**ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 17**

**Елементи операційного числення**

Операційне числення відіграє важливу роль при розв’язуванні прикладних задач, особливо в сучасній автоматиці і телемеханіці.

Операційне числення - один з методів математичного аналізу, що дозволяє в ряді випадків зводити дослідження диференціальних і деяких типів інтегральних операторів і розв’язування рівнянь, що містять ці оператори, до розгляду більш простих алгебраїчних задач.

Методи операційного числення припускають реалізацію наступної умовної схеми при розв’язуванні задачі.

1. Від шуканих функцій переходять до деяких інших функцій — їх зображенням.

2. Над зображеннями проводять операції, що відповідають заданим операціям над самими функціями.

3. Одержавши деякий результат при діях над зображеннями, повертаються до самих функцій.

Як перетворення, що дозволяє перейти від функції до її зображення, будемо застосовувати ***перетворення Лапласа*.**

***Тема 17.1.* Перетворення Лапласа**

**17.1.1**. **Оригінали і їхні зображення**

Основними первісними поняттями операційного числення є поняття функції-оригіналу у функції-зображення.

Нехай  — дійсна функція дійсної змінної  (під  будемо розуміти час або координату).

Функція  називається ***оригіналом***, якщо вона задовольняє умовам:

1.  при .

2.  — кусково-неперервна при , тобто вона неперервна або має точки розриву I роду, причому на кожному скінченному проміжку осі t таких точок лише скінченне число.

3. Існують такі числа  та , що для всіх t виконується нерівність , тобто при зростанні  функція  може зростати не швидше деякої показникової функції. Число  називається ***показником*** росту .

Умови 1-3 виконуються для більшості функцій, що описують різні фізичні процеси.

Перша умова означає, що процес починається з деякого моменту часу; зручніше вважати, що в початковий момент . Третій умові задовольняють обмежені функції (для них можна покласти ), степеневі  і інші (для функцій вигляду  умова 3 не виконується). Не буде оригіналом, наприклад, функція  (не задовольняє другій умові).

***Зауваження*.** Функція  може бути і комплексною функцією дійсної змінної, тобто мати вигляд ; вона вважається оригіналом, якщо дійсні функції  та  є оригіналами.

***Зображенням оригіналу***  називається функція  комплексної змінної , яка визначається інтегралом  (17.1.1)  
 Операцію переходу від оригіналу  до зображення  називають ***перетворенням Лапласа****.* Відповідність між оригіналом f(t) і зображенням  записується у вигляді  або  (прийнято оригінали позначати малими буквами, а їх зображення — відповідними великими буквами).

***Теорема******17.1.1. (існування зображення).*** *Для всякого оригіналу f(t) зображення F(p) існує (визначено) у півплощині . Де  — показник росту функції f(t), причому функція F(p) є аналітичною в цій півплощині ().*

□ Доведемо першу частину теореми. Нехай  довільна точка півплощини  (див. рис, 14). Враховувавши, що  знаходимо:





Рис. 14



так як і 

Таким чином,  (17.1.2)

Звідси випливає абсолютна збіжність інтеграла (17.1.1), тобто зображення F(p) існує й однозначне в півплощині .■

***Наслідок 17.1.1.******(необхідна ознака існування зображення).*** *Якщо функція F(p) є зображенням функції f(t), то .*

□ Це твердження безпосереднє випливає з нерівності (17.1.2), коли



Так як  — аналітична функція в півплощині , то  при  по будь-якому напрямку. Звідси, зокрема, випливає, що функції ,  не можуть бути зображеннями.

Відзначимо, що з аналітичності функції  випливає, що всі її особливі точки повинні лежати лівіше прямої  або на самій цій прямій. Функція , що не задовольняє цій умові, не є зображенням функції . Не є зображенням, наприклад, функція  (її особливі точки розташовані на всій осі s). ■

***Теорема 17.1.2 (про єдиність оригіналу).*** *Якщо функція  є зображенням двох оригіналів  і  то ці оригінали збігаються один з одним у всіх точках, у яких вони неперервні.*

(Приймемо без доведення.)

**Приклад 17.1.1.** Знайти зображення одиничної функції Хевісайда , (див. рис. 15).



Рис. 15

○ По формулі (4.1) при знаходимо:



Тобто  , або, у символічному запису, .●

***Зауваження.*** Надалі функцію-оригінал будемо коротко записувати у вигляді , маючи на увазі, що



**Приклад 17.1.2.** Знайти зображення функції t, де а — будь-яке число.

○ Дана функція є оригіналом. По формулі (17.1.2) маємо 



якщо .

Таким чином,   (17.1.3) ●

**Приклад 17.1.3.** Знайти зображення функції .

○ У цьому випадку перетворення Лапласа має вигляд



. (17.1.4) ●

***Зауваження.*** Функція  є аналітичною не тільки в півплощині  
, де інтеграл (17.1.1) збіжний, а на всій комплексній площині , крім точки . Така особливість спостерігається і для багатьох інших зображень. Далі для нас буде більш важливим, як правило, саме зображення функції, а не область, у якій воно виражається інтегралом (17.1.1).

**17.1.2. Властивості перетворення Лапласа**

Знаходити зображення, користуючись тільки означенням зображення, не завжди просто і зручно. Властивості перетворення Лапласа істотно полегшують задачу знаходження зображень для великого числа різноманітних функцій, а також задачу відшукання оригіналів по їхніх зображеннях.

# Лінійність

Лінійній комбінації оригіналів відповідає така ж лінійна комбінація зображень, тобто якщо , , - постійні числа, то .

Використовуючи властивості інтеграла, знаходимо 

**Приклад 17.1.4.** Знайти зображення функцій  ( — будь-яке число), , .

○ Користаючись властивістю лінійності, формулою (17.1.3), знаходимо:  
,  (17.1.5)

Аналогічно отримаємо формулу . (17.1.6)  
Далі  тобто .

Нарешті, 

тобто  (17.1.7)

Аналогічно отримаємо формулу  (17.1.8) ●

## *Подібність*

Якщо , то  множення аргументу оригіналу на додатне число λ приводить до ділення зображення та його аргументу на це число.

По формулі (17.1.1) маємо

 [поклавши ]



(так як немає різниці, якою буквою позначена змінна інтегрування).

Наприклад, нехай  Тоді 

***Зсув (згасання)***

Якщо , , то , тобто множення оригіналу на функцію  спричиняє зсув змінної .

В силу формули (17.1.1) маємо

 .   
Завдяки цій властивості можна розширити таблицю відповідності між оригіналами і їх зображеннями:

 (17.1.9)  
 , (17.1.10)





**Приклад 17.1.5.** Знайти оригінал по його зображенню



○ Перетворимо даний дріб так, щоб можна було скористатися властивістю зсуву:





(Див. формули (17.1.9), (17.1.10) і властивість лінійності.) ●

***Запізнювання***

Якщо , , то  , тобто запізнювання оригіналу на додатну величину  приводить до множення зображення оригіналу без запізнювання на .

Поклавши , отримаємо





Пояснимо термін «запізнювання». Графіки функції  і  мають однаковий вигляд, але графік функції  зсунутий на  одиниць вправо (див. рис. 16). Отже, функції  і  описують той самий процес, але процес, описуваний функцією , починається з запізненням на час .

Властивість запізнення зручно застосовувати при відшуканні зображення функцій, що на різних ділянках задаються різними аналітичними виразами; функцій, що описують імпульсні процеси.



Рис. 16 Рис. 17

Функція  називається ***узагальненою одиничною функцією*** (див. рис. 17).

Так як , .

Функція яка запізнюється  можна записати так: 

**Приклад 17.1.6.** Знайти зображення .

○ Для того щоб бути оригіналом, функція  повинна задовольняти умовам 1-3 (див. п. 17.1.1). Тому початкову задачу можна розуміти двояко. Якщо розуміти функцію  як  тобто  (див. рис. 18.а), то, знаючи, що  (див. формулу (4.4)), , використовуючи властивість лінійності, знаходимо

.

Якщо ж розуміти функцію  як  тобто  (див. рис. 18.б), то, використовуючи властивість запізнення, знаходимо .●



Рис. 18 Рис.19

**Приклад 17.1.7.** Знайти зображення функції 

○ Дана функція описує одиничний імпульс (див. рис. 19), який можна розглядати як різницю двох оригіналів: одиничної функції  і узагальненої одиничної функції . Тому ●

**Приклад 17.1.8.** Знайти зображення функції 



Рис. 20



○ Функція-оригінал зображено на рис. 20. Запишемо її одним аналітичним виразом, використовуючи функцію Хевісайда  та :



тобто



Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:



Зображення функції  буде дорівнює

 ●

***Зауваження.***

1. Зображення періодичного оригіналу з періодом, рівним Т, є



2. Властивість випередження 

застосовується про значно рідше.

## *Диференціювання оригіналу*

Якщо і функції  є оригіналами, то

 (17.1.11)

 (17.1.12)

 (17.1.13)

……………………………………….

 (17.1.14)

По означенню зображення знаходимо

 Отже,  Користаючись отриманим результатом, знайдемо зображення другої похідної 



Аналогічно знайдемо зображення третьої похідної



Застосовуючи формулу (17.1.11) (n - 1) раз, одержимо формулу (17.1.14).

***Зауваження.*** Формули (17.1.11)-(17.1.14) просто виглядять при нульових початкових умовах: якщо  то , якщо  то , і нарешті , якщо , то , тобто диференціюванню оригіналу відповідає множення його зображення на .

Розглянута властивість диференціювання оригіналу разом із властивістю лінійності широко використовується при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь.

**Приклад 17.1.3.** Знайти зображення виразу  якщо 

○ Нехай  Тоді, відповідно до формул (17.1.11)-(17.1.13), маємо:

,

,

,

 .

Отже,

 ●

## *Диференціювання зображення*

Якщо  , то

,

,



тобто диференціюванню зображення відповідає множення його оригіналу на .

Відповідно до теореми 17.1.1 існування зображення,  є аналітичною функцією в півплощині . Отже, у неї існує похідна будь-якого порядку. Диференціюючи інтеграл (17.1.1) по параметру  (обґрунтування законності цієї операції опускаємо), одержимо

,

тобто . Тоді ,  і взагалі 

**Приклад 17.1.10.** Знайти зображення функцій , 

○ Так як , то, в силу властивості диференціювання зображення, маємо  ,тобто 

Далі знаходимо  Продовжуючи диференціювання, отримаємо 

З урахуванням властивості зсуву отримаємо

.

Відповідно до формули (17.1.5), .

Отже, , тобто , чи

. (17.1.15)

Аналогічно, використовуючи формули (17.1.6), (17.1.7) і (17.1.8), знаходимо

. (17.1.16)



.

З урахуванням властивостей зсуву і формул (17.1.15) і (17.1.16), отримаємо

,

.●

## *Інтегрування оригіналу*

Якщо  те , тобто інтегруванню оригіналу від 0 до  відповідає ділення його зображення на . Функція  є оригіналом (можна перевірити). Нехай . Тоді по властивості диференціювання оригіналу маємо 

(так як ). А тому що



те  Звідси тобто .

***Інтегрування зображення***

Якщо  і інтеграл  сходиться, то  тобто інтегруванню зображення від  до  відповідає розподіл його оригіналу на .

Використовуючи формулу (17.1.1) і змінюючи порядок інтегрування (o6підстава законності цієї операції упускаємо), отримаємо



.

**Приклад 17.1.11.** Знайти зображення функції ; знайти зображення  інтегрального синуса 

○ Так як , то , тобто . Застосовуючи властивість інтегрування оригіналу, отримаємо .

Множення зображень

Якщо , то . (17.1.17)

Можна показати , що функція  є оригіналом.

Використовуючи перетворення Лапласа (17.1.1), можна 

Область D інтегрування отриманого дворазового інтеграла визначається умовами  (див. рис. 21).Змінюючи порядок інтегрування і думаючи  одержимо

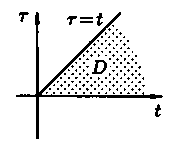


Рис. 21





Інтеграл у правій частині формули (17.1.17) називається згорткою функції  й  і позначається символом , тобто 

Можна переконатися (поклавши ), що згортання має властивість перестановки, тобто 

Отже, множення оригіналів рівносильне їхньому згортанню, тобто

●

**Приклад 17.1.12.** Знайти оригінал функцій

 і 

○ Так як , і ,



тобто 

Аналогічно отримаємо 

***Наслідок 17.1.2.*** *Якщо  і  також є оригіналом, то *  (17.1.18)

□ Запишемо добуток  у вигляді



чи 

Перший доданок у правій частині є добуток зображень, що відповідають оригіналам  і  Тому на підставі властивості множення зображень і лінійності можна записати  чи ■

Формула (17.1.18) називається ***формулою Дюамеля.***

На підставі властивості перестановки згортки формулу Дюамеля можна записати у вигляді 

Формулу Дюамеля можна застосовувати для визначення оригіналів по відомих зображеннях.

**Приклад 17.1.13.** Знайти оригінал, що відповідає зображенню 

○ Так як  і , ,

де на підставі формули Дюамеля (17.1.18) маємо

●

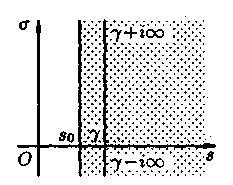


Рис. 22

***Множення оригіналів***

*Якщо  і , то *

де шлях інтегрування — вертикальна пряма  (див. рис. 22) (приймемо без доведення).

***Резюме***

Розглянуті властивості перетворення Лапласа являють собою основні правила (апарат) операційного числення. Для зручності користування перелічимо ці властивості.

1. Лінійність: 
2. Подібність: 
3. Зсув: .
4. Запізнювання: 
5. Диференціювання оригіналу:







…………………………………………...

1. Диференціювання зображення





………………………………………......

1. Інтегрування оригіналу: .
2. Інтегрування зображення: .
3. Множення зображень: 
4. Множення оригіналів: 

**17.1.3. Таблиця оригіналів і зображень**

Складемо коротку таблицю, що установлює відповідність між деякими оригіналами (часто зустрічаються на практиці) і їх зображеннями. Досить повна таблиця оригіналів і зображень, що дозволяє по заданому оригіналі знаходити зображення і навпаки; є зокрема, у книзі «Довідник по операційному численню» (автори В.А.Диткин і П.И.Кузнєцов).

***Таблиця оригіналів і зображень***

|  |  |
| --- | --- |
| Оригінал | Зображення |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| (n - ціле) |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Тема 17.2.* Обернене перетворення Лапласа**

**17.2.1. Теореми розкладу**

Розглянемо двох теорем, називані Теоремами розкладання, що дозволяють по заданому зображенню знаходити відповідний йому оригінал .

***Теорема 17.2.1.*** *Якщо функція  в околі точки  може бути представлена у вигляді ряду Лорана*

**

*де функція*

**

*є оригіналом, що має зображення , тобто*

**

Приймемо цю теорему без доведення.

**Приклад 17.2.1.** Знайти оригінал , якщо



○ Маємо



Отже, на підставі теореми 17.1.1. .

Запишемо розкладання функції за Лораном  в околиці точки :



де , тобто . Отже, тобто .●

***Теорема 17.2.2*** *Якщо - правильний раціональний дріб, знаменник якого має лише прості корені (нулі)  то функція*

**  (17.2.1)

*є оригіналом, що має зображення .*

Відзначимо, що дріб  повинний бути правильний (степінь багаточлена  нижче ступеня багаточлена ); у противному випадку не виконується необхідна ознака існування зображення  (п. 17.1.1), тобто  може бути зображенням.

□ Розкладемо правильний раціональний дріб  найпростіші:



де — невизначені коефіцієнти. Для визначення коефіцієнта  цього розкладання помножимо обох частин цієї рівності почленно на :



Переходячи в цій рівності до межі при , отримаємо



Отже,  Аналогічним шляхом (множачи обидві частини рівності (17.1.1) на ) знайдемо

Підставляючи знайдені значення  в рівність (17.1.1), одержимо



Так як по формулі (4.3) ,  , … ,

То на підставі властивості лінійності маємо ■

***Зауваження.*** Легко помітити, що коефіцієнти  визначаються як відрахування комплексної функції  у простих полюсах (формула (17.1.4)): 

Можна показати, що якщо - правильний дріб, але корені (нулі)  знаменника  мають кратності  відповідно, то в цьому випадку оригінал зображення  визначається формулою

 (17.2.3)

Теорему 5.2 можна сформулювати в такий спосіб:

***Теорема 17.2.3.*** *Якщо зображення  є дрібно-раціональною функцією від і - прості чи кратні полюси цієї функції, то оригінал  відповідний зображенню , визначається формулою*

** (17.2.4)

**Тема 17.2.2. Формула Рімана-Мелліна**

*Загальний спосіб визначення оригіналу по зображенню дає зворотне перетворення Лапласа (формула звертання Рімана-Мелліна), що має вигляд*

**  (17.2.5)

*де інтеграл береться уздовж будь-якої прямої *

*За певних умов інтеграл (5.5) обчислюється по формулі*

**

***Зауваження***. На практиці відшукання функції-оригіналу звичайно проводять за наступним планом: спочатку випливає по таблиці оригіналів і зображень спробувати відшукати для заданого зображення  відповідний йому оригінал; другий шлях полягає в тому, що функцію  намагаються представити у вигляді суми найпростіших раціональних дробів, а потім, користаючись властивістю лінійності, знайти оригінал; нарешті, використовувати теореми розкладання, властивість множення зображень, формулу звертання і т.д.

**Приклад 17.2.2.** Знайти оригінал по його зображенню 

○ Найпростіше надійти так:



(використовували властивість лінійності а формули (17.1.5): і (17.1.6)).

Якщо ж використовувати теорему 17.2.1 розкладання, то будемо мати: корені знаменника і, відповідно до формули (17.1.1),





●

**Приклад 17.2.3** Знайти функцію оригінал, якщо її зображення задане як 

○ Тут - простий корінь знаменника, - 3-кратний корінь (m=3). Використовуючи формули (17.2.1) і (17.2.3), маємо:



 тобто 

Приведемо інший спосіб перебування . Розіб'ємо дріб . Розіб'ємо дріб  на суму найпростіших дробів:  Отже 

Приведемо третій спосіб перебування . Представимо як добуток і так як  і  , то користаючись властивістю множення зображень, маємо:





●

***Тема 17.3* Операційний метод розв’язування лінійних диференціальних рівнянь і їх систем**

Нехай потрібно знайти правильне розв'язування лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами

 (17.3.1)  
 задовольняюче початковим умовам

 де - задані числа.

Будемо вважати, що шукана функція  разом з її розглянутими похідними і функція  є оригіналами.

Нехай  і  Користаючись властивостями диференціювання оригіналу і лінійності, перейдемо в рівнянні (17.3.1) від оригіналів до зображень:





Отримане рівняння називають ***операторним (чи рівнянням у зображеннях).*** Розв'яжемо його відносно :



 тобто де  і - алгебраїчні багаточлени від степеня  і  відповідно.

З останнього рівняння знаходимо

 (17.3.2)

Отриману рівність називають операторним розв’язуванням диференціального рівняння (17.3.1). Воно має більш простий вигляд, якщо всі початкові умови дорівнюють нулю, тобто В цьому випадку 

Знаходячи оригінал , що відповідає знайденому зображенню (17.3.2), отримаємо, у силу теореми одиничності, частка Розв'язування диференціального рівняння (17.3.1).

Зауваження. Отримане Розв'язування  у багатьох випадках виявляється справедливим при всіх значеннях t (а не тільки при ).

**Приклад 17.3.1.** Вирішити операційним методом диференціальне рівняння  при умовах 

○ Нехай . Тоді



 і .

Підставляючи ці вираження в диференціальне рівняння, отримаємо операторне рівняння:  звідси 

Знаходимо . Можна розбити дріб на суму  але так як корені знаменника прості, то зручно скористатися другою теоремою розкладання

(формула (17.2.1)), у якій





Отримаємо:

●

**Приклад 17.3.2.** Знайти розв'язок рівняння



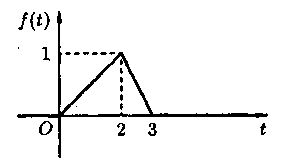


Рис. 23

за умови 

○ Графік даної функції має вигляд, зображений на рис. 23. За допомогою одиничної функції праву частину даного диференціального рівняння можна записати одним аналітичним вираженням:









Таким чином, маємо 

Операторне рівняння, при нульових початкових умовах має вигляд 

Звідси



Taк як

,

тоді по теоремі запізнювання знаходимо:



●

Аналогічно застосовується операційний метод для Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Покажемо це на конкретному прикладі.

**Приклад 17.3.3.** Розв’язати систему диференціальних рівнянь

○ Нехай

Знаходимо, що



Система операторних рівнянь приймає вигляд 

Вирішуючи цю систему алгебраїчних рівнянь, знаходимо:







Переходячи від зображень до оригіналів, отримаємо шукані Розв'язування: ,

,

.

Відповідь: ●

За допомогою операційного числення можна також знаходити Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з перемінними коефіцієнтами, рівнянь у частинних похідних, рівнянь у кінцевих різницях (різницевих рівнянь); робити підсумовування рядів; обчислювати інтеграли. При цьому Розв'язування цих і інших задач значно спрощується.