# Список результатів та формул з курсу "Комплексний аналіз", які студент має знати напам'ять

1) Комплексні числа
   a) Дії над комплексними числами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \qquad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2), \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

   b) Модуль і аргумент комплексного числа:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad \mathrm{Arg} z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,(y/x) + 2k\pi & \text{в I та IV квадрантах} \\ \mathrm{arctg}\,(y/x) + (2k+1)\pi & \text{в II та III квадрантах} \end{cases}$$

   c) Формула Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
   d) Формула Муавра: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, n \in \mathbb{Z}$.
   e) Формула кореня $n$–го степеня з комплексного числа:

$$\left\{\sqrt[n]{z}\right\}_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\arg z + 2\pi k)/n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

2) Аналітичні функції
   a) Три означення аналітичної функції.
   b) Умови Коші–Рімана в ортогональних координатах:

$$\begin{aligned} &\text{у декартових:} && u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x \\ &\text{у полярних:} && u_\rho = \frac{1}{\rho}v_\varphi, \quad \frac{1}{\rho}u_\varphi = -v_\rho \\ &\text{у довільних:} && u_s = v_n, \quad u_n = -v_s \\ &\text{комплексний запис:} && \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0. \end{aligned}$$

   c) Формальні похідні Коші:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

   d) Формули для похідної аналітичної функції через похідні від її дійсної та уявної частин:

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x.$$

   e) Означення конформного перетворення. Геометричний зміст модуля та аргумента похідної аналітичної функції.
   f) Формули довжини кривої: $l(\gamma^*) = \int_\gamma |f'(z)| \cdot |dz|$ та площа області: $S(D^*) = \iint_D |f'(z)|^2 dxdy$.

3) Інтеграл від функції комплексної змінної.
   a) Означення інтеграла від функції комплексної змінної.
   b) Інтеграл ортогональності:

$$\int\limits_{|z|=R} z^n dz = 2\pi i \delta_{n,-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   c) Значення інтеграла від аналітичної функції по межі області її аналітичності (інтегральна теорема Коші):

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

   d) Інтегральні формули Коші:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \notin \overline{D}. \end{cases}$$

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{(n+1)}}d\zeta = \begin{cases} f^{(n)}(z), & z \in D \\ 0, & z \notin \overline{D}. \end{cases}$$

4) Аналітична функція та степеневі ряди.

a) Представлення функції, аналітичної в крузі, степеневим рядом (формула Тейлора):

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \quad c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

b) Формула Коші-Адамара для радіусу збіжності степеневого ряда: $1/R=\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$

c) Означення нуля аналітичної функції та його порядка.
і

d) Представлення функції, аналітичної в кільці, степеневим рядом (формула Лорана):

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n\ , \quad \text{де} \quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|\zeta-a|=\rho\\ r<\rho<R}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta.$$

e) Означення та класифікація ізольованих особливих точок однозначної аналітичної функції (усувні точки, полюси, суттєво особливі точки).

f) Поведінка аналітичної функції в околі ізольованої особливої точки.

$$\begin{aligned}
\text{усувна точка:}\quad & \lim_{z\to a}f(z)=c_0\neq\infty,\\
\text{полюс:}\quad & \lim_{z\to a}f(z)=\infty,\\
\text{суттєво особлива точка:}\quad & \text{теорема Сохоцького.}
\end{aligned}$$

5) Теорія лишків

a) Означення лишка:

$$\operatorname*{res}_{z=a}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)dz$$

b) Формули обчислення лишків:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{res}_{z=a}f(z)=c_{-1}\quad & \text{в точці аналітичності або в усувній}\\
\operatorname*{res}_{z=a}f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)\quad & \text{для полюса першого порядка}\\
\operatorname*{res}_{z=a}\frac{\phi(z)}{\psi(z)}=\frac{\phi(a)}{\psi'(a)}\quad & \text{для полюса першого порядка}\\
\operatorname*{res}_{z=a}f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-a)^nf(z)\Big)\quad & \text{для полюса } n\text{–го порядка}\\
\operatorname*{res}_{z=a}\frac{\phi(z)}{(z-a)^n}=\frac{\phi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\quad & \text{для полюса } n\text{–го порядка}\\
\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)=-c_{-1}\quad & \\
\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k}f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)=0\quad & \text{теорема про повну суму лишків}
\end{aligned}$$

c) Формула обчислення інтеграла по замкненому контуру від аналітичної функції за допомогою лишків (теорема про лишкі):

$$\int\limits_{\partial D}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k\in D}f(z).$$

d) Означення логарифмічного лишка.

e) Формула обчислення інтеграла по замкненому контуру від похідної аналітичної функції за допомогою лишків (теорема про логарифмічні лишкі):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N[f(z)]-P[f(z)].$$

f) Основна теорема алгебри.

6) Аналітичне продовження.Ріманова поверхня.

a) Означення, зміст та методи аналітичного продовження.
b) Дійсно-аналітичні функції та їхнє продовження (разом із співвідношеннями між ними) з дійсної прямої в комплексну площину.
c) Багатозначні аналітичні функції.
d) Поняття рімановой поверхні.

7) Конформні відображення.
a) Теорема Рімана про конформне відображення довільної області в круг.
b) Означення гармонічної функції.
c) Спряжені гармонічні функції та зв'язок між ними:

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y dx + u_x dy \; + \text{const}.$$

d) Формула перетворення оператора Лапласа при конформних відображеннях:

$$u_{xx} + u_{yy} = |f'(z)|^2 \left(U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}\right).$$

e) Означення дробово–лінійних функцій, їхня класифікація (еліптичні, гіперболічні, параболічні, локсодромічні) та основні властивості (конформність відображення, групова та кругова властивості).
f) Визначення дробово–лінійної функції за трьома точками:

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

g) Формули дробово–лінійного відображення:

$$\text{круга на круг:} \qquad w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}},$$

$$\text{напівплощини на круг:} \qquad w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}.$$

h) Формула Крістофеля–Шварца для відображення напівплощини (круга) в багатокутник:

$$f(z) = C \int\limits_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k - 1} dz + w_0$$

8) Фізичний зміст аналітичної функції. Функції Гріна. Задача Діріхле.
a) Фізичний зміст аналітичної функції як комплексного потенціала векторного поля на площині.
b) Нуль комплексного потенціала та критична точка векторного поля.
c) Особливі точки комплексного потенціала та заряди і мультиполі векторного поля.
d) Означення функції Гріна області та її фізичний зміст.
e) Вираз функції Гріна через функцію конформного відображення області на круг:

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |f(z, z_0)|.$$

f) Функція Гріна для простіших областей:

$$\text{для одиничного круга:} \qquad G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}} \right|,$$

$$\text{для верхньої напівплощини:} \qquad G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \right|.$$

g) Постановка задачі Діріхле.
h) Формула розв'язку задачі Діріхле за допомогою функції Гріна.

$$u(z_0) = \int\limits_{\partial D} u_0(z) \frac{\partial G(z, z_0)}{\partial n} dz,$$

i) Розв'язок задачі Діріхле для круга (формула Шварца):

$$u(z_0) = \mathrm{Re}\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} u_0(z) \frac{z+z_0}{z-z_0} \frac{dz}{z}.$$

j) Розв'язок задачі Діріхле для півплощини (формула Шварца):

$$u(z_0) = \mathrm{Re}\ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \frac{dx}{x-z_0}.$$

9) Перетворення Лапласа.

a) Формули перетворення Лапласа та зворотного перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \qquad f(t) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

Зв'язок між зображенням і оригіналом позначають: $f(t) \risingdotseq F(p)$, або $F(p) \risingdotseq f(t)$.

b) Основні властивості перетворення Лапласа:

1° Лінійність: $\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$.

2° Подібність: $f(\alpha t) \risingdotseq \dfrac{F(p/\alpha)}{\alpha}$.

3° Запізнення: $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$.

4° Зсув: $e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p-p_0)$.

5° Згортка: $F(p)G(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$.

6° Диференціювання оригінала: $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$.

7° Диференціювання зображення: $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t)$.

8° Інтегрування оригінала: $\int\limits_0^t f(t) dt \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

9° Інтегрування зображення: $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty} F(p) dp$.

c) Методи розв'язання лінійних диференціальних, різницевих та інтегральних рівнянь за допомогою перетворення Лапласа.

10) Елементи теорії диференціальних рівнянь з аналітичними коефіцієнтами.

a) Звичайні, регулярні та іррегулярні особливі точки диференціального рівняння.

b) Формули для розв'язків диференціального рівняння в околі особливих точок:

$$\begin{aligned} w_1(z) &= (z-z_0)^{\rho_1} f_1(z), \qquad w_2(z) = (z-z_0)^{\rho_2} f_2(z), \\ w_1(z) &= (z-z_0)^{\rho_1} f_1(z), \qquad w_2(z) = w_1(z) \left[ f_3(z) + \sigma \ln(z-z_0) \right], \\ & \lambda_k = \exp(2\pi i \rho_k), \lambda = 1/2\pi i \sigma. \end{aligned}$$

c) Рівняння класу Фукса:

$$\begin{aligned} & w'' + \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)}}{z-z_k} \right) w' \\ & + \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_1^{(k)} \rho_2^{(k)}}{z-z_k} \prod_{l=1, l\neq k}^{n} (z_k - z_l) + Q_{n-2}(z) \right) \frac{w}{\prod_{k=1}^{n} (z-z_k)} = 0, \end{aligned}$$

d) Гіпергеометричне рівняння як диференціальне рівняння з трьома регулярними особливими точками.

e) Загальний вигляд рівняння Гаусса для функції $u =_2 F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta | z)$:

$$z(1-z)u'' + \left[\beta - (\alpha_1 + \alpha_2 + 1) z\right] u' - \alpha_1 \alpha_2 u = 0.$$

f) Загальний вигляд рівняння рівняння Куммера для функції $u =_1 F_1(\alpha; \beta | z)$:

$$zu'' + \left[\beta - z\right] u' - \alpha u = 0.$$