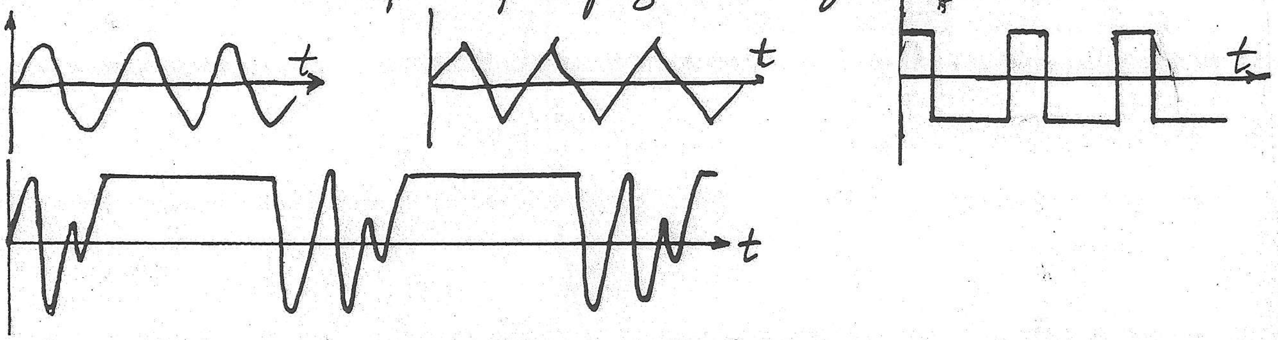
# Коливання.

Матвеєв, Гл. 13
Сивухин, Гл. 6

1. Коливання – процес, що повторюється через певні проміжки часу
2. Змінюватись може будь-яка фіз. величина:
   – коорд. мех. маятника; – коливання атомів в кристалічній гратці; – заряд конденсатора тощо
3. Коливання можуть бути різними за формою:




4. За характером коливання бувають:
   – вільні; – затухаючі; – вимушені; – параметричні;
   – автоколивання
5. Будь-якої форми коливання описуються одним и тим же матем. апаратом:
   – $f = ma$
   – силу можна розкласти в ряд Тейлора: (1)

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots} \quad (1)$$

– Якщо $x = 0$ – т. стійкої рівноваги, то $f(0) = 0$
– Можливі 2 випадки: $f'(0) \neq 0$ або $f'(0) = 0$

а) $f'(0) \neq 0$.
Член $x \cdot f'(0)$ в (1) є головним членом розкладу (1).
При малих коливаннях $f(x) \approx x \cdot f'(0)$
Сила $\vec{f}(x)$ (повертаюча сила) повинна бути направлена до $x = 0$ (т. стійкої рівноваги): $f(x) = x \cdot f'(0) <$
Це означає, що $f'(0) < 0$. (відхилення $x$ та сила $f$ мають різні знаки)

б) Якщо $f'(0) = 0$, то слід звертатись до III члена (1) $x^2 \cdot f''(0)$. Але він має бути рівним нулю, якщо $x = 0$ – т. стійкої рівноваги (див. Матвеєв, с. 252)
Тобто і III член в (1): $f''(0) = 0$. Це випливає з того, що цей член має один і той самий знак, як для $x > 0$, так і для $x < 0$. Тому сила, яку він визначає, при відхиленні МТ в один бік від положення рівноваги намагається повернути МТ назад, але при відхиленні її в інший бік, навпаки, намагається віддалити її від точки $x = 0$. Тому

Тоді $f'''(0) \neq 0$. Коливання значно ускладнюються, вони стають <u>нелінійними</u>. У цьому випадку $f(x) \approx \frac{1}{3!}x^3 f'''(0)$.

<u>В реальних фіз. системах</u> $f'(0) \neq 0$ і для малих коливань ($\alpha \approx \sin\alpha$).

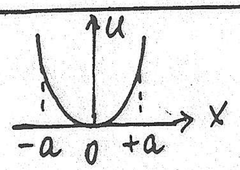
рівняння руху $\boxed{m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = x \cdot f'(0) = -D \cdot x}$ (2) $F_{пруж.} = -D \cdot x$.

де $D = -f'(0) > 0$ $(f'(0) < 0) \Rightarrow f$ — повертаюча сила!

В ряд можна розкладати не силу, а потенц. енергію

Формула Маклорена (3) $\boxed{U(x) = U(0) + U'(0) \cdot x + \frac{1}{2} U''(0) \cdot x^2 + \dots}$

$U(0)$ має мінімум, а $U'(0) = 0$; $U''(0) > 0$




$U(0) = 0$ — так пронормували потенц. енергію

Позначимо $U''(0) = k$

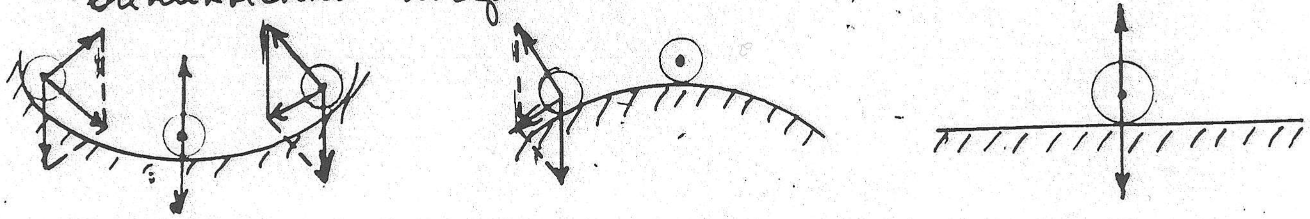
$k > 0$. Тоді $\boxed{U(x) = \frac{1}{2} k x^2}$ (4)

(5) $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$ $F_x$ — квазіпружна (повертаюча) сила (сила Гука)

Будемо розглядати <u>лінійні колив.</u>

Основні <u>умови виникнення коливань</u>:

- наявність положення рівноваги;
- виникнення повертаючої сили...



(5) $\Rightarrow m\ddot{x} = -kx$

$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$ (6) $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\left[\frac{k}{m}\right] = \frac{Н}{м \cdot кг} = \frac{\cancel{кг \cdot м}}{с^2 \cdot \cancel{м \cdot кг}} = \frac{1}{с^2} \Rightarrow \frac{1}{с^2} = [\text{частота}^2]$!

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Період коливань НЕ залежить від амплітуди коливань. Ця властивість наз. ізохроністю коливань

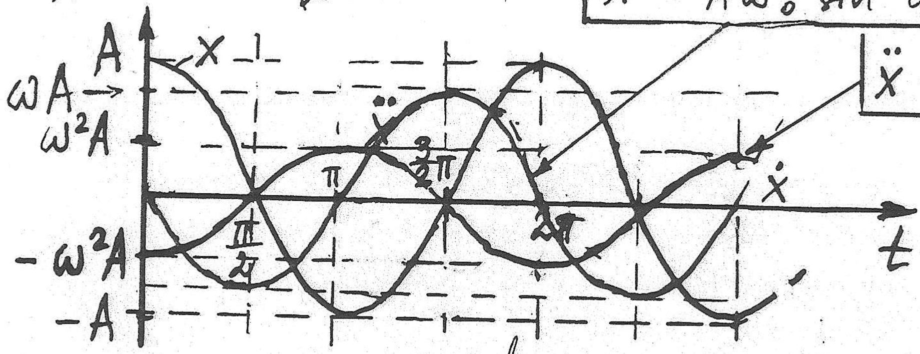
Розв'язок (6):

$$\boxed{x = A\cdot\cos\omega_0 t} \quad \text{або}$$

$$x = A\cdot\sin\omega_0 t$$

$$\boxed{\dot{x} = -A\omega_0\sin\omega_0 t = \upsilon \text{ - швидкість}}$$

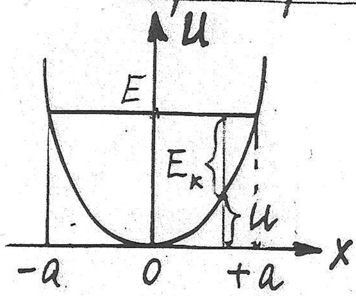
$$\boxed{\ddot{x} = -A\omega_0^2\cos\omega_0 t =} = a \text{ - прискор.}$$




Висновок: існує ~~зміщення~~ зсув швидкості і прискорення відносно відхилення гармонічних коливань за фазою на $\pi/2$ та на $\pi$ відповідно, або:

Випередження на кут $\pi/2$ кривої швидкості відносно відхилення; та випередження на кут $\pi/2$ кривої прискорення відносно швидкості

## Перетворення енергії при коливаннях




Повна мех. енергія $E = E_к + U$ (1)

E залишається сталою

У довільний момент часу $E_к = \frac{1}{2}m\upsilon^2 =$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t \quad (2)$$

$$U = -\int_0^x F(x)\,dx = -\int_0^x(-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t \quad (3)$$

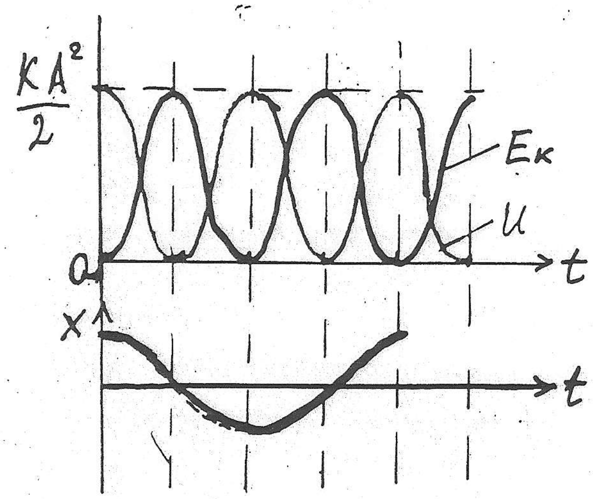
$$(2),(3)\to(1):\; E = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t + \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t = \frac{1}{2}kA^2$$

$E = \frac{1}{2}kA^2 = const!$ (4) Повна ен. із часом не змінюється

$$E_к = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t = \frac{1}{4}kA^2(1-\cos 2\omega t) \quad (5)$$

$$U = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t = \frac{1}{4}kA^2(1+\cos 2\omega t) \quad (6)$$

(5) та (6) означає, що кінет. та потенц. енергії також „осцилюють", але із циклічною частотою, вдвічі більшою за циклічну частоту зміщень




$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega^2$

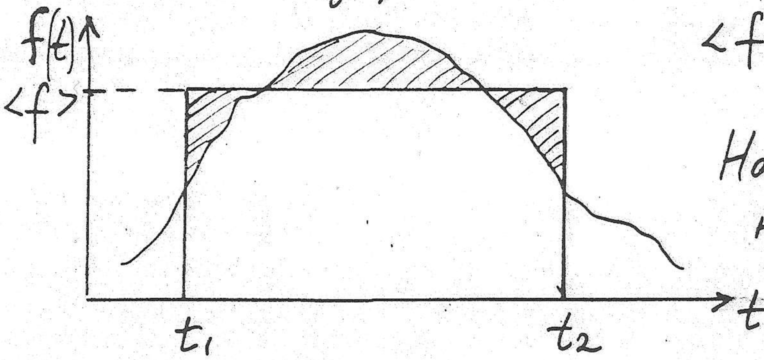
$$E_к = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega t = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2 \omega t$$

$$E_{к\,max} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{\cancel{m}\frac{k}{\cancel{m}} \cdot A^2}{2}$$

$$E_{к\,max} = \frac{kA^2}{2} = U_{max}$$

Середнє за період кінетична та потенціальна енергії

Що таке середня величина?




$$\langle f \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

На графіку: середнє значення $\langle f \rangle$ відповідає висоті прямокутника, площа якого дорівнює площі між кривою $f(t)$ і віссю $t$ на інтервалі між $t_1$ та $t_2$.

$$E_к = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega t$$

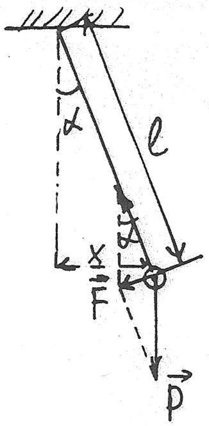
$$U = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega t$$

1) $$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2\omega t\right] dt = \frac{1}{2T}\left[t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t\right]\Bigg|_0^T = \frac{1}{2}$$

2) Аналогічно: $\langle \sin^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2}$

Тоді: $\boxed{\langle E_к \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2} E}$ Середнє за період значення $E_к$ та $U$ однакові і кожне з них дорівнює ½ повної мех. ен. коливань

# Математичний маятник




$F = mg\cdot\sin\alpha$ ; $\sin\alpha = \frac{x}{l}$

$\sin\alpha \approx \alpha$

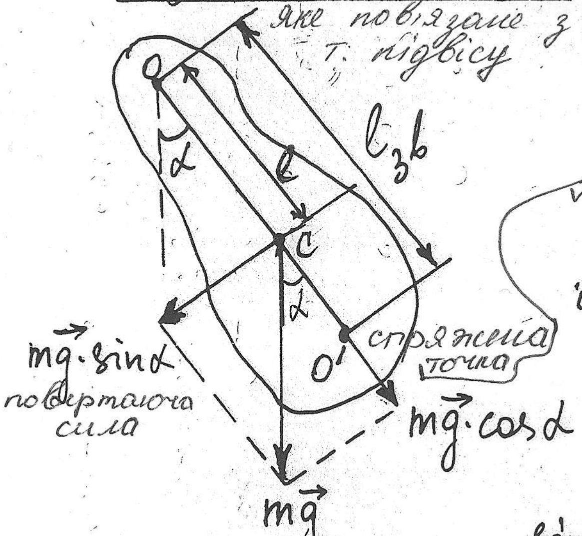
$F = mg\frac{x}{l}$ ;

$ma = F \Rightarrow m\cdot\ddot{x} = -mg\frac{x}{l}$

$\ddot{x} + \frac{g}{l}\cdot x = 0$

$\omega_0^2 = \frac{K}{m} = \frac{g}{l} \Rightarrow K = \frac{mg}{l} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$ М.м.

# Фізичний маятник




C – центр маси

O – точка підвісу

O' – центр коливань

т. O та т. O' – взаємні, або спряжені (якщо їх поміняти місцями, то період коливань НЕ змінюється)

Якщо поміняти т. O з т. O' – період коливань не змінюється

$J\cdot\beta = -M$ основне рівняння оберт. руху

$J\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\sin\alpha$ векторний добуток

$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha}$

$\sin\alpha \approx \alpha$ для малих кутів

$\ddot{\alpha} + \underbrace{\frac{mgl}{J}}_{\text{квадрат частоти коливань}}\alpha = 0$

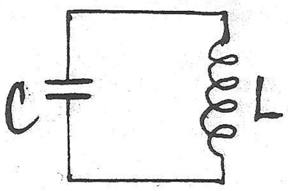
$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}}$ Ф.м.

$l_{зв} = \frac{J}{ml}$ – мат. маятник має такий самий період коливань, що і фізичний маятник, за умови, що його (М.м.) довжина дорівнює $l_{зв}$

Ф.м.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{зв.}}{g}}$

М.м.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

# Електромагнітні коливання




$$U = \frac{q}{C}$$ $U$ - різниця потенціалів на обкладинках конденсатора

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$$

$\mathcal{E}$ – е.р.с. самоіндукції

$$\mathcal{E} = -L\cdot\frac{d^2q}{dt^2} \qquad \left(i = \frac{dq}{dt}\right)$$

$$U = \mathcal{E} \Rightarrow \frac{q}{C} = -L\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\ddot{q} + \overbrace{\frac{1}{LC}}^{=\omega_0^2} q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

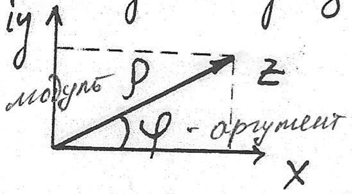
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}$$ <u>Формула Томсона</u>

коливання за законом sin або cos

## Запис гармонічних коливань в комплексній формі

Матвєєв, с.254

Комплексне число (КЧ) може бути представлене на комплексній площині $(x, iy)$ у вигляді вектора, проведеного з початку СК у точку з коорд. $(x, y)$




$x = \rho \cdot \cos\varphi$; $y = \rho \cdot \sin\varphi$

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \quad (1)$$

$x = \mathrm{Re}\, z$ - дійсна частина КЧ

$y = \mathrm{Im}\, z$ - уявна частина КЧ

$z = x + iy$ $\quad (i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1)$

↑ У декартовій СК. У полярній СК - (2):

$\boxed{z = \rho e^{i\varphi}}$ (2). Порівнявши (1) та (2):

1) Формула Ейлера $\quad \boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi} \quad (3)$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}$

$\rho$ - модуль КЧ $\quad \varphi$ - аргумент КЧ

2) В (3) замінимо $\varphi$ на $-\varphi$ і врахуємо, що $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, а $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \quad (3')$$

З (3) та (3'): $\quad \boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}} \quad (4)$ - Формули Ейлера

Так само $\quad \boxed{\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}} \quad (4')$

3) КЧ додаються за правилом паралелограма:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_2 + y_1) \quad (5)$$

4) Множення КЧ: $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ та $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ проводиться за правилом $z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ (6)

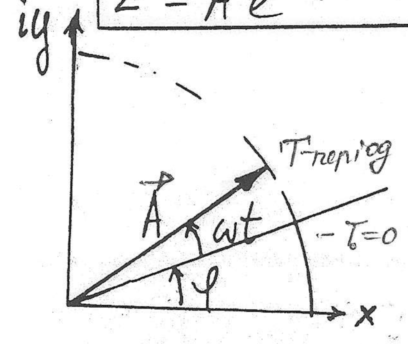
5) Вводять комплексно спряжене число $z^* = x - iy$ ($z = x + iy$) (спряжене до числа $z = x + iy$). Або $z^* = \rho e^{-i\varphi}$ - комплексно спряжене до $z = e^{i\varphi}$.

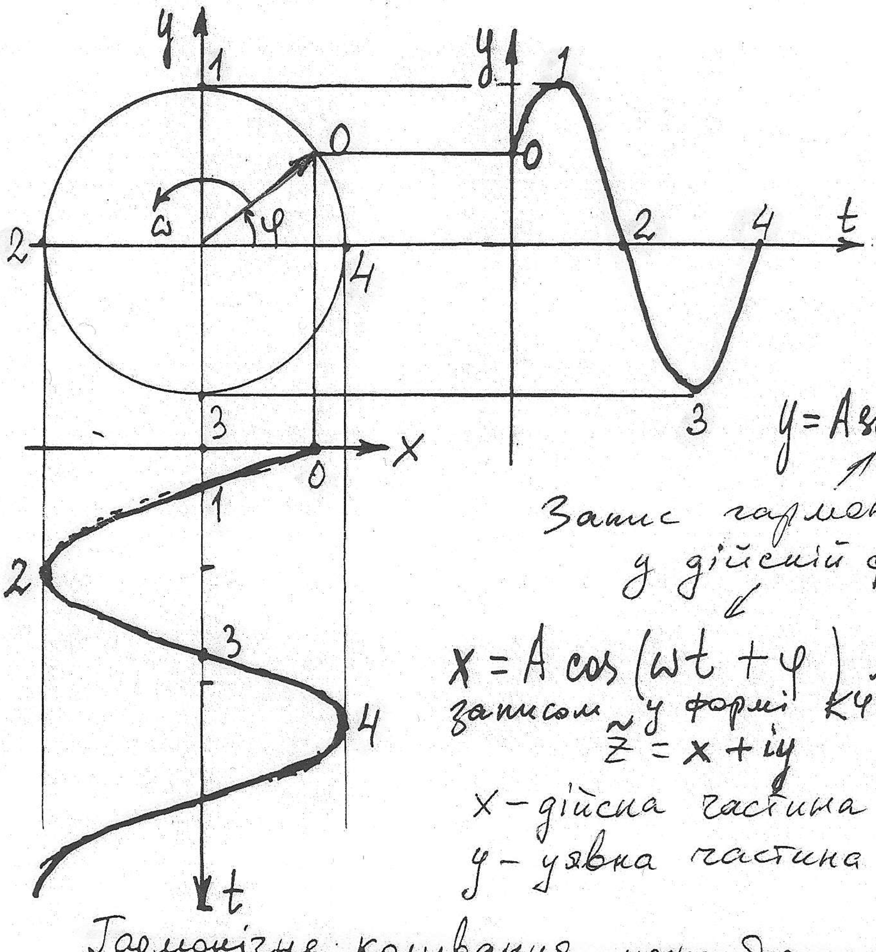
Із (6) випливає, що $z \cdot z^* = \rho^2$ + дійсна

Гармонічні коливання можна записати у комплексній формі (у вигляді КЧ)

$$\boxed{\tilde{z} = A e^{i(\omega t + \varphi)}}$$

$\tilde{z}$ – комплексне число
$\varphi$ – початкова фаза
$(\omega t + \varphi)$ – фаза коливань
$A$ – амплітуда




$y = A\sin(\omega t + \varphi)$

Запис гармонічних коливань у дійсній формі

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ можна замінити записом у формі КЧ:

$$\tilde{z} = x + iy$$

$x$ – дійсна частина КЧ ($Re\,\tilde{z}$)
$y$ – уявна частина КЧ ($Im\,\tilde{z}$).

Гармонічне коливання може бути задане за допомогою вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливань, а напрямок вектора утворює з віссю $x$ кут, який дорівнює початковій фазі коливань

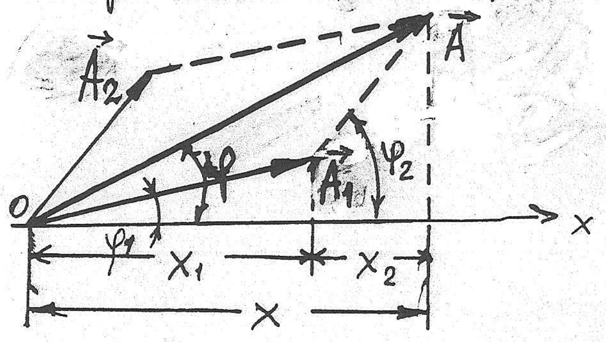
# I. Додавання гармонічних коливань однакової частоти і одного напрямку

(різні амплітуди $A_1$ і $A_2$ та початкові фази $\varphi_1$, $\varphi_2$)

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1); \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Представимо обидва коливання за допомогою векторів $\vec{A_1}$ та $\vec{A_2}$; Сумарний вектор

$$\vec{A} = \vec{A_1} + \vec{A_2}$$




Із побудови видно, що

$$X = X_1 + X_2$$

Якщо:

$$z_1 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}$$

$$z_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}, \text{ то}$$

$$z = z_1 + z_2 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} =$$

$$= e^{i\omega t}\left(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}\right) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Скористались:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x} \quad (3)$$

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = x + iy \quad (5).$$

де

$$\boxed{\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + \underline{2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ tg\,\varphi &= \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{aligned}} \quad (A)$$

Вектор $\vec{A}$ являє собою результуюче коливання. Цей вектор обертається з тією ж кутовою частотою $\omega$, що і вектори $\vec{A_1}$ та $\vec{A_2}$. Результуюче коливання буде гармонічним, з амплітудою $A$ та початковою фазою $\varphi$.

Аналіз (А): 1) Амплітуда коливань досягає max значення при $\varphi_1 = \varphi_2$ і дорівнює $A_{max} = A_1 + A_2$

2) Min значення амплітуди маємо при $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$ і $A_{min} = |A_2 - A_1|$

3) Повна ен. колив. руху $E \sim A^2$. В данону випадку $E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ де $E_1$, $E_2$ – енергія складових коливань.

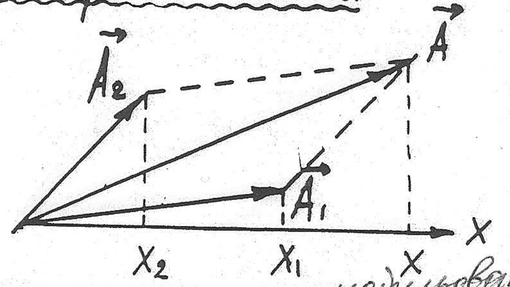
Енергія результуючого коливання залежить від різниці початкових фаз складових коливань.

## II. Додавання гармонічних коливань різної частоти і одного напрямку

!! Кучерук с. 223; Матвєєв с. 256

$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$; $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

Якщо вектори складових амплітуд $\vec{A}_1$ та $\vec{A}_2$ обертаються з різними кутовими швидкостями (див. рис.), то кут між ними змінюється з часом ⇒ результуюча амплітуда також змінюється з часом ⇒ коливання будуть <u>негармонічними</u>




Результуюче зміщення $x = x_1 + x_2$

Для спрощення припустимо, що $A_1 = A_2 = A_0$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$

Тоді: (A) модульована амплітуда

$$\boxed{x = 2A_0 \cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi_0\right)}$$

Результуюче коливання: – негармонічне; – періодичне; – із частотою $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$; – із модульованою амплітудою зміщення $2A_0$ за законом cos з частотою $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\cancel{2}}$

амплітуда завжди додатна

$- A = \left|2A_0 \cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right| -$

Період |cos| дорівнює $\pi$, а період зміни амплітуди $T_A = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$

У випадку, коли $\omega_2 \approx \omega_1$ (частоти близькі), то виникає явище <u>биття</u> (див. далі).

<u>Модуляція</u> – це зміна за заданим законом з часом параметрів, що хар-ють будь-який стаціонарний процес.

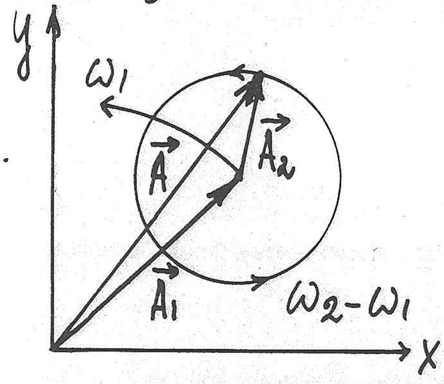
В гармонічних коливаннях можуть бути модульованими: <u>амплітуда</u>, <u>частота</u>, <u>фаза</u>.

Додавання гармонічних коливань з майже рівними (близькими) частотами

# Биття

$\omega_1 \neq \omega_2$, але $\omega_1 \approx \omega_2$

Це означає, що $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1 (\approx \omega_2)$




$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega = \omega_1 + \Omega$$

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 \quad \omega_1 - \omega_2$$

$$+\begin{array}{l} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{array}$$

(якщо $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) $A_1 = A_2 = A$

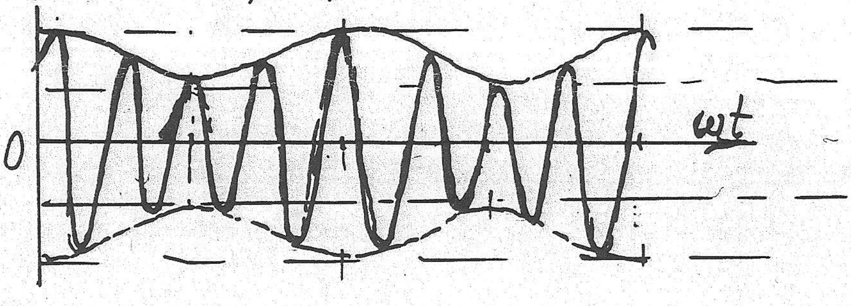
$$x = x_1 + x_2 = A[\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t] =$$

$$= A[\cos\omega_1 t + \cos(\omega_1 + \Omega)t] = \ldots =$$

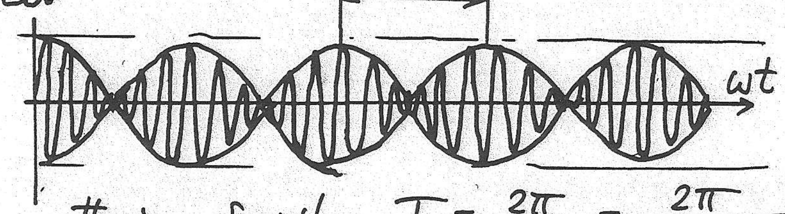
$$= \left(2A\cos\frac{\Omega}{2}t\right)\cdot\cos\omega_1 t$$

Амплітуда результуючих коливань $2A$ повільно змінюється з частотою $\Omega = (\omega_2 - \omega_1)$ від $(A_1 + A_2)$ до $|A_1 - A_2|$

В результаті складання 2-х гармонічних коливань з близькими частотами отримали биття - гармонічне коливання з пульсуючою амплітудою

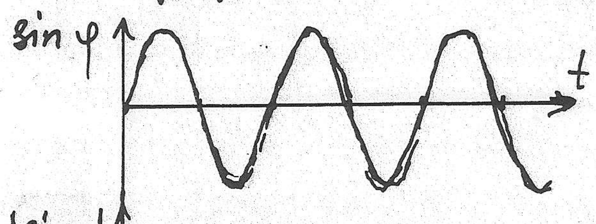


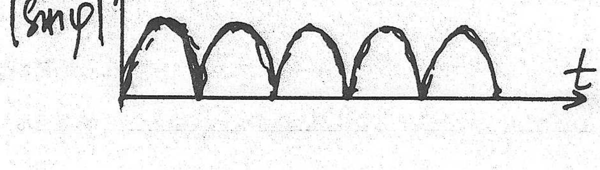

Якщо $A_1 \approx A_2$, то в мінімумі амплітуда сумарного коливання дорівнює майже нулю, тобто в min коливання майже припиняються




$\frac{\omega}{\Omega} \approx 6$

Період биттів $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}$



## III. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

фігури Лісажу

Тіло (або мат. точка) одночасно бере участь у 2-х взаємно перпендикулярних коливаннях, частоти яких однакові: $x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ та $y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

$$
-\begin{array}{l|l|l}
\dfrac{x}{A_1} = \cos\omega t\cdot\cos\varphi_1 - \sin\omega t\cdot\sin\varphi_1 & *\cos\varphi_2 & *\sin\varphi_2 \\
\dfrac{y}{A_2} = \cos\omega t\cdot\cos\varphi_2 - \sin\omega t\cdot\sin\varphi_2 & *\cos\varphi_1 & *\sin\varphi_1 \\
 & \text{I раз} & \text{II раз}
\end{array}
$$

$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \sin\omega t\cdot\sin(\varphi_2-\varphi_1) \qquad (1)$$

$$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \cos\omega t\cdot\sin(\varphi_2-\varphi_1) \qquad (2)$$

Рівняння (1) та (2) піднесемо до квадрата і почленно додамо:

$$(3)\qquad \boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1\cdot A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1) = \sin^2(\varphi_2-\varphi_1)}$$

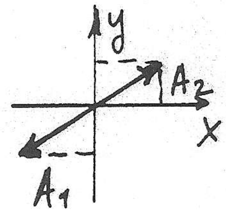
(3) – рівняння траєкторії результуючого руху (коливання) тіла, що одночасно бере участь у двох взаємно перпендик. рухах (коливаннях)

Рівняння (3) – рівняння еліпса.

Орієнтація еліпса відносно осей СК і його форма визначаються амплітудами $A_1$ та $A_2$, а також різницею фаз $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ складових коливань

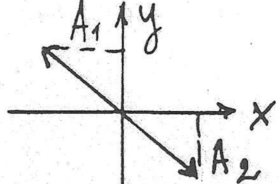
Розглянемо окремі випадки:

1. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \Rightarrow y = \frac{A_2}{A_1}x$



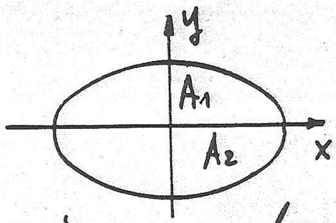

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

2. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2n+1)\pi \Rightarrow y = -\frac{A_2}{A_1}x$



3. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (4)$$




Аналіз: 1) (4) – рівняння еліпса, приведеного до координатних осей;

2) Напівосі еліпса дорівнюють відповідним амплітудам складових коливань;

3) При $A_1 = A_2$ еліпс вироджується у коло;

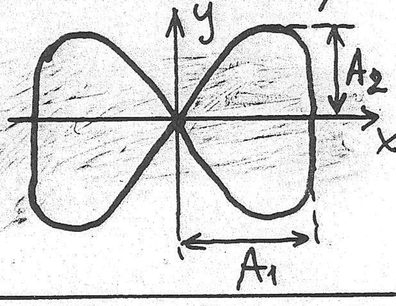
4) Випадки $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1 = +\frac{\pi}{2}$ та $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ відрізняються напрямом руху по еліпсу або по колу;

5) Рівномірний рух по колу радіуса $R$ з кутовою швидкістю $\omega$ м.б. представлений як сума двох взаємно перпендик. коливань $x = R \cdot \cos\omega t$ та $y = \pm R \cdot \sin\omega t$.
Знак „+" відповідає руху проти годин. стр.

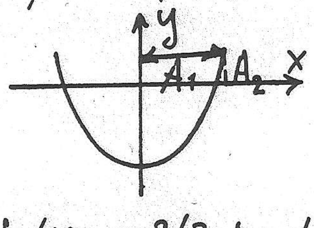
6) Якщо частоти взаємно $\perp$ коливань не однакові, то траєкторія результ. коливання має вигляд доволі складних кривих, які називаються фігурами Ліссажу

① $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$

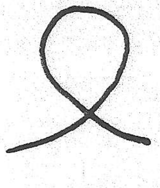
$x = A_1 \cos\omega t$;
$y = A_2 \cos(2\omega t + \frac{\pi}{2})$



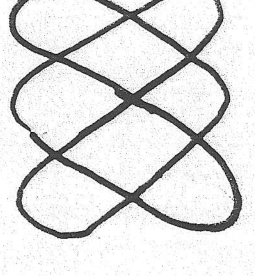

② $\omega_1/\omega_2 = 1/2$; $\alpha = 0$



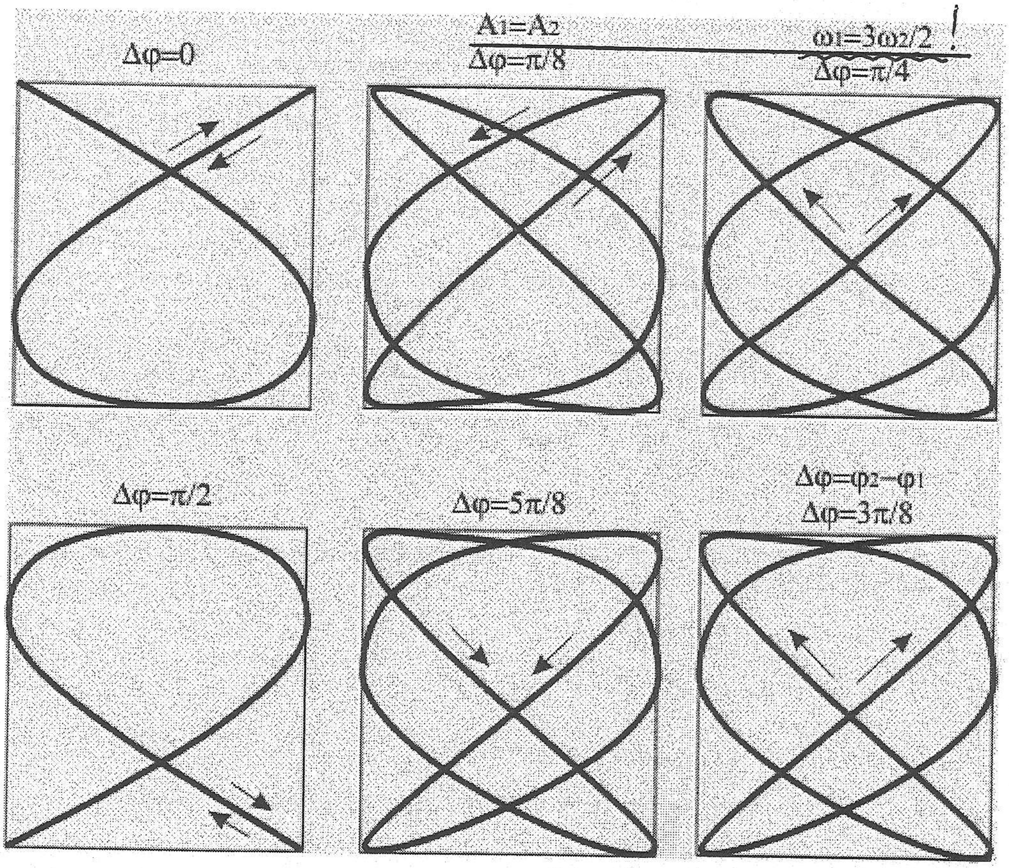

③ $\omega_1/\omega_2 = 2/3$; $\alpha = 0$

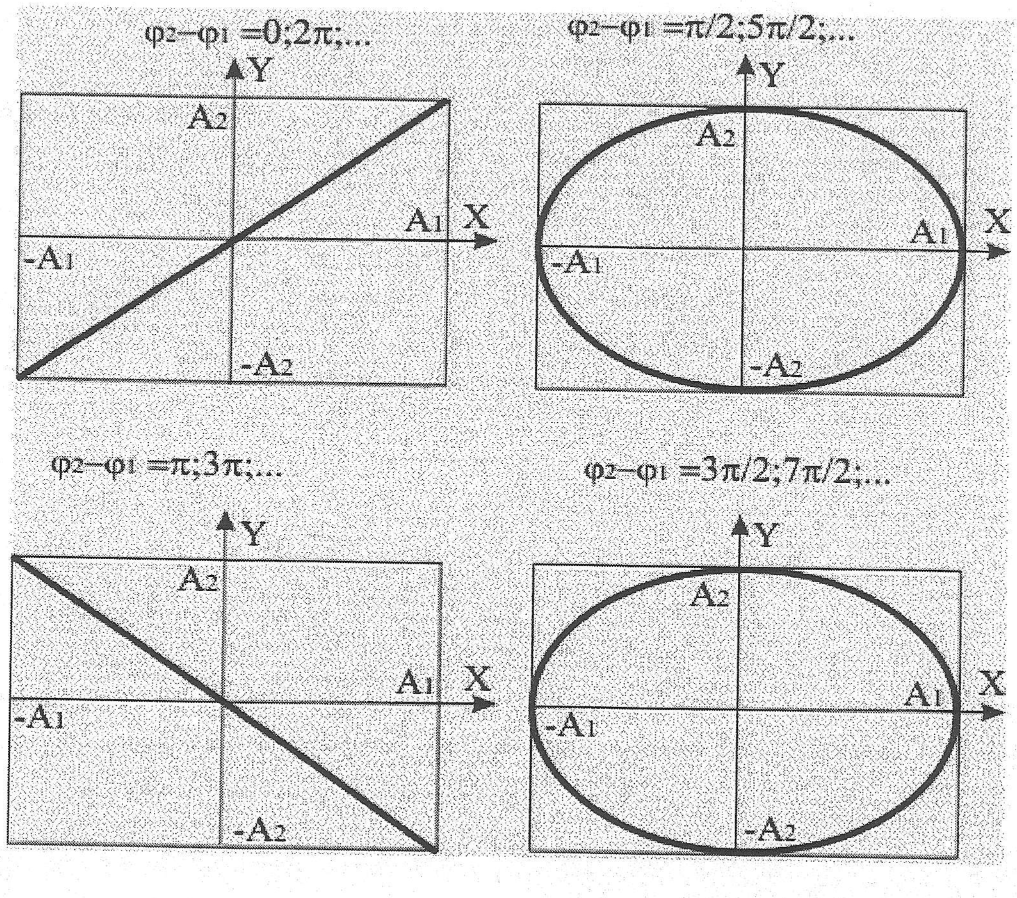


④ $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$



13a


$\Delta\varphi=0$
$A_1=A_2$
$\Delta\varphi=\pi/8$
$\omega_1=3\omega_2/2$ !
$\Delta\varphi=\pi/4$
$\Delta\varphi=\pi/2$
$\Delta\varphi=5\pi/8$
$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$
$\Delta\varphi=3\pi/8$


$\varphi_2-\varphi_1=0;2\pi;...$
Y
$A_2$
$A_1$
X
$-A_1$
$-A_2$
$\varphi_2-\varphi_1=\pi/2;5\pi/2;...$
Y
$A_2$
$A_1$
X
$-A_1$
$-A_2$
$\varphi_2-\varphi_1=\pi;3\pi;...$
Y
$A_2$
$A_1$
X
$-A_1$
$-A_2$
$\varphi_2-\varphi_1=3\pi/2;7\pi/2;...$
Y
$A_2$
$A_1$
X
$-A_1$
$-A_2$

## Нелінійні коливання

Матвєєв, с.259-261

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{xf'(0)}_{\text{лін. член}} + \underbrace{\frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots}_{\text{нелінійні члени}}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) \qquad (2)$$

$$\ddot{x} - \frac{f'(0)}{m} \cdot x = \frac{f''(0)}{2m} \cdot x^2$$

$$(3)\quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \cdot \omega_0^2 x^2, \text{ де } \omega_0^2 = -\frac{f'(0)}{m}$$

Можна показати (Матвєєв, с. 260), що

$$\varepsilon = \frac{f''(0)}{2m\omega_0^2} = -\frac{f''(0)}{2f'(0)}$$

розв'язком (3) є вираз:

$$(4)\quad x = A_0 \sin\omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon A_0^2 + \frac{1}{6}\varepsilon A_0^2 \cos 2\omega_0 t$$

Висновки: 1) з'явилась II гармоніка;

2) при врахуванні наступних нелінійних членів в (2) розв'язок буде містити вищі частоти $n \cdot \omega_0$;

! 3) обидві складові коливання з $\omega_0$ та $2\omega_0$ відбуваються навколо $x = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon A_0^2$, а не $x = 0$

# Затухаючі коливання

$m\ddot{x} = -kx$ рівняння, що описує власні коливання – незатухаючі

В реальному випадку існує $F_{оп} = -\beta\dot{x}$

$\beta$ – коефіц. тертя (опору)

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$(1)\quad \boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$\boxed{\gamma = \frac{\beta}{2m}}$ $\gamma$ – коефіцієнт затухання

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

(1) – Рівняння руху тіла при затухаючих коливаннях.

Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$(2)\begin{cases} x = A_0 e^{i\beta t} \Rightarrow \dot{x} = A_0 i\beta e^{i\beta t} = i\beta x \Rightarrow \\ \ddot{x} = -A_0\beta^2 e^{i\beta t} = -\beta^2 x \end{cases}$$

$$(2)\to(1):\ \underbrace{A_0}_{\neq 0}\underbrace{e^{i\beta t}}_{\neq 0}(-\beta^2 + 2\gamma i\beta + \omega_0^2) = 0$$

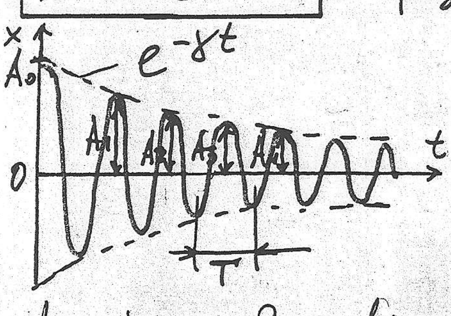
$$(-\beta^2 + 2i\gamma\beta + \omega_0^2) = 0 \Rightarrow \beta = i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2} =$$

частота затухаючих коливань

де $\boxed{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$ $\quad (3) \quad = i\gamma \pm \Omega$

З (2) та (3): $x = A_0 e^{i\beta t} = \underbrace{A_0 e^{-\gamma t}}_{A} e^{\pm i\Omega t}$

$\boxed{x = Ae^{\pm i\Omega t}}$ – розв'язок (1) $\qquad A = A_0 e^{-\gamma t}$




$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{km}{m^2} - \frac{b^2}{4m^2}}} = \frac{2\pi\cdot m}{\sqrt{km - \frac{b^2}{4}}}$$

Але існує 2 розв'язки (1): при різних знаках $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

1. Не дуже великий коеф. тертя (коеф. затух.)

$$\gamma = \frac{b}{2m} < \omega_0 \Rightarrow \omega_0^2 - \gamma^2 > 0 \Rightarrow \Omega > 0$$

$$x = \underbrace{A_0 e^{-\gamma t}}_{A}\cos\Omega t$$

1) Змінна ампл. $A$.

2) Стала частота $\Omega$.

див. рис.

3) Ці коливання не є періодичними і не є гармонічними.

Час релаксації ($\tau$) – час, за який амплітуда коливань зменшується в $e = 2{,}7$ раз

## Логарифмічний декремент затухання ($\theta$)

$$A_1 = A_0 e^{-\gamma t_1} \qquad A_2 = A_0 e^{-\gamma(t_1+T)}$$

$$A_n = A_0 e^{-\gamma t} \qquad A_{n+1} = A_0 e^{-\gamma(t+T)}$$

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\gamma t}}{A_0 e^{-\gamma(t+T)}} = e^{\gamma T} = e^{\theta}$$

$\frac{A_n}{A_{n+1}} = const$ – декремент затухання $= \frac{A(t)}{A(t+T)}$

$\ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \theta$

$\theta$ – логарифм. декр. затух.

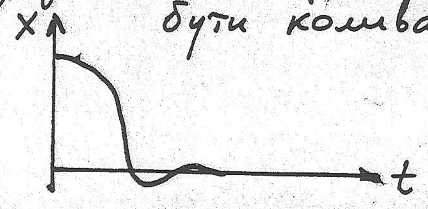
$\boxed{\theta = \gamma T}$ лог. декр. затухання характеризує зміну (зменш., затух.) коливань за період. Це величина, обернена до кількості періодів ($N$), протягом яких амплітуда затухає в $e$ разів.

Наприклад, $\theta = 0.01$ означає, що коливання затухає в $e$ разів після 100 коливань.

$$\frac{A_0}{A_N} = e^{\gamma\tau} \Rightarrow \gamma\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\gamma}$$

2. Випадок великих втрат ($\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$)

а) $\gamma = \omega_0$ – критичний режим, рух перестає бути коливальним

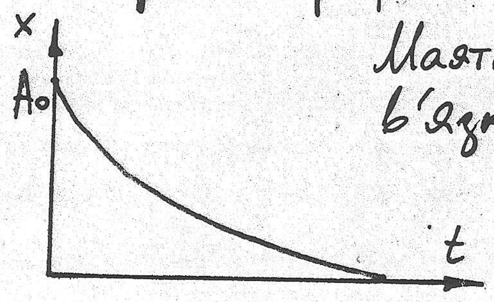



б) $\gamma > \omega_0$ (великі втрати)

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \pm i\delta \quad \text{де } \delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Тоді $x = A_0 e^{-\gamma t} e^{\pm i\Omega t} = A_0 e^{-(\gamma \pm \delta)t}$

Це – проста exp ф-ція, ніяких коливань немає




Маятник в рідині з великою в'язкістю (наприклад, гліцерин)

# Вимушені коливання

Рівняння руху $\boxed{m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_0\cos\omega t}$ (1)

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad \text{або}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t} \qquad (2)$$

Розв'язок (2) шукаємо у вигляді:

$\alpha$ - якась стала

$$x = A_0 e^{i\alpha t} \quad (3) \rightarrow (2):$$

$$A_0 e^{i\alpha t}(-\alpha^2 + 2i\gamma\alpha + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t} \qquad (4)$$

$\alpha = \omega$ (це випливає з того, що (4) повинно бути справедливим для всіх моментів часу, тобто час має бути вилучений з (4)).

$$A_0 \cancel{e^{i\alpha t}}(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}\cancel{e^{i\omega t}}$$

Позначимо: $\frac{F_0}{m} = f$; $\quad A_0 = \dfrac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega} \quad \Big| * 1 = \frac{R}{R}$

$$A_0 = f\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+2i\gamma\omega}\cdot\frac{(\omega_0^2-\omega^2)-2i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)-2i\gamma\omega} =$$

$$= \frac{f}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\cdot\frac{(\omega_0^2-\omega^2)-2i\gamma\omega}{1} =$$

$$= \underbrace{\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}}_{A_m}\cdot\frac{\overbrace{(\omega_0^2-\omega^2)}^{x} - i\overbrace{2\gamma\omega}^{y}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

Тому, що $e^{i\varphi} = \frac{x}{\rho} + i\frac{y}{\rho} = \frac{x+iy}{\rho} = \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$

$$\boxed{\begin{aligned} A_0 &= A_m e^{i\varphi} \\ A_m &= \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2} \end{aligned}} \qquad (5)$$

Висновок: Розв'язок (2) має вигляд $x = A_m e^{i(\omega t+\varphi)}$, де $A_0$, $A_m$ та $\varphi$ задаються формулами (5), а $\omega$ - частота зовнішньої сили

## Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)

Аналізуємо (5):

Max значення $A_m$ при $[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2]'=0$

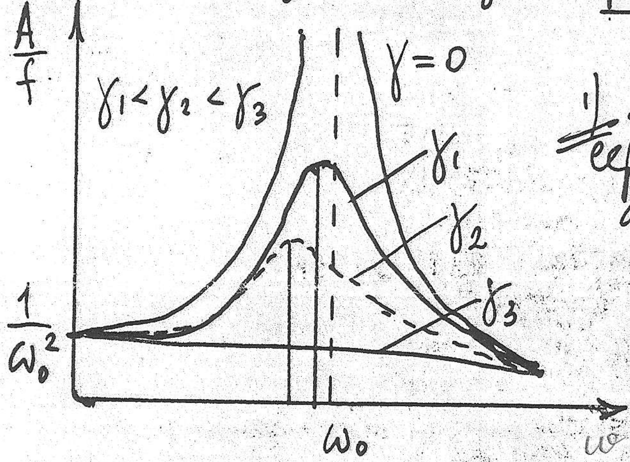
$$2(\omega^2-\omega_0^2)\cdot 2\omega+8\gamma^2\omega=0$$

$$\omega_{рез}^2-\omega_0^2+2\gamma^2=0 \Rightarrow \boxed{\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}} \qquad (6)$$

$$A_{max}(A_{рез})=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_{рез}^2)^2+4\gamma^2\omega_{рез}^2}}=$$

$$=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_0^2+2\gamma^2)^2+4\gamma^2(\omega_0^2-2\gamma^2)}}=$$

$$=\frac{f}{\sqrt{4\gamma^4+4\gamma^2\omega_0^2-8\gamma^4}}=\boxed{\frac{f}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}=A_{рез}} \qquad (7)$$




Аналіз (7):

1) У відсутності опору середовища ($\gamma=0$) амплітуда $A_{рез}\to\infty$, а $\omega_{рез}=\omega_0$.

2) При дуже великих затуханнях ($2\gamma^2>\omega_0^2$) вираз для $\omega_{рез}$ стає уявним. Це означає, що резонанс при цих умовах не спостерігається (див. рис. – крива для $\gamma_3$).

3) При $\omega\to 0$ всі криві на АЧХ переходять до одного і того ж ($\neq 0$) значення $\boxed{A_0^{статич}=F_0/m\omega_0^2=F_0/k}$ (8). Система отримує статичне зміщення із положення рівноваги під дією сталої сили $F_0$, що дорівнює амплітуді змушуючої сили.

При дуже малій частоті зовнішньої сили вона діє на систему як стала статична сила

4) При $\omega\to\infty$ всі криві на АЧХ асимптотично прямують до нуля.

5) Чим менше $\gamma$, тим сильніше змінюється із частотою амплітуда поблизу резонанса (тим гостріше максимум).

6) Із (7) видно, що при $\gamma\ll\omega_0$ амплітуда при резонансі $\boxed{A_{рез}\approx\frac{f}{2\gamma\omega_0}=\frac{F_0}{2m\gamma\omega_0}}$ (9)

## Добротність

$$\frac{(9)}{(8)} = \frac{A_{рез}}{A_{стат}} = \frac{f\cdot m\omega_0^2}{2\gamma\cancel{\omega_0}\cdot F_0} = \frac{\cancel{F_0}\cancel{m}\omega_0}{\cancel{m}\cdot\cancel{F_0}\cdot 2\gamma} =$$

$$= \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{1}{2\gamma} = \frac{\pi}{T\cdot\gamma} = \frac{\pi}{\theta} = Q \text{ – добротність.} \quad (10)$$

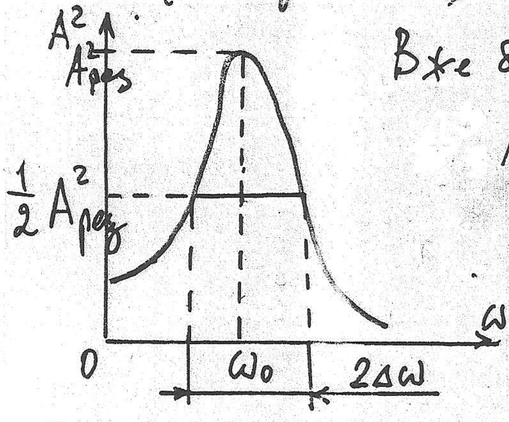
Добротність (Q) показує, в скільки разів амплітуда в момент резонанса перевищує зміщення системи з положення рівноваги під дією постійної сили тієї ж величини, що і амплітуда вимушуючої сили.

## Ширина резонансної кривої (ШРК)

Q показує величину збільшення амплітуди в резонансі.

ШРК показує інтенсивність (швидкість) збільшення амплітуди коливань в резонансі.

ШРК (як правило!) визначається відносно $A^2 \sim E$




Вже було (див. (5)):

$$A_m^2 = \frac{f^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} = \frac{f^2}{(\omega_0-\omega)^2(\omega_0+\omega)^2+4\gamma^2\omega^2} \approx$$

$$\approx \left(\frac{F_0}{m}\right)^2\frac{1}{\Delta\omega^2\cdot 4\omega_0^2+4\gamma^2\omega_0^2}. \quad (11)$$

Було також (див. (9)):

$$A_{рез} = \left(\frac{F_0}{m}\right)\frac{1}{2\gamma\omega_0}$$

$\Delta\omega \ll \omega_0$; $\omega \approx \omega_0$ – поблизу резонансу

$\Delta\omega = \omega_0 - \omega$

Умова зменшення $(\text{амплітуди})^2$ в 2 рази порівняно з $A^2_{рез}$:

$$\frac{1}{2}A^2_{рез} \overset{(9)}{=} \frac{1}{2}\frac{f^2}{4\gamma^2\omega_0^2} = \frac{f^2}{4\omega_0^2\cdot\Delta\omega^2+4\gamma^2\omega_0^2} \overset{(11)}{=} A^2_{m\,1/2}$$

$$8\gamma^2\omega_0^2 = 4\omega_0^2\cdot\Delta\omega^2+4\gamma^2\omega_0^2$$

$$4\gamma^2\omega_0^2 = 4\omega_0^2\cdot\Delta\omega^2 \Rightarrow \boxed{2\Delta\omega = 2\gamma} \quad (12)$$

ШРК дорівнює подвоєному декременту затухання ($\gamma$).

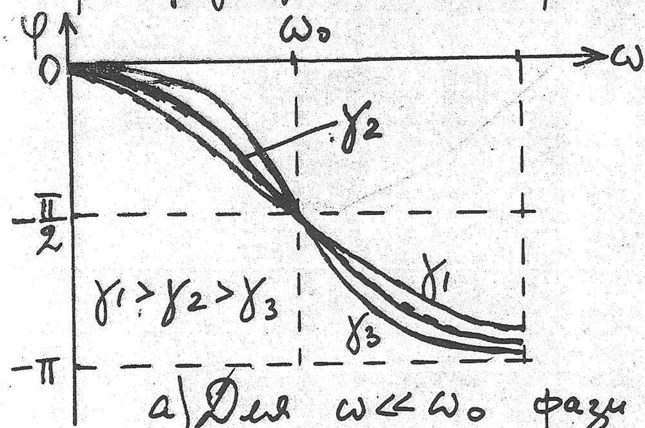
Чим менше затухання, тим менша ширина і гостріша резонансна крива.

$$2\cdot\Delta\omega = 2\gamma \Rightarrow \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{2\pi/T} = \frac{\gamma\cdot T}{\pi} = \frac{\theta}{\pi} = \frac{1}{Q}$$

$$\boxed{\frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = Q} \qquad (13)$$

## Фазочастотна характеристика (ФЧХ)

Була формула (5): $tg\,\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2} = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

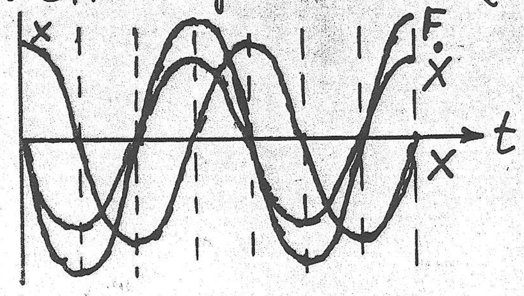



$\varphi$ - кут, на який відстають вимушені коливання від зовнішньої (вимушуючої) сили.

а) Для $\omega \ll \omega_0$ фази коливань та сили (майже) співпадають;

б) Для $\omega = \omega_0$ (в резонансі) фаза коливань (зміщень) запізнюється від фази сили на $90^\circ$;

в) Для $\omega \gg \omega_0$ зміщення та сила коливаються у протифазі ($\vec{x}$ та $\vec{F}$ направлені в протилежні сторони: $\cos(\omega t-\pi) = -\cos\omega t$).




Співпадають за фазою швидкість та сила