензор інерції

Матвєєв, с. 158-159, 162
Сивухин, с. 320
Савельев, с. 144-150

(1) $\vec{L} = J\cdot\vec{\omega}$, або

$L_x = J\cdot\omega_x$; $L_y = J\cdot\omega_y$; $L_z = J\cdot\omega_z$

Для однорідного, сим. тв. тіла $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

У загальному випадку $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$. Але $|\vec{L}| \sim |\vec{\omega}|$

Якщо $|\vec{L}_i| \sim |\vec{\omega}_i|$, то тоді і модулі суми цих векторів теж пропорційні:

$$\begin{cases} L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\cdot\omega_z \\ L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\cdot\omega_z \\ L_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z \end{cases} \qquad (2)$$

1) Якщо $J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} \neq 0$, а інші коеф. $= 0$, то $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

2) Якщо $\vec{\omega} \parallel Oz$, а коеф. $J_{xz}, J_{yz}, J_{zz} \neq 0$, то $L_z = J_{zz}\cdot\omega_z \neq 0$
$L_x = J_{xz}\cdot\omega_z \neq 0$; $L_y = J_{yz}\cdot\omega_z \neq 0$; $\omega_z = \omega$; $\omega_x = \omega_y = 0$.

Всі три компоненти $\vec{L}$ відмінні від нуля $\Rightarrow$ $\underline{\vec{L} \nparallel \vec{\omega}}$

Для будь-яких векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, для яких $|\vec{a}| \sim |\vec{b}|$:

$$\begin{cases} b_x = T_{xx}\cdot a_x + T_{xy}\cdot a_y + T_{xz}\cdot a_z \\ b_y = T_{yx}\cdot a_x + T_{yy}\cdot a_y + T_{yz}\cdot a_z \\ b_z = T_{zx}\cdot a_x + T_{zy}\cdot a_y + T_{zz}\cdot a_z \end{cases} \quad (3) \quad \Rightarrow \quad b_i = \sum_{k=x,y,z} T_{ik}\, a_k \; (i = x,y,z)$$

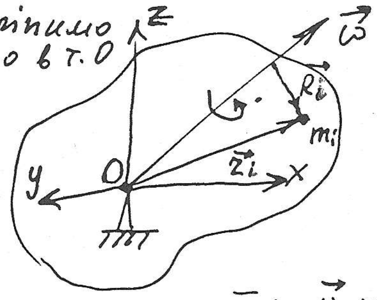
тензор II рангу $\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$

T_{ik} – компонента тензора
T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} – діагональні комп

Сукупність 9-ти величин T_{ik} наз. тензором II рангу

Операцію (3) наз. множенням вектора $\vec{a}$ на тензор $\overleftrightarrow{T}$, в рез-ті чого отримуємо новий вектор $\vec{b}$ ≡ При повороті осей СК (при переході від однієї декартової СК до іншої) теж використовується тензор II рангу – див. § 6 Матвєєв, розділ „Перетворення декартових координат".

Закріпимо тіло в т. O



Знайдемо компоненти тензора інерції:

$\vec{r}_i = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}\cdot z$

$\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z$

$\left[\vec{A}\left[\vec{B}\times\vec{C}\right]\right] = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B})$

$\Delta\vec{L}_i = [\vec{r}_i \cdot m_i\vec{v}_i] = m_i[\vec{r}_i[\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i]] \stackrel{\downarrow}{=}$

$= m_i\vec{\omega}\cdot r_i^2 - m_i\vec{r}_i(\vec{r}_i\vec{\omega})$ $\quad (\vec{L} = J\cdot\vec{\omega})$

$$L = \Sigma\Delta L_i = \Sigma m_i(\vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\cdot\omega_z)(x^2+y^2+z^2) -$$

$$-\Sigma m_i(\vec{i}x + \vec{j}\cdot y + \vec{k}z)(x\cdot\omega_x + y\omega_y + z\cdot\omega_z) =$$

$$= \vec{i}\,\Sigma m_i\{(\cancel{x^2}+y^2+z^2\cancel{-x^2})\cdot\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z)\} +$$

$$+\vec{j}\,\Sigma m_i\{(-yx\omega_x + (x^2\cancel{+y^2}+z^2\cancel{-y^2})\omega_y - yz\omega_z)\} +$$

$$+\vec{k}\,\Sigma m_i\{-zx\omega_x - zy\cdot\omega_y + (x^2+y^2\cancel{+z^2}\cancel{-z^2})\omega_z\}$$

Таким чином: $L_x = \Sigma m_i(y^2+z^2)\omega_x + \Sigma m_i(-xy)\omega_y + \Sigma m_i(-xz)\omega_z =$

$= J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\cdot\omega_z$, Або:

$$\boxed{\begin{aligned} J_{xx} &= \sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)\\ J_{yy} &= \sum_i m_i(x_i^2+z_i^2)\\ J_{zz} &= \sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\end{aligned}} \quad \text{(A)} \quad \boxed{\begin{aligned} J_{xy} &= -\Sigma m_i x_i y_i\\ J_{xz} &= -\Sigma m_i\cdot x_i z_i\\ J_{yz} &= -\Sigma m_i\cdot y_i z_i\end{aligned}}$$

J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} – осьові (діагональні) мом. ін.

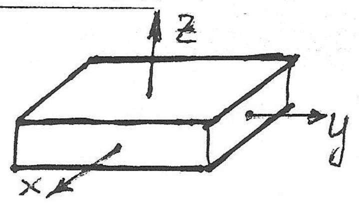
$$\begin{pmatrix} L_x\\ L_y\\ L_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz}\\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz}\\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

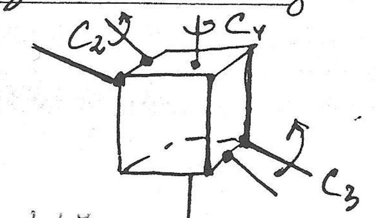
$J_{xy} = J_{yx}$; $J_{xz} = J_{zx}$

$J_{zy} = J_{yz}$ – відцентрові мом. ін.

Тензор приймає діагональний вид тоді, коли осі СК, що обрана, збігаються з осями симетрії тіла.

$$\begin{pmatrix} J_x & 0 & 0\\ 0 & J_y & 0\\ 0 & 0 & J_z\end{pmatrix}$$





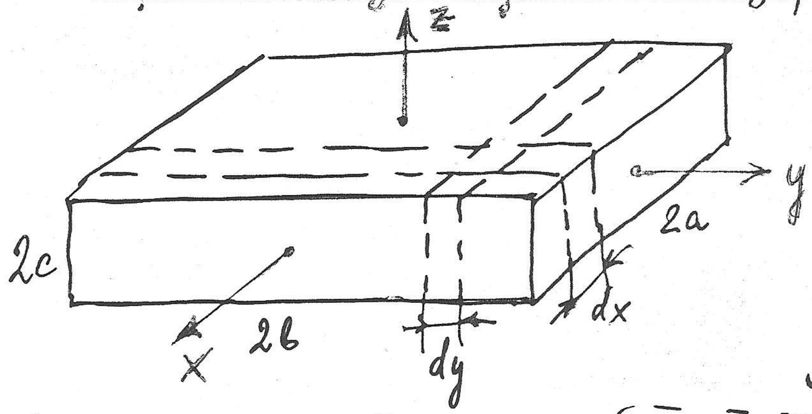
1, 3, 4 – порядки
скільки разів однакове положення

Для тіла будь-якої форми і з довільним розподілом маси існують три взаємно перпендикулярні осі, які проходять через ц. м. тіла, які є вільними осями. Ці осі – головні осі інерції тіла.

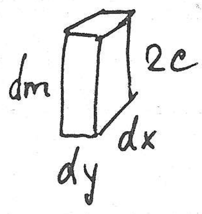
Вісь, положення якої в просторі залишається незмінним при обертанні навколо неї тіла і у відсутності зовнішніх сил, називають

Момент інерції паралелепіпеду.

Практичне застосування тензора момента інерції



Стовпчик



Початок СК співпадає з ц.м.

$$\rho = \frac{m}{2a\cdot 2b\cdot 2c}$$

1) $dJ_{zz\,ст} = dm_{ст}(x^2+y^2) = \rho\cdot\underbrace{2c\cdot dy\cdot dx}_{\text{об'єм ст.}}(x^2+y^2)$

2) $dJ_{zz\,пласт.} = \int_{-a}^{a}\rho\cdot 2c\cdot dx\cdot dy\,(x^2+y^2) = 2\rho c\,dy\int_{-a}^{a}(x^2+y^2)\,dx =$

$= 2\rho c\,dy\left(2ay^2+\frac{2a^3}{3}\right) = 2a\cdot 2c\,\rho\left(y^2+\frac{1}{3}a^2\right)dy$

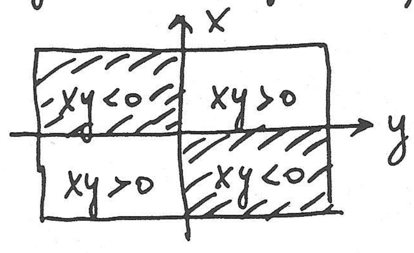
3) Для всього тіла $J_{zz} = \int_{-b}^{+b} 2a\cdot 2c\,\rho\left(y^2+\frac{1}{3}a^2\right)dy =$

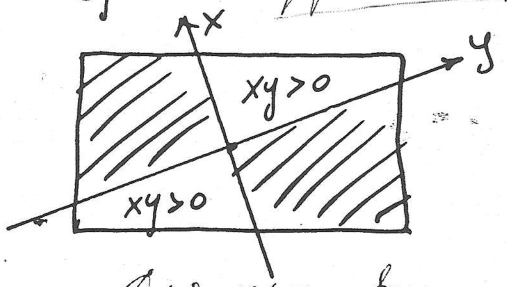
$= 2a\cdot 2c\cdot\rho\left(\frac{2b^3}{3}+\frac{2a^2 b}{3}\right) = \frac{2a\cdot 2c\cdot 2b}{3}\cdot\rho\left(b^2+a^2\right) = \boxed{\frac{m}{3}\left(b^2+a^2\right)}$

$dJ_{xy\,ст} = -\rho\cdot 2c\cdot dx\cdot dy\cdot xy$

$dJ_{xy\,пл} = -2c\cdot\rho\,y\,dy\int_{-a}^{a}x\,dx = 0$!! $\Rightarrow$ $\boxed{J_{xy}=0}$

$J_{xy} = J_{xz} = J_{yx} = J_{yz} = J_{zx} = J_{zy} = 0$ Відцентрові моменти ін. дорівнюють нулю!





Для цього випадку $J_{xy}\neq 0$;

$$J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

для випадку, коли осями СК обрані головні осі інерції тіла (ті, що збігаються з осями симетрії тіла)

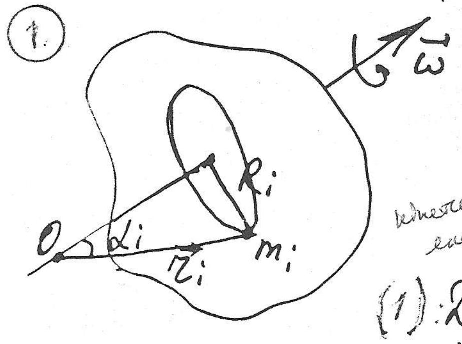
Величини J_x, J_y, J_z назив. головними моментами інерції тіла. Головні осі інерції взаємно перпендикулярні і перетинаються в центрі мас тіла.

Величини J_{xx} та J_{yy} знаходимо шляхом, аналогічним тому, яким знайшли J_{zz}:

$J_{xx} = \frac{1}{3}m\left(b^2+c^2\right)$; $J_{yy} = \frac{1}{3}m\left(a^2+c^2\right)$.

Кінетична енергія при обертанні тверд. тіла

(1.)



$$T_i=\frac{1}{2}m_i v_i^2=\frac{1}{2}m_i[\vec\omega\,\vec r_i]^2=$$
$$=\frac{1}{2}m_i\omega^2R_i^2 \qquad (R_i=r_i\sin\alpha)$$

кінетична енергія $T=\sum_i T_i=\frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_iR_i^2=\boxed{\frac{\overset{\text{скаляр}}{J}\cdot\omega^2}{2}=T}$ (1)

(1): Для випадку обертання тіла навколо нерухомої осі

(2.) Випадок обертання тіла навколо нерухомої точки, яка співпадає з ц. м. Оберемо СК з початком коорд. у т. – ц. м.

$$\vec v_i=[\vec\omega\,\vec r_i]\ ; \quad T=\frac{1}{2}\sum m_iv_i^2=\frac{1}{2}\sum m_i[\vec\omega\,\vec r_i]^2=$$
$$=\frac{1}{2}\sum m_i\omega^2r_i^2\sin^2\alpha_i=\frac{1}{2}\sum m_i\{\omega^2r_i^2-(\vec\omega\cdot\vec r_i)^2\}=$$

$\uparrow$ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

$$=\frac{1}{2}\sum m_i\{(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-(\omega_xx_i+\omega_yy_i+\omega_z\cdot z_i)(\omega_x\cdot x_i+\omega_yy_i+\omega_zz_i)=\frac{1}{2}\{\sum m_i[\omega_x^2(y^2+z^2)+$$
$$+\omega_y^2\sum m_i(x_i^2+z_i^2)+\omega_z^2\sum m_i(x_i^2+y_i^2)-\omega_x\omega_y\sum m_ix_iy_i-$$
$$-\omega_x\omega_z\sum m_ix_iz_i-\omega_y\omega_x\sum m_iy_ix_i-\omega_y\omega_z\sum m_iy_iz_i-$$
$$-\omega_z\omega_x\sum m_iz_ix_i-\omega_z\omega_y\sum m_iz_iy_i\}=$$

(A) $$=\frac{1}{2}\{J_{xx}\omega_x^2+J_{xy}\omega_x\omega_y+J_{xz}\omega_x\omega_z+J_{yx}\omega_y\omega_x+J_{yy}\omega_y^2+J_{yz}\omega_y\omega_z+J_{zx}\omega_z\omega_x+J_{zy}\omega_z\omega_y+J_{zz}\omega_z^2\}$$

$$\boxed{T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=x,y,z}J_{ik}\cdot\omega_i\omega_k}$$ Кін. ен. тіла, закріпленого у точці (2)

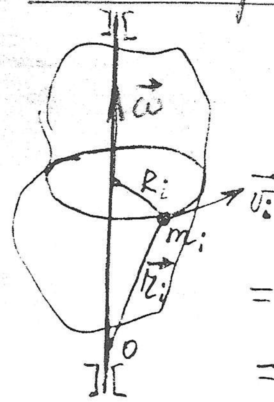
Якщо осі СК вибрані так, що вони співпали з головними осями інерції тіла, то $\boxed{T=\frac{1}{2}\{J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2\}}$ (3)

Якщо закріпити вісь обертання ($\omega_z\neq 0,\ \omega_y=\omega_x=0$), то (3) → (1).

Головні осі інерції — сист. к. XYZ при яких відцентрові складові тензора рівні нулю

Або тензор діагоналізується.

Робота при обертанні твердого тіла



$$dA = (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i) = (\vec{F}_i \vec{v}_i\, dt) = (\vec{F}_i [\vec{\omega} \vec{r}_i])\, dt = (\vec{\omega} [\vec{r}_i \vec{F}_i])\, dt = (\vec{\omega} \vec{M}_i)\, dt = M_i \omega \cos\alpha \cdot dt$$

$$A = \Sigma M_i \omega \cos\alpha \cdot dt = \Sigma M_i \cdot d\varphi =$$

$$\boxed{A = M \cdot \varphi}$$

$\alpha = \widehat{\vec{\omega}\, \vec{M}_i}$

$\vec{F}_i \parallel \vec{v}_i$

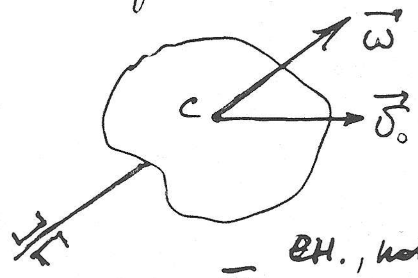
$\vec{M}_i \parallel \vec{\omega}$

$\cos\alpha = 1$

$\omega \cdot dt = d\varphi$

Кінетична енергія твердого тіла при плоскому змішаному русі

Накладено 2 рухи: поступальний із шв. $\vec{v}_0$ та обертальний навколо осі із шв. $\vec{\omega}$



$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}\,]$$

$$T = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} =$$

= ен., пов'язана з рухом ц.м + ен. обертання в Ц-СВ

J_c – мом. інерції тіла відносно осі обертання, яка проходить через ц.м.

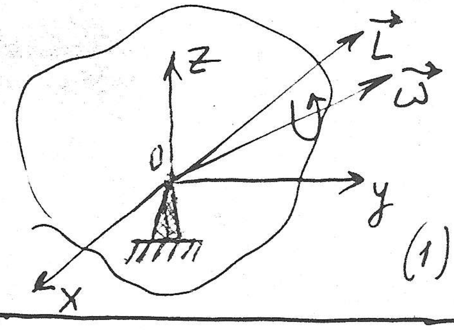
v_c – шв. ц.м. тіла в К-СВ

v_c – шв. руху центра мас;

Порівняльна таблиця поступального і обертального рухів

Характер.	Поступальний	Обертальний
	$\boxed{\vec{r}}$	$\boxed{\vec{\varphi}}$
Швидкість	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
	$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$	
Прискорен.	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
	$\vec{a} = [\vec{\beta}\, \vec{r}]$	
Дія	$\vec{F}$	$\vec{M} = [\vec{r}\, \vec{F}]$
Інерція	m	$J = \Sigma m_i r_i^2$
Кількість руху (імп.)	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$
	$\vec{L} = [\vec{r}\, \vec{p}]$	
Основне рівн. руху	$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \\ m\vec{a} = \vec{F} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \\ J \cdot \vec{\beta} = \vec{M} \end{cases}$
Робота	$A = \int (\vec{F}\, d\vec{r})$	$A = \int (\vec{M}\, d\vec{\varphi})$
Кінет. ен.	$T = \frac{mv^2}{2}$	$T = \frac{J\omega^2}{2}$

Динамічні рівняння Ейлера



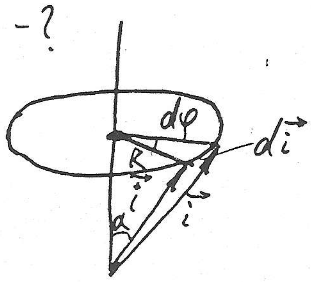
Обираємо рухому СК, яка жорстко зв'язана з тв. тілом, що обертається !

К'-СВ !

$\vec L = \vec i L_x + \vec j L_y + \vec k L_z$

(1) $\vec M = \frac{d\vec L}{dt} = \vec i \frac{dL_x}{dt} + \frac{d\vec i}{dt} L_x + \vec j \frac{dL_y}{dt} + \frac{d\vec j}{dt} L_y + \vec k \frac{dL_z}{dt} + \frac{d\vec k}{dt} L_z$

$\frac{d\vec i}{dt}$ - ?



$di = R \cdot d\varphi = R \cdot \omega \cdot dt = i \sin\alpha \cdot \omega \, dt$

$R = i \sin\alpha$

$\frac{di}{dt} = i \sin\alpha \cdot \omega \Rightarrow [\vec\omega \cdot \vec i] = \frac{d\vec i}{dt}$ (2)

$L_x = J_x \omega_x ; \quad L_y = J_y \omega_y ; \quad L_z = J_z \omega_z$ (3)

(2), (3) $\to$ (1) : $\vec M = \vec i \frac{d}{dt}(J_x \omega_x) + [\vec\omega \cdot \vec i] L_x + \vec j \frac{d}{dt}(J_y \omega_y) + [\vec\omega \cdot \vec j] L_y + \vec k \frac{d}{dt}(J_z \cdot \omega_z) + [\vec\omega \cdot \vec k] L_z$

$\vec\omega_x \parallel \vec i ; \; \vec\omega_y \parallel \vec j ; \; \vec\omega_z \parallel \vec k \Rightarrow [\vec\omega_x \cdot \vec i] = 0; \; [\vec\omega_y \cdot \vec j] = 0; \ldots$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\,\omega_y \omega_z \\ M_y &= J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\,\omega_z \cdot \omega_x \\ M_z &= J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\,\omega_x \cdot \omega_y \end{aligned}\right\}$$

Динамічні рівняння Ейлера описують рух тіла, закріпленого в точці, в системі координат, яка жорстко зв'язана з тілом і початок якої збігається з точкою, в якій тіло закріплене

Аналіз динам. рівнянь Ейлера

1. За початок СК виберемо ц.м.
2. На тіло не діють ніякі зовн. сили
   $M_x = M_y = M_z = 0$ (вільне обертання).
3. Осі СК напрямимо вздовж*
   центральних головних осей
4. Припустимо, що $\omega_x = const \neq 0$
   $\omega_y = const \neq 0$; $\omega_z = const \neq 0$
5. Тоді:

$$\frac{d\omega_x}{dt} = 0 \qquad \frac{d\omega_y}{dt} = 0 \qquad \frac{d\omega_z}{dt} = 0$$

$$\begin{cases} (J_z - J_y)\,\omega_y \omega_z = 0 \\ (J_x - J_z)\,\omega_z \omega_x = 0 \\ (J_y - J_x)\,\omega_x \omega_y = 0 \end{cases}$$

Одночасно ці співвідношення задовольняються лише в тому випадку, коли:

1). $\omega_x \neq 0 \quad \omega_y = \omega_z = 0$ або:
2). $\omega_y \neq 0 \quad \omega_x = \omega_z = 0$ або:
3). $\omega_z \neq 0 \quad \omega_x = \omega_y = 0$

Це означає, що $\vec{\omega}$ збігається за напрямом з однією із центральних головних осей (ЦГО)

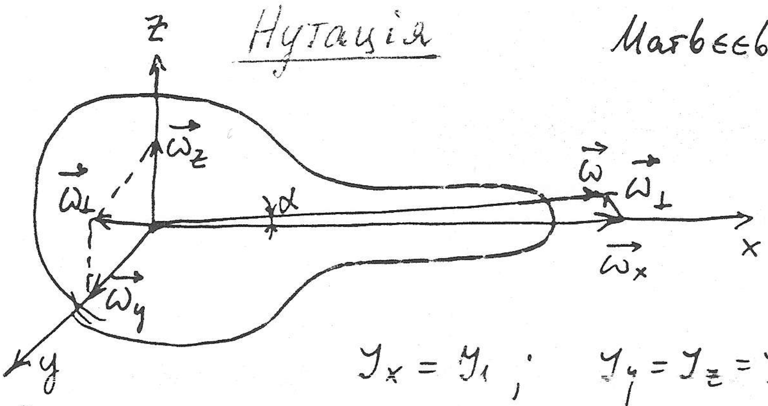
Висновки: 1. Вільне обертання тв. тіла можливе лише навколо ЦГО.
2. Стійке вільне обертання можливе лише відносно ЦГО з max або min моментом інерції. Обертання навколо ЦГО з середнім мом. інерції не є стійким

центральні головні осі – три напрямки вздовж яких тіло обертається вільно.

в ст. вільна ось обертання
ось вільного обертання

Нутація

Матвеєв, с.173



$I_x = I_1; \quad I_y = I_z = I_2$

Рівняння Ейл.

$$(1)\quad \begin{cases} I_2 \dfrac{d\omega_y}{dt} + (I_1 - I_2)\,\omega_z \omega_x = 0 \\ I_2 \dfrac{d\omega_z}{dt} + (I_2 - I_1)\,\omega_x \omega_y = 0 \end{cases} \qquad I_1 \cdot \frac{d\omega_x}{dt} = 0$$

З (1): Можливий рух у 2-х випадках:

1) $\omega_x = \omega_1 = const, \quad \omega_y = \omega_z = 0$ – обертання навколо осі симетрії тіла із сталою швидкістю

2) $\omega_x = \omega_1 = const \neq 0$

$$(2)\quad \frac{d\omega_y}{dt} + \gamma\omega_z = 0; \qquad \frac{d\omega_z}{dt} - \gamma\omega_y = 0$$

де $\gamma = (I_1 - I_2)\dfrac{\omega_1}{I_2}$

Розвязок (2): $\omega_y = A \cdot \cos\gamma t; \quad \omega_z = A \cdot \sin\gamma t$

$\vec{\omega}_\perp = \vec{j} \cdot \omega_y + \vec{k}\,\omega_z$ Вектор $\vec{\omega}_\perp$ обертається у пл. yz із частотою γ

Повна кут. шв.:

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_\perp \qquad tg\,\alpha = \dfrac{\omega_\perp}{\omega_1}$

Рух по конусу вектора $\vec{\omega}$

Нутація – рух осі сим. тіла по конічній поверхні навколо нерухомого у просторі $\vec{L}$

γ – шв. нутації

У кулі $I_x = I_y = I_z$ і тому $\gamma = 0$: нутація неможл.

Якщо куля неоднорідна, то нутація можлива.

Спостерігається нутація осі обертання Землі (див. Матвеєв, с. 174).