Фур'є-аналіз

(Представлення негармонічних коливань за допомогою гармонічних).

$$F(z) = F(z+\lambda) \qquad \lambda \text{ - період (просторовий!)}$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n \sin\left(n\frac{2\pi}{\lambda}z\right) + B_n \cos\left(n\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\right] =$$

$$= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \sin\left(n\frac{2\pi}{\lambda}z\right) + B_n \cos\left(n\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\right] =$$

$$= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\frac{2\pi}{\lambda}z\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(n\frac{2\pi}{\lambda}z\right) \quad (1)$$

Будь-яку періодичну ф-цію $F(z)$ з періодом λ можна представити рівністю (1).

Покладемо $\frac{2\pi}{\lambda} = k$

Знаходження коефіцієнтів B_0, A_n, B_n це і є Фур'є-аналіз

1) B_0: Проінтегруємо (1) від z_1 до z_2

$z_2 = z_1 + \lambda$; z_1 - довільна точка

$$\int_{z_1}^{z_2} F(z)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} B_0\,dz + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{z_1}^{z_2} A_n \sin(nkz)\,dz +$$

$$+ \int_{z_1}^{z_2} B_n \cos(nkz)\,dz$$

- Ф-ція $F(z)$ - відома: інтеграл зліва знайдений;
- I інт. справа: $\int_{z_1}^{z_1+\lambda} B_0 \cdot dz = B_0(z_2 - z_1) = B_0\lambda$
- II інт. справа $\int_{z_1}^{z_2} \sin(nkz) = 0$ - через те, що при інтегруванні за період ф-ції $\sin(nkz)$ та $\cos(nkz)$ однакову кількість разів від'ємні та додатні;
- III інт. справа $\int_{z_1}^{z_2} \cos(nkz)\,dz = 0$.

Таким чином $\int_{z_1}^{z_2} F(z)\,dz = B_0 \cdot \lambda + 0 + 0$

$$\boxed{B_0 = \frac{1}{\lambda}\int_{z_1}^{z_1+\lambda} F(z)\,dz} \quad (A)$$

2) Знайдемо A_m - деяке окреме значення A_n ($n=m$). Для цього помножимо обидві частини (1) на $\sin(mkz)$ і проінтегруємо праву і ліву частини по z за період ф-ції $F(z)$

$$\int_{z_1}^{z_2} F(z)\cdot \sin(mkz)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} B_0 \sin(mkz)\,dz +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{z_1}^{z_2} A_n \sin(nkz)\cdot\sin(mkz)\,dz + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{z_1}^{z_2} B_n \cos(nkz)\cdot$$
$$\cdot\sin(mkz)\,dz$$

- I інтеграл справа $=0$, через те, що включає m повних періодів $\sin mkz$
- II інтеграл: а) $m=n \Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} A_n \sin^2(nkz)\,dz =$
$$= A_n\int_{z_1}^{z_2}\sin^2 nkz\,dz \stackrel{\cdot}{=} \frac{\lambda}{2}\cdot A_m \quad \text{СРС}$$
б) $m\neq n \Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} A_n \sin(nkz)\cdot\sin(mkz) = 0$
- III інтеграл справа: а) $m=n \Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} B_n\cdot\cos(nkz)\cdot$
$$\cdot\sin(nkz)\,dz = \frac{1}{2}B_n\int_{z_1}^{z_2}\sin 2nkz\,dz = 0 \quad \text{СРС}$$
б) $n\neq m \Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} B_n\cos(nkz)\cdot\sin(mkz)\,dz = 0$

Таким чином: $\int_{z_1}^{z_2} F(z)\cdot\sin(mkz)\,dz = 0 + \frac{\lambda}{2}A_m + 0$

$$\boxed{A_m = \frac{2}{\lambda}\int_{z_1}^{z_1+\lambda} F(z)\sin(mkz)\,dz} \quad (B)$$

3) Знаходимо коеф. B_m:
Помножимо обидві частини (1) на $\cos(mkz)$ і проінтегруємо по z за період λ, отримаємо

$$\boxed{B_m = \frac{2}{\lambda}\int_{z_1}^{z_1+\lambda}\cos(mkz)\cdot F(z)\,dz} \quad (C)$$

Фур'є аналіз для періодичних ф-цій часу

$$F(t) = F(t+T)$$

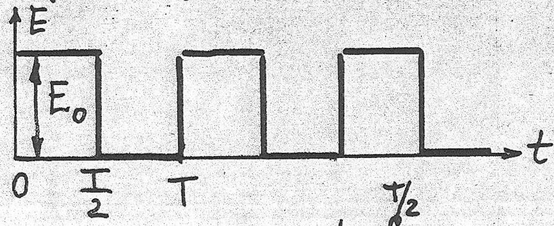
(2) $$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega t)$$

де $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$

Математика для змінної $\theta_1 = \omega t$ і змінної $\theta_2 = kz$ одна і та ж. Тому коефіцієнти ряда (2) знаходимо, спираючись на (A), (B), (C):

$$\boxed{B_0 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} F(t)\,dt; \qquad B_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} F(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad A_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} F(t)\cdot\sin(n\omega t)\,dt} \qquad (D)$$

Приклад: прямокутні коливання типу „меандр"



$$E(t) = \begin{cases} E_0 : 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 : \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

З (D): $B_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} E_0\,dt = \frac{E_0}{T}\cdot\frac{T}{2} = \frac{E_0}{2}$

$$A_m = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} E_0 \sin(m\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} E_0 \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right)dt =$$

$$= \frac{2E_0}{T}\int_0^{T/2} \sin(m\omega t)\,dt = \frac{2E_0}{T\cdot m\omega}\int_0^{T/2} \sin(m\omega t)\,d(m\omega t) =$$

$$= \frac{2E_0}{T\cdot m\frac{2\pi}{T}}\left(-\cos m\omega t\right)\Big|_0^{T/2} = \frac{E_0}{\pi m}\left(1 - \cos m\pi\right)$$

$m = 1: \quad A_1 = \frac{E_0}{\pi}\cdot 2 = 0.64\,E_0$

$m = 2: \quad A_2 = 0$

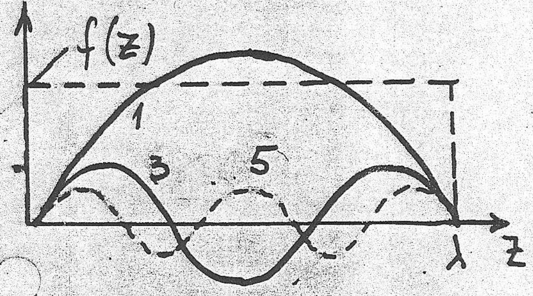
$m = 3: \quad A_3 = \frac{2E_0}{3\pi} = 0.21\,E_0$

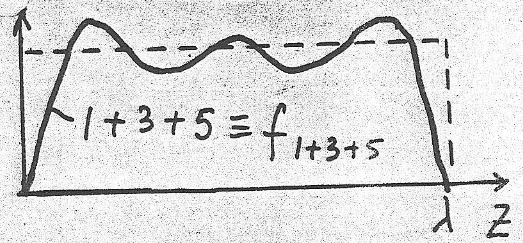
З (D): $B_m = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} E_0 \cos(m\omega t)\,dt = \ldots$ СРС!

Самостійна робота студентів (СРС)

1. Автоколивання
2. Параметричні коливання
3. Зв'язані системи
4. Нормальні коливання

Матвєєв, с. 275–281



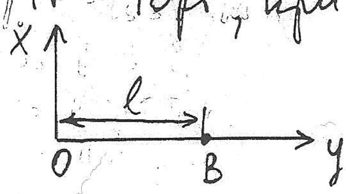


Фур'є-аналіз прямокутної хвилі

Хвилі чим відрізняються від коливань?

Хвилі

Процес поширення коливань у просторі, при якому передається енергія



$$X_0 = A\cos\omega t$$

$$X_B = A\cos[\omega(t-\tau)]$$

$$\tau = \frac{l}{v}; \quad X = A\cos\omega\left(t-\frac{y}{v}\right) =$$

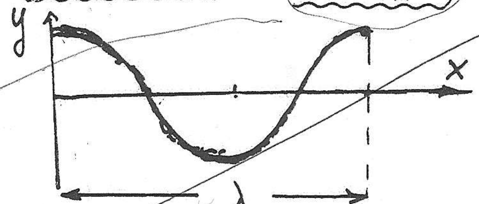
$$= A\cos\left(\omega t - \frac{\omega y}{v}\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi\cdot y}{T\cdot v}\right) =$$

$$= A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}y\right) = \boxed{A\cdot\cos(\omega t - ky) = x}$$

$$\lambda = T\cdot v; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Рівняння хвилі (1)

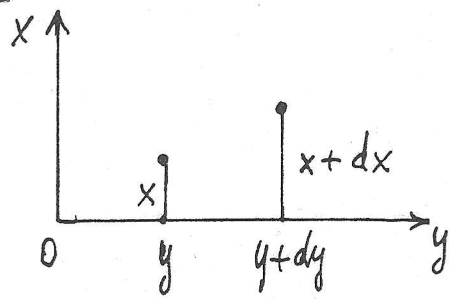
Хвильове число



Довж. хвилі - відстань між двома найближчими частинками середовища, фази коливань яких відрізняються на 2π

Не пл.: з ~~...~~ хвильовим рівнянням

Хвильове рівняння



$$x = A\cdot\cos\omega\left(t-\frac{y}{v}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = v = \dot{x} = -A\omega\cdot\sin\omega\left(t-\frac{y}{v}\right)$$

(1) $$\frac{d^2x}{dt^2} = a = \ddot{x} = -A\omega^2\cdot\cos\omega\left(t-\frac{y}{v}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= A\cdot\frac{\omega}{v}\sin\omega\left(t-\frac{y}{v}\right)\\ \frac{d^2x}{dy^2} &= -A\frac{\omega^2}{v^2}\cos\omega\left(t-\frac{y}{v}\right)\end{aligned}\right\}(2)$$

це ф-я чот. змін.

Порівнюючи (1) та (2): $$\boxed{\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2x}{dt^2}} \quad (A)$$

Хвильове рівняння

Для ~~просторової~~ (об'ємної) хвилі - $\xi(x,y,z,t)$

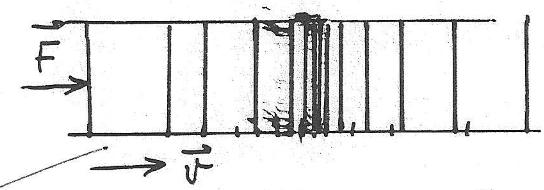
$$\boxed{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}} \quad (A')$$

$$\nabla^2\xi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0$$

$\nabla^2 = \Delta$ - оператор Лапласа (сіанa)

ξ - фіз. величина, яка хар-є збурення що розповсюджується

Швидкість поширення поздовжньої хвилі



Пружна сила

$$F = E\cdot\frac{\Delta l}{l}\cdot S$$

E – модуль Юнга

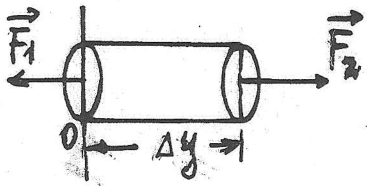
віднос поздовжнє

$$F = E\left(\frac{dx}{dy}\right)\cdot S$$

якесь середовище у стрижні відсутнє

Розкладемо силу у ряд Маклорена

$$F(y) = F(0) + F'(0)\cdot\Delta y + \ldots$$



$$F_1 = E\left(\frac{dx}{dy}\right)_0\cdot S$$

$$F_2 = E\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\Delta y}\cdot S = F_2(0) + F_2'(0)\Delta y$$

$$= E\cdot S\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)_0 + \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_0\cdot\Delta y\right]$$

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = F_2 - F_1$$

$$\rho\cdot V\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = ES\left[\cancel{\left(\frac{dx}{dy}\right)_0} + \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_0\cdot\Delta y - \cancel{\left(\frac{dx}{dy}\right)_0}\right]$$

$$\rho\cdot\cancel{S}\cdot\cancel{\Delta y}\,\frac{d^2x}{dt^2} = E\cdot\cancel{S}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_0\cdot\cancel{\Delta y}$$

Густина середовища

$$\boxed{\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\rho}{E}\,\frac{d^2x}{dt^2}}$$

Порівняємо із хвильовим рівнянням (A):

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad (3)$$

Енергія хвилі

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho\cdot V}{2}\cdot A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{y}{v}\right) \quad (4)$$

$$E_п = \frac{k\cdot\Delta l^2}{2} = \frac{F\cdot\Delta l}{2} = \frac{1}{2}\overbrace{E\cdot\frac{\Delta l}{l}\cdot S}^{=F}\cdot\Delta l =$$

$$= \frac{1}{2}E\cdot Sl\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}E\cdot V\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{dx}{dy}$$

$$= \frac{1}{2}E\cdot VA^2\frac{\omega^2}{v^2}\cdot\sin^2\omega\left(t-\frac{y}{v}\right) = (5)$$

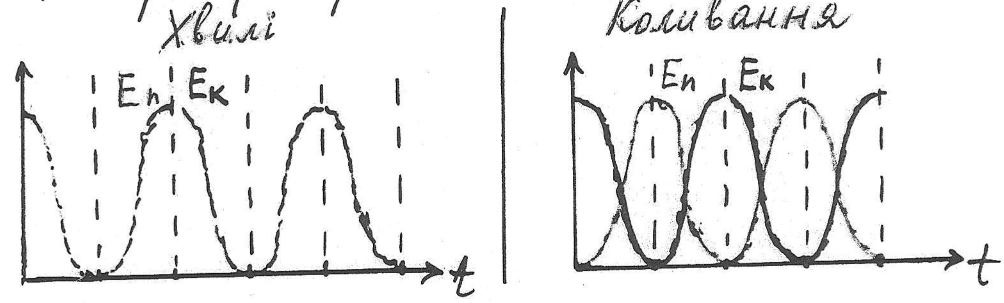
$$= \frac{1}{2}VA^2\rho\omega^2\sin^2\left(t-\frac{y}{v}\right)\cdot\omega$$

(6) Повна енергія $E_{заг} = E_п + E_к = \rho A^2 V \omega^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{y}{v}\right)$

Висновки: 1) у виділеному об'ємі середовища V кінетична та потенціальна енергії дорівнюють одна одній;

2) фази $E_к$ та $E_п$ однакові: в хвилі потенц. та кінет. енергії досягають максимального значення одночасно (знаходяться у фазі "").

На відміну від коливань!!



Об'ємна густина енергії

1) $$\boxed{\varepsilon = \frac{E_{заг}}{V} = \rho \cdot A^2 \omega^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{y}{v}\right)} \quad (7)$$

Об'ємна густина енергії хвилі (ε) в кожний момент часу в різних точках середовища різна: $\varepsilon = \varepsilon(y)$;

$\varepsilon \sim \rho$; $\varepsilon \sim A^2$; $\varepsilon \sim \omega^2$

2) Середнє значення об'ємної густини енергії за часом

(8) $$\boxed{\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2}$$ (через те, що $\langle \sin^2 \ldots \rangle_T = \frac{1}{2}$)

Перенесення енергії хвилею х-ють потоком і густиною потоку

3) Потік (Φ) — енергія, що переноситься хвилею через деяку поверхню S у перпендикулярному до неї напряму за од. часу одиницю часу

$$\boxed{\Phi = \frac{\langle \varepsilon \rangle \cdot v \cdot T \cdot S}{T} = \langle \varepsilon \rangle \cdot v \cdot S} \quad (9)$$

$$\Phi = \frac{dE_{заг}}{dt} = \frac{\langle \varepsilon \rangle \cdot dV}{dt} = \frac{\langle \varepsilon \rangle \cdot S \cdot dl}{dt} = \langle \varepsilon \rangle \cdot S \cdot v$$

27 / дикт.

4) Густина потоку енергії (u) — енергія, що переноситься через одиницю площі поверхні за одиницю часу

Середня густина потоку ен. (10) $$\boxed{\langle u \rangle = \frac{\Phi}{S} = \langle \varepsilon \rangle v}$$

5) Швидкість ($\vec{v}$) - вектор $\Rightarrow$ густина потоку енергії ($\vec{u}$) - вектор!

Напрям $\vec{u}$ збігається з напрямом поширення хвилі (напрямом $\vec{v}$).

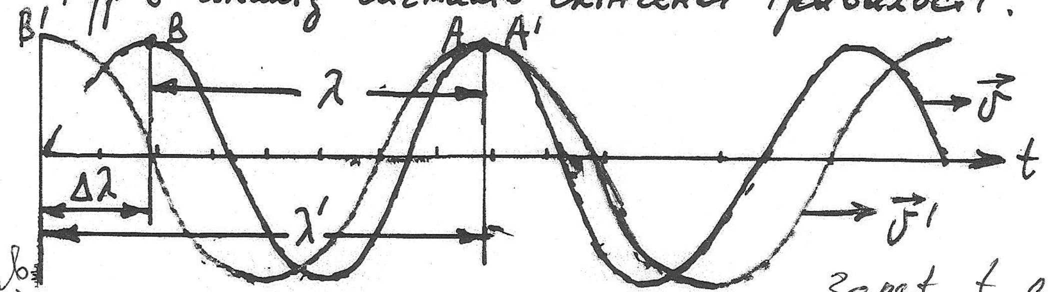
Вектор Умова-Пойтінга $\boxed{\vec{u} = \varepsilon \cdot \vec{v}}$ (11)

Фазова і групова швидкості

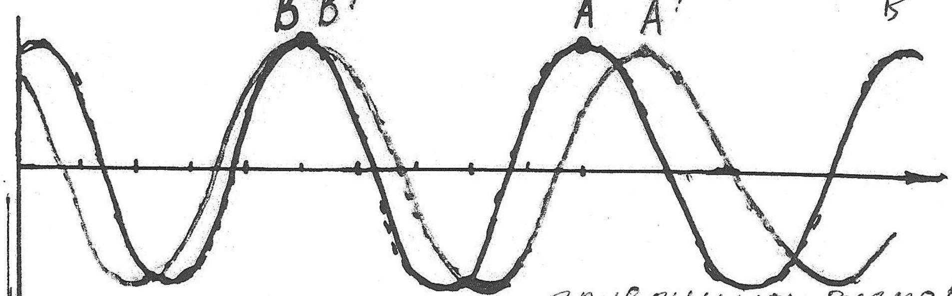
Монохроматична хвиля – хвиля однієї λ

Отримати монохр. хвилю важко: $\Delta\lambda \neq 0$!

Фур'є-аналіз сигналів скінченої тривалості!



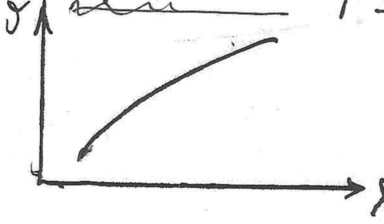
зорєt t світ Bп. B



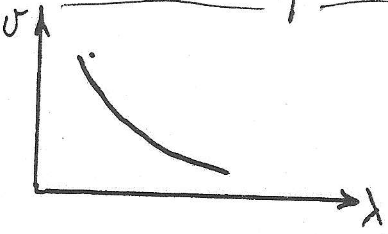
залежність розповсюд. хвилі в довж.

Дисперсія: $v(\lambda)$;

Нормальна дисперсія



Аномальна дисп.



Час, за який „горб B'" наздожене „горб B", дорівнює:

$$\tau = \frac{\Delta\lambda}{\Delta v} = \frac{\lambda' - \lambda}{v' - v} = \frac{d\lambda}{v' - v} \quad (12) \qquad \tau = \frac{d\lambda}{dv}$$

Швидкість руху „горба" – групова швидкість:

$$u = v - \frac{\lambda}{\tau} \quad (13)$$

$$v' = v + dv = v + \frac{dv}{d\lambda} \cdot d\lambda \Rightarrow v' - v = \frac{dv}{d\lambda} \cdot d\lambda \quad (14)$$

не дисперсне середов. – вакуум

гармонічних хвиль не буває

ніколи не буде джер. з чистотою монохр. випр.

Фазова шв. - v.

$$\begin{cases} \omega t - kx = const \\ \text{фаза - стала} \end{cases}$$

$$\omega \cdot dt - k \cdot dx = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

$$v = \frac{\omega}{k}$$ ФАЗ шв. шв розпр. фаза

Якщо дисперсії немає ($v \neq v(\lambda)$), то центр групи хвиль буде теж розповсюджуватись із швидкістю v.

Якщо $\frac{dv}{d\lambda} \neq 0$, то центр групи хвиль переміщується із швидкістю $u = \frac{d\omega}{dk}$ - групова шв.

$$u = \frac{d(v \cdot k)}{dk} = v + k \cdot \frac{dv}{dk} = v - \lambda \cdot \frac{dv}{d\lambda}$$

Хвильовий пакет ?

$(14) \to (12)$: $\tau = \dfrac{d\lambda}{\frac{dv}{d\lambda} \cdot d\lambda} = \dfrac{d\lambda}{dv}$ (15) (характерист.) дисперсія середовища

$(15) \to (13)$: $\boxed{u = v - \lambda \cdot \dfrac{dv}{d\lambda}}$ Формула Релея

v Гр. — ш. розп. енергії

$\dfrac{dv}{d\lambda}$ — дисперсія (залежність швидкості поширення фази хвилі від λ).

u — групова швидкість; v — фазова швидк.

Аналіз: 1) При нормальній дисперсії ($\frac{dv}{d\lambda} > 0$) групова шв. $u < v$ — фаз. швидкості;

2) У відсутності дисперсії ($dv/d\lambda$) $= 0$: $u = v$

3) В області аномальної дисперсії ($\frac{dv}{d\lambda} < 0$): $u > v$

Приклади: 1) гравітаційні хвилі на поверхні „глибокої" води: $v = c\sqrt{\lambda}$ — закон дисперсії. Із формули Релея

(c — деякий коеф.)

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = v - \lambda \frac{c}{2\sqrt{\lambda}} = v - \frac{1}{2} c\sqrt{\lambda} = v - \frac{v}{2} = \frac{v}{2}$$

$u < v \Rightarrow$ дисперсія нормальна

Горб групи таких хвиль рухається вдвічі повільніше, ніж окремі горби;

2) капілярні хвилі, обумовлені силами поверхневого натягу, на поверхні води: $v = \dfrac{c}{\sqrt{\lambda}}$.

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = v + \lambda \frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{\lambda^3}} =$$

$$= v + \frac{c}{2} \lambda^{1-3/2} = v + \frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{\lambda}} = \frac{3}{2} v$$

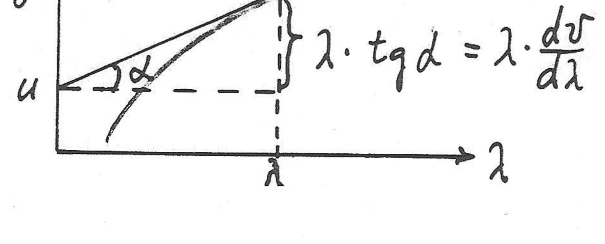
У вакуумі: $\dfrac{dv}{d\lambda} = 0 \Rightarrow u = v$.

$u > v \Rightarrow$ дисперсія аномальна

Центр групи таких хвиль рухається в 1.5 рази скоріше, ніж окрема впадина (горб).

Метод визначення групової швидкості (u)

(Метод Еренфеста)



$u = v - \lambda \cdot tg\alpha =$
$= v - \lambda \cdot (dv/d\lambda)$

II спосіб доведення формули Релея:

v – фазова швидкість

Фаза стала: $\omega t - kx = const$

$$\omega \cdot dt - k\,dx = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\omega}{k}}$$

Суперпозиція хвиль, які мало відрізняються по довжині хвилі, називається групою хвиль.

Точка, в якій амплітуда (інтенсивність) групи хвиль має max, називається центром групи хвиль.

Якщо дисперсії немає ($v \neq v(\lambda)$), то ЦГХ розповсюджується із швидкістю v.

Якщо $\frac{dv}{dk} \neq 0$, то ЦГХ переміщується із швидкістю $u = \frac{d\omega}{dk}$ – групова швидкість.

$d\lambda$

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v \cdot k)}{dk} = v \cdot \frac{dk}{dk} + k\frac{dv}{dk} = v + k\frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk} =$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k}$$

$$= v + k\frac{dv}{d\lambda} \cdot \left(-\frac{\lambda}{k}\right) = \boxed{v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} = u}$$

Формула Релея