Київський Національний університет імені Тараса Шевченка

Є. Д. Білоколос, Д. Д. Шека

Збірник задач з комплексного аналізу

**Навчальний посібник
для студентів природничих факультетів**

Київ
2004

УДК 530.145
ББК 22.331

версія 2.2 (27.02.04)

Є. Д. Білоколос, Д. Д. Шека
Збірник задач з комплексного аналізу: Навчальний посібник для студентів природничих факультетів. — К., 2004.-57 с.

Збірник містить 842 задач з курсу комплексного аналіза, який автори читають на радіофізичному факультеті Київського національного університета імені Тараса Шевченка. Збірник може бути рекомендовано студентам, аспірантам і викладачам фізичних та фізико–математичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Збірник може бути корисним також і для самопідготовки.

© Є. Д. Білоколос, Д. Д. Шека, 2003—2004

Зміст

Глава 1

Основні поняття комплексного аналізу

§1.1. Операції над комплексними числами

Комплексним числом називають вираз $z = x + iy$, де x та y — дійсні числа, i — це символ, що називають уявною одиницею, тобто число, квадрат якого дорівнює -1, $i^2 = -1$.

Два комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ рівні одне одному, якщо $x_1 = x_2$ та $y_1 = y_2$.

Комплексне число $z_2 = x_2 + iy_2$ називають *комплексно спряженим* до $z_1 = x_1 + iy_1$, якщо $x_2 = x_1$ і $y_2 = -y_1$. Комплексно спряжене до числа z позначають як $\overline{z}$. Таким чином, $\overline{x + iy} = x - iy$.

Комплексне число z можна подати також у *тригонометричній формі* $z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ та у *показниковій формі* $z = \rho e^{i\varphi}$. Полярний радіус ρ називають *модулем* комплексного числа та позначають $|z|$, а полярний кут φ — його *аргументом* та позначають як $\mathrm{Arg}z$. На відміну від модуля комплексного числа $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, що визначений однозначно, аргумент

$$\mathrm{Arg}z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,(y/x) + 2k\pi & \text{в I та IV квадрантах} \\ \mathrm{arctg}\,(y/x) + (2k+1)\pi & \text{в II та III квадрантах} \end{cases}$$

визначений з точністю до будь-якого цілого $k \in \mathbb{Z}$.

Основні операції на множині комплексних чисел здійснюються таким же чином, як операції над поліномами відносно i:

- Сумою $z_1 + z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називають комплексне число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

- Різницею $z_1 - z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називають комплексне число

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

- Добутком $z_1 z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називають комплексне число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

- Часткою z_1/z_2 від ділення комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на комплексне число $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ називають комплексне число

$$z = z_1/z_2 = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Операція ділення має зміст тільки за умови $z_2 \neq 0$.

В прикладах 1–12 знайти дійсну та уявну частину комплексних чисел

1. $z = \dfrac{1+i}{2-3i}$.

2. $z = i\dfrac{(2+i)^2}{(3+i)^2}$.

3. $z = \dfrac{i}{(3+4i)^{17}}$.

4. $z = \dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^5}$.

5. $z = (2 + i\sqrt{5})^4$.

6. $z = (\sqrt{7} + 3i)^{-5}$.

7. $z = \dfrac{\left(\sqrt{13} + i\sqrt{3}\right)^8}{\left(i - 2\sqrt{2}\right)^3}$.

8. $z = (5+i)^3(2i+1)^2$.

9. $z = \left(\dfrac{i^{13}+1}{7i+1}\right)^2$.

10. $z = \dfrac{(4i+1)^5}{(2+3i)^3}$.

11. $z = \dfrac{(2i^{31}+1)^3}{(2i+5)^2}$.

12. $z = \dfrac{(1+i)(4-3i)^3}{1-i}$.

В прикладах 13–27 знайти модуль та аргумент комплексних чисел (під коренем $\sqrt{\cdots}$ слід розуміти його арифметичне значення).

13. $z = 7i$.

14. $z = -3$.

15. $z = 1 + \sqrt{3}i$.

16. $z = -2 + 3i$.

17. $z = 7 - 3i$.

18. $z = a + ib$, де $a, b \in \mathbb{R}$.

19. $(\sqrt{3} + i\sqrt{6})^6$.

20. $\dfrac{(1+i)^8}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5}$.

21. $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.

22. $z = -\cos\alpha + i\sin\alpha$.

23. $z = \sin\alpha + i\cos\alpha$.

24. $(5+2i)^5$.

25. $\left(2 + i^{73}\sqrt{12}\right)^4$.

26. $\dfrac{(4-3i)^4}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3}$.

27. $\dfrac{\left(\sqrt{11} + i\sqrt{14}\right)^7}{1 - i\sqrt{3}}$.

В прикладах 28–39 записати комплексні числа у показниковій формі (під коренем $\sqrt{\cdots}$ слід розуміти його арифметичне значення).

28. $z = (17 + 34i)^2$

29. $z = (6+i)^{-3}$.

30. $z = \left(i\sqrt{5} + 4\right)^{-7}$.

31. $z = \left(i\sqrt{7} + \sqrt{14}\right)^3$.

32. $z = \left(-\sqrt{3} + i\right)^{-5}$.

33. $z = \dfrac{(3-4i)^4}{(2+5i)^3}$.

34. $z = \dfrac{\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{23}\right)^7}{(1-3i)^4}$.

35. $z = \dfrac{(11i-3)^8}{\left(\sqrt{15} - i\sqrt{10}\right)^{12}}$.

36. $z = \dfrac{i+\sqrt{15}}{\left(-\sqrt{14}+i\sqrt{2}\right)^{11}}$.

37. $z = i\dfrac{\left(5+i\sqrt{11}\right)^{9}}{-3-4i}$.

38. $z = \dfrac{\left(7i^7+\sqrt{15}\right)^{8}}{(1+i\sqrt{3})^5\left(-\sqrt{7}-3i\right)^{3}}$.

39. $z = \dfrac{\left(12+5i^3\right)^{4}}{(3-4i)^7\left(-2-i\sqrt{21}\right)^{3}}$.

40. Доведіть формулу Муавра $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

В прикладах 41–46, використовуючи формулу Муавра, записати зазначені вирази через степені $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$.

41. $\cos 4\varphi$.
42. $\cos 5\varphi$.
43. $\cos 7\varphi$.
44. $\cos 9\varphi$.
45. $\sin 3\varphi$.
46. $\sin 4\varphi$.
47. $\sin 5\varphi$.
48. $\sin 8\varphi$.

49. Довести, що $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \dfrac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$.

50. Довести, що при будь-яких $z \in \mathbb{C}$ справедлива формула $|\sqrt{z^2-1}+z| + |\sqrt{z^2-1}-z| = |z-1|+|z+1|$.

§1.2. Способи зображення комплексних чисел

Для *геометричної інтерпретації* комплексне число $z = x+iy$ зображають точкою з координатами (x, y) декартової площини xOy (саму площину при цьому називають *комплексною*). Вісь x будемо називати дійсною віссю, вісь iy — уявною. Відповідність між множиною $\mathbb{C}$ та комплексною площиною є взаємно однозначною; тому далі ми не будемо розрізнювати терміни комплексного числа та точки комплексної площини. Виходячи з тригонометричної форму запису комплексного числа z, бачимо, що геометрично модуль ρ та аргумента φ є полярними координатами радіус-вектора точки z (див. рис. 1.1).

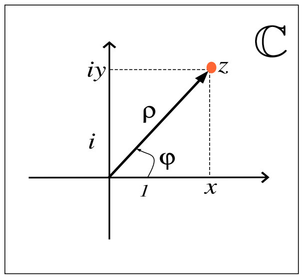

Рис. 1.1.

Геометрічний зміст операцій додавання та віднімання полягає в тому, що комплексні числа додаються та віднімаються таким же чином, як і вектори (див. рис. 1.2). Виходячи з геометричної інтерпретації, для будь-яких двох комплексних чисел z_1 та z_2 можна довести нерівність трикутника

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|.$$

Однак, слід зазначити, що при операціях множення та ділення комплексні числа виконують обов'язкі лінійних операторів. Геометрично множення комплексного числа z на комплексне число $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ зводиться до повороту вектора z на кут φ_1 та зміни його довжини в ρ_1 разів, тобто z ми розглядаємо як вектор, а z_1 як лінійний оператор, що діє на цей вектор (або навпаки).

У зв'язку з цим буває корисною *матричне зображення* комплексних чисел: комплексне число $z = x + iy$ може бути ототожнено з матрицею другого порядку, що має спеціальний вигляд

$$z = \left\| \begin{matrix} x & y \\ -y & x \end{matrix} \right\|.$$

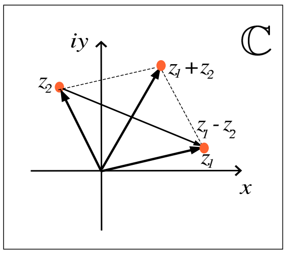

Рис. 1.2.

При такому ототожнені алгебраїчні операції додавання, віднімання, множення та ділення виконуються за звичайними правилами матричної алгебри.

В прикладах 51–77 зобразити на $\mathbb{C}$-площині множину точок $\mathcal{M}$.

51. $\mathcal{M} = \{z : |z-a| = R\}$, де $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}_+$.

52. $\mathcal{M} = \{z : |z-a| < R\}$, де $a \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}_+$.

53. $\mathcal{M} = \{z : |z-i| > 4\}$.

54. $\mathcal{M} = \{z : |z+1-2i| < 3\}$.

55. $\mathcal{M}=\{z : |z-z_1| + |z-z_2| = R\}$, де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}_+$.

56. $\mathcal{M} = \{z : |z-i| + |z+i| < 5\}$.

57. $\mathcal{M} = \{z : |z-z_1| = |z-z_2|\}$, де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

58. $\mathcal{M} = \{z : \alpha < \arg(z-z_0) < \beta\}$, де $z_0 \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.

59. $\mathcal{M} = \left\{z : \operatorname{Im} \dfrac{z+i}{z+7i} = 0\right\}$.

60. $\mathcal{M} = \left\{z : 0 < \arg \dfrac{i-z}{i+z} < \frac{\pi}{2}\right\}$.

61. $\mathcal{M} = \left\{z : \left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = a,\right\}$, де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}_+$.

62. $\mathcal{M} = \left\{z : \operatorname{Re} \dfrac{z-a}{z-b} = 0\right\}$, де $a, b \in \mathbb{C}$.

63. $\mathcal{M} = \{z : \operatorname{Re} 1/z < 1/2\}$.

64. $\mathcal{M} = \left\{z : \operatorname{Im} \dfrac{z-a}{z-b} = 0\right\}$, де $a, b \in \mathbb{C}$.

65. $\mathcal{M} = \left\{z_1, z_2, z_3 : |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,\ z_1 + z_2 + z_3 = 0\right\}$.

66. $\mathcal{M} = \{z : \operatorname{Re} z + 2\operatorname{Im} z = 0\}$.

67. $\mathcal{M}=\{z : ||z-1| - |z-2i||=6\}$.

68. $\mathcal{M} = \left\{z : \operatorname{Re} \dfrac{z-1}{z+2i} = 0\right\}$.

69. $\mathcal{M} = \{z : 2|z| < 1 + \operatorname{Im} z\}$.

70. $\mathcal{M} = \{z : |z| > 1 - \operatorname{Re} z\}$.

71. $\mathcal{M} = \left\{z : \operatorname{Re} \dfrac{z+2i}{z+1} = 1\right\}$.

72. $\mathcal{M} = \left\{z : \operatorname{Im} \dfrac{z+2}{z+i} = 0\right\}$.

73. $\mathcal{M} = \left\{z : \operatorname{Re} \dfrac{z-a}{z+a} = 0\right\}$, де $a \in \mathbb{R}_+$.

74. $\mathcal{M} = \{z : ||z-a| - |z-b|| = 1\}$, де $a, b \in \mathbb{C}$.

75. $\mathcal{M} = \left\{z : \operatorname{Im} \dfrac{z-a}{z+a} = 0\right\}$, де $a \in \mathbb{N}$.

76. $\mathcal{M} = \left\{z \ : \ \frac{\pi}{2} < \arg(z-2i)^2 < \pi\right\}$ **77.** $\mathcal{M} = \left\{z \ : \ \operatorname{Im} \dfrac{2z-1+i}{z+i} = 0\right\}$.

78. Виходячи з геометричної інтерпретації комплексних чисел, довести нерівність $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Довести зазначену нерівність також алгебраїчним шляхом.

79. Виходячи з геометричної інтерпретації комплексних чисел, довести нерівність $|z_1 - z_2| \le \Big||z_1| - |z_2|\Big|$. Довести зазначену нерівність також алгебраїчним шляхом.

80. Виходячи з геометричної інтерпретації комплексних чисел, довести нерівність $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \le |\arg z|$.

81. Виходячи з геометричної інтерпретації комплексних чисел, довести нерівність $|z-1| \le \Big||z|-1\Big| + |z||\arg z|$.

82. Нехай $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ та $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$. Довести, що точки z_1, z_2, z_3 є вершинами правильного трикутника, що вписаний в коло $|z| = R$.

83. Нехай точки z_1, z_2, z_3 знаходяться на колі з центром в точці 0. Довести, що трикутник з вершинами в точках z_1, z_2, z_3 є правильним тоді і лише тоді, коли $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

84. Довести, що комплексні числа z_1, z_2, z_3 знаходяться на одній прямій, якщо вони задовольняють умовам $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1,} \in \mathbb{R}$.

85. Довести, що комплексні числа z_1, z_2, z_3, z_4 лежать на колі, якщо вони задовольняють умовам $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} : \dfrac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4,} \in \mathbb{R}$.

86. Нехай $z_1 \ne z_2 \ne z_3$. За якої умови точки z_1, z_2, z_3 знаходяться на одній прямій?

87. Нехай $z_1 \ne z_2 \ne z_3 \ne z_4$. За якої умови точки z_1, z_2, z_3, z_4 знаходяться на одному колі або прямій?

88. З'ясувати зміст комплексного числа z як лінійного оператора.

89. Виходячи з матричної інтерпретації комплексних чисел, знайти матричне зображення операції комплексного спряження.

90. Виходячи з матричної інтерпретації комплексних чисел, знайти матричне зображення модуля комплексного числа.

91. Виходячи з матричної інтерпретації комплексних чисел, знайти матричне зображення комплексного числа $1/z$.

92. Виходячи з матричного зображення комплексних чисел, з'ясувати зміст операції множення комплексних чисел. Обчислити, використовуючи матричне зображення, наступний добуток: $(2+3i)(-1+i\sqrt{3})$.

93. Виходячи з матричного зображення комплексних чисел, з'ясувати зміст операції ділення комплексних чисел. Обчислити, використовуючи матричне зображення, наступну частку: $\dfrac{1-i}{1+i}$.

94. Довести, що для будь-якої унітарної матриці $U = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}$ виконується співвідношення $U^n = \begin{Vmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{Vmatrix}$, де $n \in \mathbb{N}$.

§1.3. Добування кореня з комплексного числа

Показникова форма запису комплексного числа є зручною при розгляданні алгебраїчних операцій піднесення до степеня та добування кореня. Так, якщо $z = z_1^n$, то $\rho = \rho_1^n$, $\varphi = n\varphi_1$. Комплексне число z_1 називається коренем n-го степеня комплексного числа z, якщо $z = z_1^n$.

Алгебраїчне рівняння $z^n = a$, де $a \equiv |a|e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ має при $a \neq 0$ рівно n різних коренів, що визначаються за формулою

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i(\alpha+2\pi k)/n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

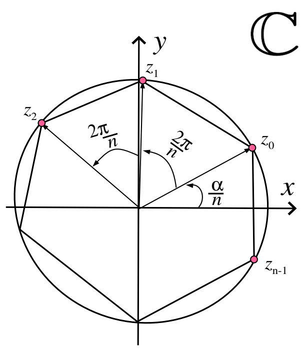

Рис. 1.3.

На комплексній площині корені рівняння $z^n = a$ зображуються точками, розташованими у вершинах правильного n-кутника, що є вписаним у коло радіуса $\sqrt[n]{|a|}$ з центром у початку координат (див. рис. 1.3).

Для того, щоб відрізняти дійсне значення корені n-то ступеня від додатнього числа a та n комплекних значень, надалі позначатиме дійсні (алгебраїчні) значення як $\sqrt[n]{a}$, комплексні значення як $z^{1/n}$.

В прикладах 95–104 обчислити усі значення кореня комплексного числа z.

95. $z = i^{1/3}$.
96. $z = (3i+1)^{1/4}$.
97. $z = (3i-4)^{2/3}$.
98. $z = (2i)^{1/4}$.
99. $z = (7+8i)^{1/5}$.
100. $z = (11-4i)^{1/3}$.
101. $z = (-2+3i)^{1/4}$.
102. $z = (2-3i)^{1/5}$.
103. $z = (2-3i)^{1/5}$.
104. $z = (-5-2i)^{1/7}$.

105. Довести, що для будь-якого комплексного числа $z = x+iy$ значення функції $z^{1/2}$ дорівнюють:

$$(x+iy)^{1/2} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + i\operatorname{sign}y\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right].$$

В прикладах 106–136, використовуючи результат задачі 105, знайти усі значення виразів:

106. $(2i)^{1/2}$.
107. $(1-i)^{1/2}$.
108. $(3-4i)^{1/2}$.
109. $(-40+42i)^{1/2}$.
110. $(-5+12i)^{1/2}$.
111. $(-48-14i)^{1/2}$.
112. $(-11-60i)^{1/2}$.
113. $(7+24i)^{1/2}$.
114. $(29-420i)^{1/2}$.
115. $(-13-84i)^{1/2}$.
116. $(-9-40i)^{1/2}$.
117. $(11-60i)^{1/2}$.
118. $(20+48i)^{1/2}$.
119. $(27-36i)^{1/2}$.
120. $(-9-40i)^{1/2}$.
121. $(35-12i)^{1/2}$.
122. $(120+182i)^{1/2}$.
123. $(24-70i)^{1/2}$.
124. $(1+i2\sqrt{2})^{1/2}$.
125. $(-12+i4\sqrt{7})^{1/2}$.
126. $(-4+i6\sqrt{13})^{1/2}$.
127. $(45-28i)^{1/2}$.
128. $(16-30i)^{1/2}$.
129. $(24-10i)^{1/2}$.
130. $(32-24i)^{1/2}$.
131. $(45-28i)^{1/2}$.
132. $(60-32i)^{1/2}$.
133. $(-1-4\sqrt{3}i)^{1/2}$.
134. $(4-2\sqrt{5}i)^{1/2}$.
135. $(3-2\sqrt{10}i)^{1/2}$.
136. $(21-220i)^{1/2}$.

В прикладах 137–151, знайти всі розв'язки рівнянь:

137. $z^3 = 1$.
138. $z^2 = -63+16i$.
139. $z^7 = 3+4i$.
140. $z^8+1-i = 0$.
141. $4z^2+9(1+i) = 0$.
142. $z^3 = -11-2i$.
143. $z^5+3-4i = 0$.
144. $z^4 = -7-24i$.
145. $z^5 = 41-38i$.
146. $z^7 = 8-8i$.
147. $(-2+3i)z^7 = -1$.
148. $(1-4i)z^3 = 2+3i$.
149. $5(4+3i)^2z^8 = 1$.
150. $|z|-z = 3+4i$.
151. $\bar{z} = z^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

152. Знайти комплексні числа z_1, z_2, якщо $z_1+z_2 = 4+4i$, $z_1z_2 = 8+14i$.

153. Скільки значень має вираз $z^{n/m}$, де $z \in \mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$?

§1.4. Функції. Геометричні і топологічні поняття

На множині M точок площини $\mathbb{C}$ задано *комплексну функцію комплексної змінної* $w = f(z)$, якщо задано закон, за яким кожній точці z з M ставиться у відповідність задана точка w з множини N. При цьому множину M називають *множиною визначення*, а множину N — *множиною значень*. Якщо кожному значенню $z \in M$ відповідає одне значення

$w \in N$, то функція є *однозначною*, а якщо декілька — *багатозначною*. Якщо функція $w = f(z)$ є однозначною і крім того, кожному значенню $w \in N$ відповідає одне значення $z \in M$, то функція є *взаємно однозначною*, або *однолистною*, тобто $z_1 \neq z_2 \Longleftrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$.

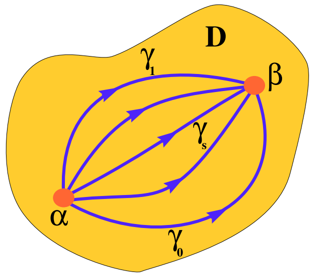

Рис. 1.4.

Комплекснозначна функція $z(t)$, де $t \in [\alpha, \beta]$ відображає відрізок $[\alpha, \beta]$ на деяку множину точок комплексної площини $\mathbb{C}$, яку можна розглядати як графічний образ цієї функції. Зокрема, якщо функція $z(t)$ є неперервною, то її графічним образом буде деяка *крива*; крива є **впорядкованою множиною точок комплексної площини**. Напрямок руху точки z, який відповідає напрямку збільшення t, називається *додатним*. Точка z кривої γ називається *точкою самоперетина кривої*, якщо $z(t_1) = z(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$. Виключенням є збіжність початку і кінця кривої: $z(\alpha) = z(\beta)$. Таку криву називають *замкненою*. Неперервна крива, що не містить точок самоперетину, називається *простою* або *жордановою кривою*. Довжина кусково-гладкої кривої дорівнює: $l(\gamma) = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Областю D на розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ називають відкриту зв'язну множину. Множина D називається відкритою, якщо кожна точка цієї множини належить до неї разом із деяким ε-окілом. Множина D називається зв'язною, якщо будь-які дві точки області можливо з'єднати кривою, що належить до тієї ж області. *Межа* області D — це множина ∂D точок, які не належать області D, але в будь-якому околі яких є точки, що належать D. Додатнім *напрямком обходу* межі будемо вважати той, при якому область завжди залишається ліворуч. Об'єднання області D та її межі називається *замиканням* та позначається $\bar{D}$. При цьому множину $\bar{D}$ називають також *замкненою* областю. *Розріз* області $D \in \mathbb{C}$ вздовж розімкненої кривої $\gamma = \{z(t) \,:\, 0 \leq t \leq 1\}$ це видалення точок цієї кривої із множини, тобто це перехід до множини $D \backslash \gamma$. Кожній точці $z(t)$ розрізу γ відповідають два межових елемента області D, лівий та правий (або верхній та нижній). В сукопності, ці елементи утворюють два *береги розрізу* γ.

Область D на повній комплексній площині називається *однозв'язною*, якщо будь-яку замкнену жорданову криву, що належить D, можна неперервною деформацією стягнути в точку, залишаючись в області D. В інших випадках область є *багатозв'язною*.

Неперервну деформацію кривої можна уявити геометрично (див. Рис. 1.4, 1.5).

Неперервну деформацію кривої називають перетворенням *гомотопії*, а криві, що можуть бути зведени неперервною деформацією одна до одної називають *гомотопічно еквівалентними* (див. рис. 1.4). Якщо криві γ_0

і γ_1 гомотопічно еквівалентни в області D, позначатиме це як:

$$\gamma_1 \backsim \gamma_2 \ \mathrm{rel}\ D. \tag{1.1}$$

Будь-яка замкнена крива, що належить однозв'язній області гомотопічно еквивалентна нулю (позначення: $\gamma \backsim 0$ rel D). Для областей з кусково-гладкими межами має місце наступна властивість: межа однозв'язної області на повній комплексній площині або складається лише з однієї замкненої жорданової кривої, або з однієї точки, або не містить жодної точки (уся $\overline{\mathbb{C}}$-площина).

Область D називається *обмеженою*, якщо існує круг $U(0; R < \infty)$, що містить у собі D.

Обмежена область завжди компактна, тобто з будь-якої послідовності точок області завжди існує підпослідовність, що збігається до внутрішньої точки цієї області. Будемо казати, що область G *компактно належить* D, якщо її замикання $\bar{G}$ (в топології $\bar{\mathbb{C}}$, тобто з урахуванням ∞) належить D. Компактну належність позначають символом $\Subset$, отже $\bar{G} \subset D \Longrightarrow G \Subset D$.

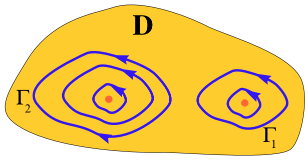

Рис. 1.5.

§1.5. Елементарні трансцендентні функції

Функція e^z для комплексних z визначається згідно з формулою

$$\exp z = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Формально тригонометрічні функції комплексного аргумента можливо ввести за формулами Ейлера:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z},$$
$$\mathrm{ch}\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{sh}\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \quad \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

Логарифм — це функція, обернена до експоненти: Число w називається логарифмом числа z, якщо $e^w = z$. $\ln z = \ln |z| + i \arg z$. Але $\arg z$ може позначати будь-яке значення аргумента, звідки отримаємо нескінченну множину значень логарифмів. Тому логарифм — це *нескінченозначна* функція (її уявна частина визначена з точністю до числа, що є кратним до 2π). Далі *багатозначну* функцію логарифм будемо позначати як Ln:

$$\mathrm{Ln} z = \ln |z| + i \mathrm{Arg} z = \ln \rho + i (\varphi + 2\pi k), \ k \in \mathbb{Z},$$

а символом $\ln z$ будемо позначати одне з його значень.

Узагальненою степеневою функцією визначають співвідношенням: $w = z^a = e^{a\mathrm{Ln}\, z}$, $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. В показниковій формі $z = \rho e^{i\varphi}$, і $w = Re^{i\Phi}$, звідки $w = e^{(\alpha+i\beta)(\ln\rho + i(\varphi+2\pi k))} = Re^{i\Phi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Разом із узагальненою степеневою функцією можна також розглядати *узагальнену показникову функцію*: $w = a^z = e^{z\mathrm{Ln}\, a} = e^{z\ln|a|}\cdot e^{iz\mathrm{Arg}\, a}$. На відміну від багатозначної функції z^a, узагальнена показникова функція є сукупностью окремих, не зв'язних між собою однозначних функцій, що відрізняються множниками $e^{2\pi ki}$, де $k \in \mathbb{Z}$.

В прикладах 154–159 довести співвідношення:

154. $\cos iz = \mathrm{ch}\, z$.
155. $\mathrm{ch}\, iz = \cos z$.
156. $\sin iz = i\,\mathrm{sh}\, z$.
157. $\mathrm{sh}\, iz = i \sin z$.
158. $\mathrm{tg}\, iz = i\,\mathrm{th}\, z$.
159. $\mathrm{ctg}\, iz = -i\,\mathrm{cth}\, z$.

В прикладах 160–167, обчислити зазначені суми ($n \in \mathbb{N}$):

160. $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$.
161. $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$.
162. $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n+1)x$.
163. $\cos x - \cos 2x + \dots + (-1)^{n-1}\cos nx$.
164. $\sin x - \sin 2x + \dots + (-1)^{n-1}\sin nx$.
165. $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n+1)x$.
166. $\cos x + \cos(x+y) + \dots + \cos(x+ny)$.
167. $\sin x + \sin(x+y) + \dots + \sin(x+ny)$.

В прикладах 168–173 знайти усі точки z, в яких функція $f(z)$ приймає лише дійсні значення.

168. $f(z) = \mathrm{cth}\, z$.
169. $f(z) = \mathrm{tg}\, z$.
170. $f(z) = \cos 2z$.
171. $f(z) = \mathrm{ch}\, 3z$.
172. $f(z) = \sin 4z$.
173. $f(z) = \mathrm{cth}(z+1)$.

В прикладах 174–179 знайти усі точки z, в яких функція $f(z)$ приймає лише уявні значення.

174. $f(z) = \cos z$.
175. $f(z) = \mathrm{ctg}\, z$.
176. $f(z) = \mathrm{sh}\, z$.
177. $f(z) = \sin z$.
178. $f(z) = \mathrm{th}\, 2z$.
179. $f(z) = \cos 2z$.

В прикладах 180–203 знайти усі розв'язки рівнянь:

180. $\sin z = 2$.
181. $\mathrm{sh}\, z = 3$.
182. $\cos z = 4$.
183. $\mathrm{ch}\, z = 5$.
184. $\sin z = 4i/3$.
185. $\cos z = 1 + i$.
186. $\sin z + \cos z = 3$.
187. $\sin z - \cos z = 4$.
188. $\mathrm{ch}\, z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.
189. $\sin z = \dfrac{4-3i}{5}$.
190. $\cos z = (3+i)/4$.
191. $\sin z + \cos z = i$.
192. $\mathrm{ch}\, z - \mathrm{sh}\, z = 2i$.
193. $\sin z - 2\cos z = 4$.
194. $\mathrm{tg}\, z = 2i$.
195. $\mathrm{ctg}\, z = 1 - i$.

196. $\operatorname{th} z = 5i/3$.

197. $\operatorname{cth} z = i/2$.

198. $\operatorname{sh} z + e^z = 1$.

199. $\operatorname{ch} z + e^z = 2$.

200. $2\operatorname{ch} z + ie^z = 7$.

201. $\sin z + e^{iz} = 1$.

202. $\operatorname{th} z + 3e^z = 1$.

203. $\operatorname{cth} z - 7e^z = 10$.

В прикладах 204–215 обчислити усі значення комплексного виразa:

204. $1^{\sqrt{3}}$.

205. $(-1)^{\sqrt{5}}$.

206. i^e.

207. e^i.

208. 2^{-i}.

209. $\left(\sqrt{3}\right)^i$.

210. $i^{\sqrt{3}}$.

211. $\left(\sqrt{2} + i\sqrt{7}\right)^i$.

212. $i^{\sqrt{7}+i\sqrt{2}}$.

213. $(2-i)^{1+i}$.

214. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{3+4i}$.

215. i^{i^i}.

В прикладах 216–227 знайти усі розв'язки рівнянь:

216. $iz^i = 1$.

217. $(i+3)z^{i+4} = i+5$.

218. $(1+i)z^{2+3i} = 1$.

219. $(3-4i)z^{\sqrt{2}+i\sqrt{7}} = i$.

220. $(\sqrt{2} + i\sqrt{6})z^i = -1$.

221. $z^{1/(1-i)} = i+1$.

222. $z^{1/(3+4i)} = 2$.

223. $z^{(1+2i)/(1-2i)} = 1$.

224. $(z+i)^{2/(3i)} = 1$.

225. $(2z+3i)^{(i+1)/\sqrt{2}} = 1$.

226. $(a+ib)z^{a-ib} = 1$, де $a, b \in \mathbb{R}_+$.

227. $(a+ib)z^{c+id} = 1$, де a, b, c, d, $\in \mathbb{R}_+$.

В прикладах 228–239 обчислити усі значення комплексного виразa:

228. $\operatorname{Ln}1$.

229. $\operatorname{Ln}(-1)$.

230. $\operatorname{Ln}i$.

231. $\operatorname{Ln}(-i)$.

232. $\operatorname{Ln}(2-i)$.

233. $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln}i$.

234. $\operatorname{Ln}(i+1)$.

235. $\operatorname{Ln}(3i-4)$.

236. $\operatorname{Ln}(12+5i)$.

237. $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3} - i\sqrt{5}\right)^7$.

238. $i\operatorname{Ln}\left(5i + \sqrt{11}\right)$.

239. $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3} + i\right)$.

Глава 2

Аналітичні функції

§2.1. Умови Коші–Рімана

Функція $f(z)$ називається диференційовною у сенсі комплексного аналізу, або, інакше кажучи, $\mathbb{C}$-*диференційовною* в точці z_0, якщо існує границя

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=f'(z_0),\ h\in\mathbb{C},$$

і вона не залежить від того, яким способом h прямує до нуля. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в кожній точці області D, то функцію називатимемо аналітичною в цій області, $f(z)\in\mathcal{A}(D)$. Припустимо, функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ означена у деякому околі точки z, та крім того в цій точці $u(x,y)$ та $v(x,y)$ диференційовні. Тоді необхідною умовою, а при додатковій умові існування повних диференціалів функцій $u(x,y)$, $v(x,y)$ й достатньою умовою аналітичності функції $f(z)$ в точці z, є виконання *умов Коші—Рімана*.

$$\boxed{u_x=v_y,\qquad u_y=-v_x.}$$

Якщо ввести *формальні похідні Коші*:

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

умову Коші-Рімана можна подати у комплексному вигляді:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0}.$$

Умови Коші—Рімана для довільних ортогональних координат (s,n):

$$u_s=v_n,\quad u_n=-v_s,$$

де вважається, що двійка (s,n) має додатню орієнтацію. Зокрема в полярних координатах умови Коші—Рімана приймають форму

$$u_\rho=\frac{1}{\rho}v_\varphi,\quad \frac{1}{\rho}u_\varphi=-v_\rho.$$

В прикладах 240–251 обчислити дійсну $u(x,y)=\mathrm{Re}\ f(z)$ і уявну $v(x,y)=\mathrm{Im}\ f(z)$ частини функції $f(z)$ та перевірити умови Коші-Рімана.

240. $f(z) = \sin z$.
241. $f(z) = \operatorname{sh} z$.
242. $f(z) = \cos z$
243. $f(z) = \operatorname{ch} z$
244. $f(z) = \operatorname{tg} z$
245. $f(z) = \operatorname{th} z$
246. $f(z) = z^n$, де $n \in \mathbb{N}$
247. $f(z) = \ln z$
248. $f(z) = z \ln z$
249. $f(z) = z \cdot e^z$
250. $f(z) = z/(1-2z)^2$
251. $f(z) = z^2/(2i-z)$

В прикладах 252–261 обчислити $|f'(z)|$ та $\arg f'(z)$ в точці a.

252. $f(z) = 1/(1+z)$, $a = i$.
253. $f(z) = (z-2)/(z+i)$, $a = 1-i$.
254. $f(z) = (z-i)/(2z+1)$, $a = 2i$.
255. $f(z) = z + i/(z+i)$, $a = 1+i$.
256. $f(z) = e^z$, $a = 2+i$.
257. $f(z) = z + e^{iz}$, $a = -i$.
258. $f(z) = \sin(1+z)$, $a = 1-i$.
259. $f(z) = \operatorname{ch} 3z$, $a = 1+7i$.
260. $f(z) = \operatorname{tg}(z/(1+iz))$, $a = i$.
261. $f(z) = \operatorname{cth}(z + i/z)$, $a = 5-i$.

262. Показати, що модуль і аргумент аналітичної функції

$$f(z) = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$$

зв'язани наступними умовами: $R_x = R\Phi_y$, $R_y = -R\Phi_x$.
263. Показати, що модуль і аргумент аналітичної функції

$$f(z) = R(\rho,\varphi)e^{i\Phi(\rho,\varphi)}$$

зв'язани наступними умовами: $R_\rho = \dfrac{R}{\rho}\Phi_\varphi$, $\Phi_\rho = -\dfrac{R_\varphi}{\rho R}$.

§2.2. Геометрічна інтерпретація аналітичної функції

Диференціал аналітичної функції можна подати у вигляді:

$$|\mathrm{d}f| = |f'(z)| \cdot |\mathrm{d}z|, \qquad \arg \mathrm{d}f = \arg f'(z) + \arg \mathrm{d}z.$$

Масштаб перетворення $|f'(z)|$ має назву *коефіцієнт лінійного розтягування* в точці z при перетворенні $w = f(z)$. Кут $\arg f'(z)$ має назву *кут повороту кривої* в точці z при перетворенні $w = f(z)$. Таке відображення, при якому має місце зберігання кутів і незалежність масштабу від напрямку, називають *конформним відображенням* в точці. Припустимо, що функція $w = f(z)$ конформно відображує область $D \to D^*$. Нехай γ — крива, що знаходиться в області D, а γ^* — її образ при відображенні $w = f(z)$. Тоді довжина кривої γ^* дорівнює

$$l(\gamma^*) = \int\limits_{\gamma^*} |\mathrm{d}w| = \int\limits_{\gamma} |f'(z)| \cdot |\mathrm{d}z|.$$

Площа області D^* дорівнює

$$S(D^*) = \iint\limits_{D^*} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{D} \frac{D(u,v)}{D(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ = \iint\limits_{D} |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Тобто $|f'(z)|^2$ — це коефіцієнт розтягування площі.

В прикладах 264–275 обчислити $|f'(z)|$ та $\arg f'(z)$. Яка частина комплексної площини стискається, а яка розширюється?

264. $f(z) = z^3$.

265. $f(z) = 1/z^2$.

266. $f(z) = 1/(z+3)$.

267. $f(z) = \dfrac{i+3z}{z+3i}$.

268. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z-i}$.

269. $f(z) = 1 + z^2$.

270. $f(z) = \operatorname{sh} 2z$.

271. $f(z) = e^{3z}$.

272. $f(z) = e^{iz} - 1$.

273. $f(z) = \exp \dfrac{z-i}{z+i}$.

274. $f(z) = \operatorname{sh} \dfrac{z+1}{2z-i}$.

275. $f(z) = \operatorname{th}(2z + 3i)$.

В прикладах 276–287 обчислити $|f'(z)|$ та $\arg f'(z)$. Стискається чи розширюється комплексна площина $\mathbb{C}$ в точці a?

276. $f(z) = \sin 3z$, $a = i$.

277. $f(z) = (1-z)^2$, $a = 1 - 2i$.

278. $f(z) = (1+iz)/(1-z)^2$, $a = 2i$.

279. $f(z) = e^{z+1/z}$, $a = i - 7$.

280. $f(z) = \sin\left(\dfrac{z}{i-2/z}\right)$, $a = i$.

281. $f(z) = 2z + \dfrac{i+z}{2z-i}$, $a = -1+i$.

282. $f(z) = \operatorname{sh}(7z+i)$, $a = -i+1$.

283. $f(z) = \operatorname{tg}(z-i)$, $a = 3+2i$.

284. $f(z) = \operatorname{cth}(2z+7i)$, $a = i+2$.

285. $f(z) = \dfrac{z^2+i}{z^2-i}$, $a = 3 - 7i$.

286. $f(z) = \operatorname{cth}\left(\dfrac{z+3i}{z^2-1}\right)$, $a = 2 + 5i$.

287. $f(z) = \dfrac{(z+i)(z+2i)}{2z+i}$, $a = i$.

В прикладах 288–299 обчислити $|f'(z)|$ та $\arg f'(z)$. На який кут повертається комплексна площина $\mathbb{C}$ в точці a?

288. $f(z) = e^z$, $a = 1 + i$.

289. $f(z) = \sin z$, $a = 2 - 3i$.

290. $f(z) = \cos z$, $a = 2i$.

291. $f(z) = \operatorname{tg} 3z$, $a = i$.

292. $f(z) = \operatorname{ctg}(2z+i+1)$, $a = 1$.

293. $f(z) = \operatorname{ctg}(z-1)$, $a = i - 1$.

294. $f(z) = \ln z$, $a = 2 - i$.

295. $f(z) = \ln(5+iz)$, $a = i - 2$.

296. $f(z) = \operatorname{sh}(1+z)$, $a = i + 1$.

297. $f(z) = i \operatorname{ch} z$, $a = i + 1$.

298. $f(z)=z(i+z)^{-2}$, $a=3-i$.

299. $f(z)=\exp(z+1/z)$, $a=2-3i$.

В прикладах 300–311 обчислити довжини образів кривих C при зазначених відображеннях $w=f(z)$.

300. $C=\{z: z=at+b,\ t\in[0,1]\}$, $w=z^2$, $a,b\in\mathbb{C}$.

301. $C=\{z: z=at+b,\ t\in[0,1]\}$, $w=e^z$, $a,b\in\mathbb{C}$.

302. $C=\{z: z=it+1,\ t\in[0,1]\}$, $w=z^3$.

303. $C=\{z: z=t(1+2i),\ t\in[0,1]\}$, $w=z^4$.

304. $C=\{z: z=it,\ t\in[0,1]\}$, $w=z^n$, $n\in\mathbb{N}$.

305. $C=\{z: z=it,\ t\in[0,2\pi]\}$, $w=e^z$.

306. $C=\{z: z=6\pi t,\ t\in[0,1]\}$, $w=e^{iz}$.

307. $C=\left\{z: z=e^{2\pi it},\ t\in[0,1]\right\}$, $w=z^n$, $n\in\mathbb{N}$.

308. $C=\left\{z: z=e^{2\pi it},\ t\in[0,1]\right\}$, $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.

309. $C=\{z: z=\sin t,\ t\in[0,2\pi]\}$, $w=z^3$.

310. $C=\{z: z=\operatorname{th}(2t+1),\ t\in[0,1]\}$, $w=z^2$.

311. $C=\{z: z=2t(1+i),\ t\in[0,2\pi]\}$, $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.

В прикладах 312–323 обчислити площі образів областей D при зазначених відображеннях $w=f(z)$.

312. $D=\{z\ :\ \mathrm{Re}\ z\in(0;1),\ |\mathrm{Im}\ z|<\pi\}$, $w=z^2$.

313. $D=\{z\ :\ \mathrm{Re}\ z\in(0;1),\ |\mathrm{Im}\ z|<\pi\}$, $w=e^z$.

314. $D=\{z\ :\ |z|\in(0,1),\ \arg z\in(0,2\pi)\}$, $w=e^z$.

315. $D=\{z\ :\ |z|<1,\ \arg z\in(0,\pi/4)\}$, $w=e^{iz}$.

316. $D=\{z\ :\ |z|<1,\ \arg z\in(0,\pi/4)\}$, $w=\dfrac{z+1}{z-1}$.

317. $D=\{z\ :\ \mathrm{Re}\ z\in(0;1),\ \mathrm{Im}\ z\in(0;1)\}$, $w=\dfrac{iz+1}{z-1}$.

318. $D=\{z\ :\ \mathrm{Re}\ z\in(-1;1),\ \mathrm{Im}\ z\in(-1;1)\}$, $w=z^3$.

319. $D=\{z\ :\ \mathrm{Re}\ z\in(0;1),\ \mathrm{Im}\ z\in(0;1)\}$, $w=\exp(2z+3i)$.

320. $D=\{z\ :\ |z|\in(1,2),\ \arg z\in(0,\pi/4)\}$, $w=z^4$.

321. $D=\{z\ :\ |z|\in(2,3),\ \arg z\in(0,\pi/3)\}$, $w=z^2$.

322. $D=\{z\ :\ \mathrm{Re}\ z\in(-1;1),\ \mathrm{Im}\ z\in(-1;1)\}$, $w=\dfrac{z-2i}{z+3i}$.

323. $D=\{z\ :\ |z|\in(R_1,R_2),\ \arg z\in(0,\pi/3)\}$, $w=\dfrac{z-1}{z+1}$, $R_1,R_2\in\mathbb{R}_+$.

§2.3. Гармонічні функції

Дійсна функція двох дійсних змінних $u(x,y)$ називається *гармонічною функцією* в області D, позначається $u(x,y) \in \mathcal{H}(D)$, якщо вона двічи неперервно диференційовна в D та задовольняє в будь-якій точці з D *рівнянню Лапласа* $\Delta u = 0$. Дві гармонічні функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$, що є зв'язанними умовами Коші—Рімана, називаються *спряженними* гармонічними функціями. Тоді функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ є однозначною аналітичною функцією. Для будь-якої функції $u(x,y)$, що є гармонічною в однозв'язній області D, можливо знайти спряжену до неї гармонічну функцію

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y \mathrm{d}x + u_x \mathrm{d}y \ + \mathrm{const}.$$

В прикладах 324–327 перевірити умову гармонічності функції $u(x,y)$? Якщо $u(x,y)$ гармонічна, то вважати її дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$. Знайти уявну частину $v(x,y)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму аналітичну функцію $f(z)$.

324. $u(x,y) = x/(x^2+y^2)$.

325. $u(x,y) = \exp(x^2-y^2)\cos(2xy)$.

326. $u(x,y) = 2xy + x$.

327. $u(x,y) = e^{xy}\cos\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)$.

328. Довести, якщо функція $v(x,y)$ є гармонічною в однозв'язній області D, то спряжена до неї гармонічна функція $u(x,y)$ може бути подана у вигляді:

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y \mathrm{d}x - v_x \mathrm{d}y \ + \mathrm{const}.$$

В прикладах 329–336 перевірити умову гармонічності функції $v(x,y)$? Якщо $v(x,y)$ гармонічна, то вважати її уявною частиною аналітичної функції $f(z)$. Знайти дійсну частину $u(x,y)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму аналітичну функцію $f(z)$.

329. $v(x,y) = x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$.

330. $v(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$.

331. $v(x,y) = 2x^3-6xy^2-x^2+y^2+3x+1$.

332. $v(x,y) = x\sin x \operatorname{ch} y - y\cos x \operatorname{sh} y$.

333. $v(x,y) = -3x^2y+y^3+x^2-y^2-4xy$.

334. $v(x,y) = -3(x+2y)(-2x+y)^2+(x+2y)^3$.

335. $v(x,y) = -3(x+2y)^2(-2x+y)+(-2x+y)^3$.

336. $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy.$

337. Довести, якщо функція $u(\rho, \varphi)$ є гармонічною в однозв'язній області D, то спряжена до неї гармонічна функція $v(\rho, \varphi)$ може бути подана у вигляді:

$$v(\rho, \varphi) = \int_{(\rho_0,\varphi_0)}^{(\rho,\varphi)} \rho u_\rho \mathrm{d}\varphi - \frac{u_\varphi}{\rho} \mathrm{d}\rho \ + \mathrm{const}.$$

В прикладах 338–342 перевірити умову гармонічності функції $u(\rho, \varphi)$? Якщо $u(\rho, \varphi)$ гармонічна, то вважати її дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$. Знайти уявну частину $v(\rho, \varphi)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму аналітичну функцію $f(z)$.

338. $u(\rho, \varphi) = \rho^2 \cos 2\varphi - \rho \cos\varphi + 1.$
339. $u(\rho, \varphi) = \rho^2 \cos 2\varphi - \rho \cos\varphi + 1.$
340. $u(\rho, \varphi) = \rho^2 \sin 2\varphi + \rho \cos\varphi.$
341. $u(\rho, \varphi) = e^{\rho\cos\varphi} \cos(\rho \sin\varphi).$
342. $u(\rho, \varphi) = \rho\varphi(\cos\varphi) + \rho(\ln\rho)(\sin\varphi).$

343. Довести, якщо функція $v(\rho, \varphi)$ є гармонічною в однозв'язній області D, то спряжена до неї гармонічна функція $u(\rho, \varphi)$ може бути подана у вигляді:

$$u(\rho, \varphi) = \int_{(\rho_0,\varphi_0)}^{(\rho,\varphi)} \frac{v_\varphi}{\rho} \mathrm{d}\rho - \rho v_\rho \mathrm{d}\varphi \ + \mathrm{const}.$$

В прикладах 344–346 перевірити умову гармонічності функції $v(\rho, \varphi)$? Якщо $v(\rho, \varphi)$ гармонічна, то вважати її уявною частиною аналітичної функції $f(z)$. Знайти дійсну частину $u(\rho, \varphi)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму аналітичну функцію $f(z)$.

344. $v(\rho, \varphi) = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos\varphi.$
345. $v(\rho, \varphi) = \rho\varphi\cos\varphi + \rho\ln\rho\sin\varphi.$
346. $v(\rho, \varphi) = \rho\ln\rho\cos\varphi - \rho\varphi\sin\varphi.$

347. Довести, якщо функція $\Phi(x, y)$ є гармонічною в однозв'язній області D, то гармонічна функція $R(x, y)$, яка є модулем аналітичної функції $f(z) = R \cdot e^{i\Phi}$ може бути подана у вигляді:

$$R(x, y) = \mathrm{const} \cdot \exp\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \Phi_y \mathrm{d}x - \Phi_x \mathrm{d}y\right].$$

В прикладах 348–351 перевірити умову гармонічності функції $\Phi(x,y)$? Якщо $\Phi(x,y)$ гармонічна, то вважати її аргументом $\arg f(z)$ аналітичної функції $f(z)$. Знайти модуль $|f(z)| = R(x,y)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму функцію $f(z)$.

348. $\Phi(x,y) = 3x^2y - y^3$.

349. $\Phi(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$.

350. $\Phi(x,y) = \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}(2xy)\operatorname{th}(x^2 - y^2)\right]$.

351. $\Phi(x,y) = 2x + y$.

352. Довести, якщо функція $R(x,y)$ є гармонічною в однозв'язній області D, то гармонічна функція $\Phi(x,y)$, яка є аргументом аналітичної функції $f(z) = R \cdot e^{i\Phi}$ може бути подана у вигляді:

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{R_x}{R}\mathrm{d}y - \frac{R_y}{R}\mathrm{d}x \ + \mathrm{const}.$$

В прикладах 353–357 перевірити умову гармонічності функції $A(x,y)$? Якщо $A(x,y)$ гармонічна, то вважати функцію $R(x,y) = \exp(A(x,y))$ модулем $|f(z)|$ аналітичної функції $f(z)$. Знайти аргумент $\arg f(z) = \Phi(x,y)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму функцію $f(z)$.

353. $A(x,y) = x + \ln(x^2 + y^2)$.

354. $A(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

355. $A(x,y) = 3xy + 2\ln(x^2 + y^2)$.

356. $A(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$.

357. $A(x,y) = \frac{3}{2}\ln(x^2 + y^2) + 3(x - y)$.

358. Довести, якщо функція $\Phi(\rho,\varphi)$ є гармонічною в однозв'язній області D, то гармонічна функція $R(\rho,\varphi)$, яка є модулем аналітичної функції $f(z) = R \cdot e^{i\Phi}$ може бути подана у вигляді:

$$R(\rho,\varphi) = \mathrm{const} \cdot \exp\left[\int\limits_{(\rho_0,\varphi_0)}^{(\rho,\varphi)} \frac{\Phi_\varphi}{\rho}\mathrm{d}\rho - \rho\Phi_\rho \mathrm{d}\varphi\right].$$

В прикладах 359–364 перевірити умову гармонічності функції $\Phi(\rho,\varphi)$? Якщо $\Phi(\rho,\varphi)$ гармонічна, то вважати її аргументом $\arg f(z)$ аналітичної функції $f(z)$. Знайти модуль $|f(z)| = R(\rho,\varphi)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму функцію $f(z)$.

359. $\Phi(\rho,\varphi) = 3\varphi + \rho^2 \sin 2\varphi$.

360. $\Phi(\rho,\varphi) = \varphi + \rho\cos\varphi$.

361. $\Phi(\rho,\varphi) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi}{\ln\rho}\right)$.

362. $\Phi(\rho,\varphi) = 2\varphi + \rho\sin\varphi$.

363. $\Phi(\rho,\varphi) = 3\varphi + \rho^2\cos 2\varphi$.

364. $\Phi(\rho,\varphi) = \varphi - \rho^3\sin 3\varphi$.

365. Довести, якщо функція $R(\rho,\varphi)$ є гармонічною в однозв'язній області D, то гармонічна функція $\Phi(\rho,\varphi)$, яка є аргументом аналітичної функції $f(z) = R\cdot e^{i\Phi}$ може бути подана у вигляді:

$$\Phi(\rho,\varphi) = \int\limits_{(\rho_0,\varphi_0)}^{(\rho,\varphi)} \frac{\rho R_\rho}{R}\mathrm{d}\varphi - \frac{R_\varphi}{\rho R}\mathrm{d}\rho \ +\mathrm{const}.$$

В прикладах 366–370 перевірити умову гармонічності функції $A(\rho,\varphi)$? Якщо вона гармонічна, то вважати функцію $R(\rho,\varphi) = \exp(A(\rho,\varphi))$ модулем $|f(z)|$ аналітичної функції $f(z)$. Знайти аргумент $\arg f(z) = \Phi(\rho,\varphi)$ аналітичної функції $f(z)$ і саму функцію $f(z)$.

366. $A(\rho,\varphi) = \rho^2\cos 2\varphi$.

367. $A(\rho,\varphi) = \ln\Big[(\varphi+\rho\cos\varphi)^2 + (\ln\rho - \rho\sin\varphi)^2\Big]$.

368. $A(\rho,\varphi) = \ln\Big[(\ln\rho)^2 + \varphi^2)\Big]$.

369. $A(\rho,\varphi) = \rho^3\cos 3\varphi$.

370. $A(\rho,\varphi) = \ln\Big[\rho^2\cos^2\varphi + (\rho\sin\varphi+1)^2\Big]$.

§2.4. Інтеграл від функції комплексної змінної

Інтегралом функції комплексної змінної $f(z)$ вздовж кривої Γ (або по кривій Γ) називають границю інтегральної суми:

$$\int\limits_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \lim_{l\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

якщо ця границя існує незалежно від вибору точок z_k та ζ_k. Позначивши $z = x+iy$ та $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, матимемо

$$\begin{aligned}\int\limits_\Gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int\limits_\Gamma [u(x,y)+iv(x,y)]\,(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)\\ &= \int\limits_\Gamma u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y + i\int\limits_\Gamma u(x,y)\mathrm{d}y + v(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Отже інтеграл від функції комплексної змінної — це комплексне число, дійсна і уявна частини якого є дійсними криволінійними інтегралами. Тому умови існування інтеграла збігаються з умовами існування дійсних криволінійних інтегралів. Якщо Γ — це довільна кусково-гладка жорданова крива, а $f(z)$ — кусково-неперервна функція, то інтеграл від $f(z)$ вздовж Γ існує завжди.

В прикладах 371–393 обчислити інтеграл I вздовж кривої C:

371. $I = \int\limits_C |z|\overline{z}\mathrm{d}z$, контур C складається з напівкола $|z| = 1$, $\mathrm{Im}\, z > 0$ та відрізка $x \in (-1, 1)$, $y = 0$.

372. $I = \int\limits_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 2}$, контур $C = \{z\ :\ |z| = 2\}$.

373. $I = \int\limits_C |\mathrm{d}z|/z$, уздовж прямолінійного відрізка з точки $z = 0$ в точку $z = -1 - i$.

374. $I = \int\limits_C (z - a)^n\mathrm{d}z$, де $n \in \mathbb{N}$, уздовж периметра квадрата з центром у точці a та сторонами, паралельними координатним вісям.

375. $I = \int\limits_C (z - a)^n\mathrm{d}z$, де $n \in \mathbb{N}$, контур $C = \{z\ :\ |z - a| = R\}$.

376. $I = \int\limits_C |\exp(-z)| \cdot |\mathrm{d}z|$ вздовж прямолінійного відрізка з точки $z = i - 1$ в точку 0.

377. $I = \int\limits_C |z - 1| \cdot |\mathrm{d}z|$, контур $C = \{z\ :\ |z| = 1\}$.

378. $I = \int\limits_C |\cos z|^2\mathrm{d}z$ вздовж прямолінійного відрізка з точки $z = 0$ в точку $z = \pi$.

379. $I = \int\limits_C z \sin z\mathrm{d}z$ вздовж прямолінійного відрізка з точки $z = 0$ в точку $z = i$.

380. $I = \int\limits_C (z - a)^n\mathrm{d}z$, де $n \in \mathbb{N}$, контур $C = \{z\ :\ |z - a| = R\}$, $0 \le \arg z - a \le \pi$ з початком у точці $z = a + R$.

381. $I = \int\limits_C z \sin z\mathrm{d}z$ вздовж прямолінійного відрізка з точки $z = 0$ в точку $z = i$.

382. $I = \int\limits_C |\exp z|\cdot|\mathrm{d}z|$ вздовж прямолінійного відрізка з точки $z = 0$ в точку $z = 2 + 3i$.

383. $I = \int\limits_C |\sin z|^2\mathrm{d}z$ вздовж прямолінійного відрізка з точки $z = 0$ в точку $z = i$.

384. $I = \int\limits_C z^3|\mathrm{d}z|$, контур $C = \{z\ :\ |z| = 4\}$.

385. $I = \int\limits_C z|\mathrm{d}z|$ вздовж прямолінійного відрізка з точки $z = 0$ в точку $z = 1 - i$.

386. $I = \int\limits_C |z| \cdot |\mathrm{d}z|$ вздовж прямолінійного відрізка з точки $z = 1$ в точку $z = 7i$.

387. $I = \int\limits_C \sin^2 z|\mathrm{d}z|$ вздовж прямолінійного відрізка з точки $z = i + 2$ в точку $z = 0$.

388. $I = \int\limits_C z \cos z\mathrm{d}z$ вздовж прямолінійного відрізка з точки $z = -i$ в точку $z = 1$.

389. $I = \int\limits_C |\exp(2z)| \cdot |\mathrm{d}z|$ вздовж прямолінійного відрізка з точки $z = 0$ в точку $z = i + 3$.

390. $I = \int\limits_C |z + i|^2 \cdot |\mathrm{d}z|$, контур $C = \{z\ :\ |z| = 1\}$.

391. $I = \int\limits_C (z + i)^7\mathrm{d}z$, уздовж періметра квадрата з центром у точці $-i$ та сторонами, паралельними координатним вісям.

392. $I = \int\limits_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-4}$, контур $C = \{z : |z| = 3\}$.

393. $I = \int\limits_C |z|(\overline{z})^2 \mathrm{d}z$ вздовж замкненого контура, що складається з напівкола $|z| = 2$, $\mathrm{Im}\, z > 0$ та відрізка $x \in (-2, 2)$, $y = 0$.

В прикладах 394–405 обчислити інтеграл I від заданої вітки багатозначної функції вздовж кривої C:

394. $I = \int\limits_C \mathrm{d}z/\sqrt{z}$ вздовж напівкола $|z| = 4$, $y \le 0$, $\sqrt{4} = -2$.

395. $I = \int\limits_C z^{\sqrt{3}}\mathrm{d}z$, контур $C = \{z : |z| = 1\}$, $1^{\sqrt{3}} = \exp(-4i\pi\sqrt{3})$.

396. $I = \int\limits_C \mathrm{d}z/\sqrt{z}$, контур $C = \{z : |z| = 9\}$, $\sqrt{-9} = -3i$.

397. $I = \int\limits_C \mathrm{d}z/\sqrt{z}$ вздовж напівкола $|z| = R$, $y \le 0$, $\sqrt{-1} = i$.

398. $I = \int\limits_C z^{\alpha}\mathrm{d}z$, контур $C = \{z : |z| = 1\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ та $1^{\alpha} = 1$.

399. $I = \int\limits_C z^{2i}\mathrm{d}z,$, контур $C = \{z : |z| = 1\}$, де $1^{2i} = 1$.

400. $I = \int\limits_C \mathrm{d}z/\sqrt[3]{z}$ вздовж напівкола $|z| = 1$, $y \ge 0$, $\sqrt[3]{-1} = \exp i\pi/3$.

401. $I = \int\limits_C \mathrm{d}z/\sqrt[5]{z}$, контур $C = \{z : |z| = 1\}$, та $\sqrt[5]{1} = 1$.

402. $I = \int\limits_C \mathrm{d}z/\sqrt[5]{z}$, контур $C = \{z : |z| = 1\}$, та $\sqrt[5]{1} = 1$.

403. $I = \int\limits_C z^{\sqrt{2}}\mathrm{d}z$, контур $C = \{z : |z| = 1\}$, та $1^{\sqrt{2}} = 1$.

404. $I = \int\limits_C z^{\sqrt[3]{2}}\mathrm{d}z$, контур $C = \{z : |z| = 1\}$, та $1^{\sqrt[3]{2}} = 1$.

405. $I = \int\limits_C \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt[n]{z}}$, контур $C = \{z : |z| = 1\}$, та $\sqrt[n]{1} = \exp\frac{2\pi i}{n}$, $\quad n \in \mathbb{N}$.

В прикладах 406–419 обчислити інтеграл I від заданої вітки логарифмічної функції вздовж кривої C:

406. $I = \int\limits_C z^n \mathrm{Ln}\ z\mathrm{d}z$, контур $C = \{z : |z| = 1\}$, де $n \in \mathbb{N}$ та $\mathrm{Ln}\ 1 = 0$.

407. $I = \int\limits_C |\mathrm{Ln}\ z|^3\mathrm{d}z$, де $\mathrm{Ln}\ 1 = 0$, контур $C = \{z : |z| = 1\}$.

408. $I = \int\limits_C \mathrm{Ln}\ z\mathrm{d}z$, контур $C = \{z : |z| = R\}$ та $\mathrm{Ln}\ R = \ln R + 2\pi i$.

409. $I = \int\limits_C z^n \mathrm{Ln}\ z\mathrm{d}z$, контур $C = \{z : |z| = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ та $\mathrm{Ln}\ (-1) = i\pi$.

410. $I = \int\limits_C |\text{Ln } z|^2 \mathrm{d}z$, контур $C = \{z \,:\, |z| = 1\}$, $\text{Ln } 1 = 2\pi i$.

411. $I = \int\limits_C \dfrac{\text{Ln } z}{z} \mathrm{d}z$, контур $C = \{z \,:\, |z| = 1\}$, де $\text{Ln } 1 = 2\pi i$.

412. $I = \int\limits_C \dfrac{\ln(z-3)}{z-3} \mathrm{d}z$, контур $C = \{z \,:\, |z| = 3\}$.

413. $I = \int\limits_C \left|\dfrac{\text{Ln } z}{z}\right| \mathrm{d}z$, контур $C = \{z \,:\, |z| = 1\}$, де $\text{Ln } 1 = 2\pi i$.

414. $I = \int\limits_C z^n \text{Ln } z |\mathrm{d}z|$, контур $C = \{z \,:\, |z| = 1\}$, де $n \in \mathbb{N}$ та $\text{Ln } 1 = 0$.

415. $I = \int\limits_C |\text{Ln } z| \mathrm{d}z$, контур $C = \{z \,:\, |z| = 1\}$, де $\text{Ln } (-1) = 7i\pi$.

416. $I = \int\limits_C \text{Ln } z |\mathrm{d}z|$, контур $C = \{z \,:\, |z| = 1\}$, де $\text{Ln } 1 = 4\pi i$.

417. $I = \int\limits_C |\text{Ln } z|^2 \mathrm{d}z$, контур $C = \{z \,:\, |z| = 1\}$, де $\text{Ln } 1 = 2\pi i$.

418. $I = \int\limits_C \dfrac{\text{Ln } z}{z} \mathrm{d}z$, контур $C = \{z \,:\, |z| = 2\}$, де $\text{Ln } (-2) = \ln 2 + 3\pi i$.

419. $I = \int\limits_C |\text{Ln } z| \cdot |\mathrm{d}z|$, контур $C = \{z \,:\, |z| = 1\}$, де $\text{Ln } (-1) = -\pi i$.

420. Довести, якщо $|a| \neq R$, то

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a||z+a|} < \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}.$$

421. Довести, якщо $|a| \neq R$, то

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2} = \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}.$$

422. Нехай $f(z) \in \mathcal{C}\left(U(z_0, \varepsilon)\right)$. Довести, що

$$\lim_{\varrho \to 0} \int\limits_{|z-z_0|=\varrho} \frac{f(z)}{z-z_0} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot f(z_0).$$

§2.5. Інтегральна теорема Коші. Інтегральна формула Коші

Інтегральна теорема Коші формулюється наступним чином: якщо функція $f(z) \in \mathcal{A}(D) \bigcap \mathcal{C}\left(\bar{D}\right)$, де область D однозв'язна, то інтеграл вздовж межі області

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Важливим наслідком є незалежність інтеграла від шляху інтегрування: якщо $f(z)$ аналітична в області D (не обов'язково однозв'язній), а криві Γ_1 та Γ_2 гомотопні, то

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Якщо функція $f(z) \in \mathcal{A}\left(D\right) \bigcap \mathcal{C}\left(\bar{D}\right)$, то для будь-якого $z \notin \partial D$ має місце *інтегральні формули Коші*:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \notin \overline{D}. \end{cases}$$

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{(n+1)}}\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} f^{(n)}(z), & z \in D \\ 0, & z \notin \overline{D}. \end{cases}$$

В прикладах 423–438 обчислити інтеграл I, використовуючи інтегральну формули Коші, вважати що обход усіх контурів здійсюється проти годинникової стрілки.

423. $I = \int\limits_{|z|=5} \dfrac{\mathrm{d}z}{(z+i)^2+25}.$

424. $I = \int\limits_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)^m}$, де $0 < a < \rho < b$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$.

425. $I = \int\limits_{|z-i|=1} \dfrac{\exp(i+2\sin z)\mathrm{d}z}{\left[z^2 - \frac{3+i}{2}\cdot z + 1 + \frac{3}{4}i\right]^3}.$

426. $I = \int\limits_{|z|=3} \dfrac{\mathrm{d}z}{4z^2+9(1+i)}.$

427. $I = \int\limits_{|z|=4} \dfrac{\cos z}{z^2-\pi^2}\mathrm{d}z.$

428. $I = \int\limits_{|z|=2} \dfrac{z^7}{\left(z^2+1\right)^3\left(z^2+5\right)}\mathrm{d}z.$

429. $I = \int\limits_{|z|=5/2} \dfrac{2\sin^3(1+i)z}{(2z+3i)(z-i)^2z^3}\mathrm{d}z.$

430. $I = \int\limits_{|z|=3} \dfrac{[f(z)]^2}{\left(z^2+3-i4\right)^3}\mathrm{d}z$, де $f(z) \in \mathcal{A}(U(0,3))$.

431. $I = \int\limits_{|z|=3} \dfrac{\sin(z+2i)}{(2z+3i)^2z^3}\mathrm{d}z.$

432. $I = \int\limits_{|z|=2} \dfrac{e^z}{z^2-1}\mathrm{d}z.$

433. $I = \int\limits_{|z+1|=1} \dfrac{\mathrm{d}z}{(z+1)(z-1)^3}.$

434. $I = \int\limits_{|z|=3} \dfrac{\cos z}{(z-i)^3}\mathrm{d}z.$

435. $I = \int\limits_{|z|=1/2} \dfrac{e^z \mathrm{d}z}{z(z-1)^3}$.

436. $I = \int\limits_{|z|=3/2} \dfrac{e^z \mathrm{d}z}{z(z-1)^3}$.

437. $I = \int\limits_{|z-1|=1/2} \dfrac{e^z \mathrm{d}z}{z(z-1)^3}$.

438. $I = \int\limits_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)}$, де $n = 1, 2, \ldots$, якщо $|a| < R < |b|$.

В прикладах 439–464 використовуючи інтегральну формули Коші, обчислити інтеграл I уздовж межі області D.

439. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{3z + 2i \sin z}{z^2 - z + 9 + 3i} \mathrm{d}z$, область

$$D = \{z = x + iy \ : \ y < 4, x + y > 0, x - y < 0\}.$$

440. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{e^z \mathrm{d}z}{z^2 + a^2}$, якщо круг $U(0, a) \subset D$.

441. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\sin(1 + iz)}{(z^2 + pz + q)^2} \mathrm{d}z$, якщо один з нулів полінома $z^2 + pz + q$ знаходиться всередині області D, а другий — зовні.

442. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{3e^{i2z} \sin z}{z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i} \mathrm{d}z$, область

$$D = \{z = x + iy \ : \ x > 3/2, x < 5/2, y > 0, y < 2\}.$$

443. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{e^z \mathrm{d}z}{z^3 (1 - z)^2}$, область $D = \{z \ : \ |z| < 1/2\}$.

444. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\sin(e^z)}{(az^2 + bz + c)^3} \mathrm{d}z$, якщо один з нулів полінома $az^2 + bz + c$ знаходиться всередині області D, а другий – зовні.

445. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{2z^2 + i}$, область $D = \{z = x + iy \ : \ x > 0, y > 0, |z| < 1\}$.

446. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\cos^3(2z) \mathrm{d}z}{(1 + 3z)(4z - 3i)^3}$, область $D = \left\{z \ : \ |z + 1| < \sqrt{2}\right\}$.

447. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\cos^3(2z) \mathrm{d}z}{(1 + 3z)(4z - 3i)^3}$, область $D = \left\{z \ : \ |z + 1| < \sqrt{2}\right\}$.

448. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z \exp(z^3)}{(z^6 - 1)^3} \mathrm{d}z$, область $D = \{z \ : \ \mathrm{Re}\ z < 0, |z| < 3\}$.

449. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\cos(2z^3 + i) \mathrm{d}z}{z(2z - 1)(2z^2 + 5z + 2)}$, область $D = \left\{z \ : \ |z| < 1, |z + \frac{2}{3}| > \frac{1}{3}\right\}$.

450. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{1+\exp(iz^2)}{z(3z-i)^3\left(3z^2 - z(6-i) + \dfrac{14}{3}\right)}\mathrm{d}z$, область

$$D = \left\{z \ : \ \text{Re}\ z > -\frac{1}{2},\ \text{Re}\ z < 1, |\text{Im}\ z| < \frac{2}{3}\right\}.$$

451. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{e^z}{z\,(1-z)^3}\mathrm{d}z$,область $D = \left\{z \ : \ |z| < \frac{3}{2}\right\}$.

452. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{(z+2)\sin(z^3)}{(z^2 - z\cdot(7+6i) + 17 + 9i)}\mathrm{d}z$,область

$$D = \{z \ : \ |z| < 6, -4 < y = \text{Re}\ z < 4\}.$$

453. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z\sin(z^2+4)}{(z^2 - 4z(1+i) + 8 + 14i)}\mathrm{d}z$,область

$$D = \{z \ : \ |z| < 4, |\arg z| < \pi/4\}.$$

454. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\sin^2(z+i)}{(8z+i)^3}\mathrm{d}z$, область $D = \{z \ : \ \alpha < \arg z < \beta, |z| > R\}$.

455. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\sin f(z)}{(2z^2+i)^4}\mathrm{d}z$, де $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ область $D = \{z : 1/8 < |z| < 8\}$.

456. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{(e^{2z}+3+i4)^2}{(z^2+2i)(z+7-i)^3}\mathrm{d}z$, область $D = \{z \ : \ |z-a| + |z-b| < R\}$.

457. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\text{sh}(z^3+8)}{(2z+3i)(z-i)^2 z^3}\mathrm{d}z$, область $D = \{z \ : \ 0 < |z| < 6\}$.

458. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{(e^z+1)}{(z^2+a^2)^3}\mathrm{d}z$, область $D = \{z \ : \ \text{Im}\ z > 0, |z| < R\}$.

459. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\text{ch}(\alpha z+\beta)}{(z^3+a^3)}\mathrm{d}z$, область $D = \{z \ : \ \text{Re}\ z > 0, |z| < R\}$.

460. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z+5i}{z^4-1}\mathrm{d}z$, область $D = \left\{z \ : \ \text{Im}\ z < -\frac{1}{2},\ |z| < 2\right\}$.

461. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^2e^z+1}{(\sin z+1)^2}\mathrm{d}z$, область $D = \left\{z \ : \ \text{Im}\ z > 0,\ |z| < 3\sqrt{2}\right\}$.

462. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{(e^z+1)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$, область $D = \{z \ : \ \text{Im}\ z > 0,\ |z| < 2\}$.

463. $I = \int\limits_{\partial D} \frac{\cos z + 1}{z^2 - \pi^2} \mathrm{d}z$, область $D = \{z \,:\, \mathrm{Re}\ z > 0,\ |z| < 4\}$.

464. $I = \int\limits_{\partial D} \mathrm{tg}\, z \mathrm{d}z$, область $D = \left\{z \,:\, |\mathrm{Re}\ z| < \sqrt{2},\ |\mathrm{Im}\ z| < \sqrt{2}\right\}$.

В прикладах 465–467 обчислити інтеграл I в залежності від вибору параметра R, використовуючи інтегральну формули Коші; якщо область не вказано, то вважати, що обхід усіх контурів здійсюється проти годинникової стрілки.

465. $I = \int\limits_{|z|=R} \frac{e^{\mathrm{sh}\, z}}{(3iz - 1)} \mathrm{d}z$.

466. $I = \int\limits_{|z|=R} \frac{f(z) - 2}{(z + 3i)(z^2 - 9)} \mathrm{d}z$, де $f(z) \in \mathcal{A}(U(0, R))$.

467. $I = \int\limits_{\partial D} \frac{\sin^3 z + 1}{(e^z + 1)^3} \mathrm{d}z$, де область $D = \{z \,:\, \mathrm{Im}\ z > 0,\ \mathrm{Re}\ z > 0, |z| < R\}$.

468. Скільки значень і яких має інтеграл

$$I = \int\limits_{\partial D} \frac{\mathrm{d}z}{\prod\limits_{k=1}^{n} (z - z_k)}, \qquad z_j \neq z_l,$$

якщо контур інтегрування не проходить ні через одну з точок $z_j, j = 1, 2, \ldots$?

469. Скільки значень і яких має інтеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{e^z \mathrm{d}z}{z(1 - z)^3},$$

в залежності від вибору області D ?

§2.6. Ряд Тейлора

Якщо функція $f(z) \in \mathcal{A}\left(U(a, R)\right)$, то в будь-якому крузі $U(a, \rho)$ меншого радіуса $\rho < R$ функцію можливо представити збіжним *рядом Тейлора*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Для зручного обчислення тейлорівських коефіцієнтів іноді корисно скористатись відомими розкладами. Так, наприклад, при $|z| < 1$ справджується розвинення:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

В прикладах 470–475 довести формули і вказати області збіжності рядів.

470. $\dfrac{z^3}{(z^2+1)(z-1)} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(z^{4n} + z^{4n-1}\right).$

471. $\dfrac{1}{(z^2+1)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n z^{2n}.$

472. $\dfrac{1}{(1+z^3)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{3n}.$

473. $\dfrac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(z^{8n} - z^{8n+1}\right).$

474. $\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)} = \frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n+1} - 4^{-n-1}\right) z^{2n+1}.$

475. $\dfrac{1}{(1-z^6)^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} z^{6n}.$

§2.7. Ряд Лорана, особливі точки

Рядом Лорана в околі точки a називають ряд вигляду $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Однозначна функція $f(z)$ є аналітичною у кільці $V(a,r,R)$ тоді та й тільки тоді, коли в будь-якому кільці $V(a, r+\varepsilon_1, R-\varepsilon_2)$, $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ цю функцію можна представити рівномірно збіжним рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\,, \quad \text{де} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|\zeta-a|=\rho \\ r<\rho<R}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

Точка a є *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, якщо існує виколотий окіл цієї точки, в якому функція $f(z)$ аналітична. Класифікацію ізольованих особливих точок проводять в залежності від вигляду головної частини ряда Лорана. Ізольована особлива точка a аналітичної функції $f(z)$ називається:

1° *усувною особливою точкою*, якщо головна частина лоранівського розкладу в околі цій точці відсутня; при цьому $\lim_{z\to a} f(z) = c_0 \neq \infty$;

2° *полюсом*, якщо головна частина лоранівського розкладу в околі цій точці містить скінчену кількість доданків; при цьому $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$;

3° *суттєво особливою точкою*, якщо головна частина лоранівського розкладу в околі цій точці містить нескінчену кількість доданків; при цьому $\lim_{z\to a} f(z)$ не існує.

В прикладах 476–484 знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z)$ та з'ясувати їх тип.

476. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$.

477. $f(z) = \exp\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{z}\right)$.

478. $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{sh} z}$.

479. $f(z) = \operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$.

480. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ctg}\pi z}{\pi z}$.

481. $f(z) = z\left(\exp\left(\dfrac{1}{z}\right) - 1\right)$.

482. $f(z) = \sin\left(e^{1/z}\right)$.

483. $f(z) = \sin 3z - 3\sin z$.

484. $f(z) = z\operatorname{tg}^2 z$.

В прикладах 485–492 знайти множину точок комплексної множини $\mathbb{C}$, де збігається зазначений ряд Лорана.

485. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n z^n$.

486. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|} z^n$.

487. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{(z-1)^n}{\operatorname{ch}\alpha n}$, де $\alpha > 0$.

488. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{(z-a)^{2n}}{2^{-n^2}+1}$.

489. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n^2} z^{n^3}$.

490. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{z^n}{3^n+1}$.

491. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n^2+1}$.

492. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n^2}(z+1)^n$.

В прикладах 493–509 розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана по степенях $(z-a)$ в кільці V.

493. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$, кільце $V(0,1,2)$, точка $a = 0$.

494. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$, кільце $V(0,1,2)$, точка $a = 0$.

495. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2(z^2-4)}$, кільце $V(0,1,2)$, точка $a = 0$.

496. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$, кільце $V(0,1,2)$, точка $a = 0$.

497. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$, кільце $V(0,1,2)$, точка $a = 0$.

498. $f(z) = \dfrac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$, кільце $V(0,1,2)$, точка $a=0$.

499. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+1)^2(z^2+4)}$, кільце $V(0,1,2)$, точка $a=0$.

500. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z+2)^2}$, кільце $V(0,1,2)$, точка $a=0$.

501. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)^2}$, кільце $V(1,1,2)$, точка $a=1$.

502. $f(z) = \dfrac{1}{z\,(z-1)\,(z-2)}$, точка $a=0$, якщо $-\frac{3}{2}\in V$.

503. $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$, точка $a=1$, якщо $2i\in V$.

504. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2-9)}$, кільце $V(1,1,2)$, точка $a=1$.

505. $f(z) = \dfrac{z^3}{(z+1)\,(z-2)}$, кільце $V(-1,0,3)$, точка $a=-1$.

506. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)\,(z^2+4)}$, кільце $V=(0,2,\infty)$, точка $a=0$.

507. $f(z) = \dfrac{z+i}{z^2}$, точка $a=i$, якщо $-i\in V$.

508. $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-2i}$, точка $a=1$, якщо $-1\in V$.

509. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-1)(z^2+4)}$, точка $a=1$, якщо $-1\in V$.

В прикладах 510–519 знайти ряд Лорана для функції $f(z)$ в кільці $V(a,r,R)$ представивши цю функцію у вигляді $f(z)=f_1(z)f_2(z)$, де функція $f_1(z)$ аналітична в області $|z-a|<R$, а функція $f_2(z)$ аналітична в області $|z-a|>r$.

510. $f(z)=z^3e^{1/z}$, де точка $a=0$, $0<|z|<\infty$.

511. $f(z)=z^2\sin\left(\pi\dfrac{z+1}{z}\right)$, де точка $a=0$, $0<|z|<\infty$.

512. $f(z)=z^3\cos\left(\dfrac{1}{z-2}\right)$, де точка $a=2$, $0<|z-2|<\infty$.

513. $f(z)=z^2\sin\left(\pi\dfrac{z+1}{z}\right)$, де точка $a=0$, $0<|z|<\infty$.

514. $f(z)=\dfrac{e^z}{z(1-z)}$, де точка $a=0$, $0<|z|<\infty$.

515. $f(z)=\dfrac{\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)}{z(z+1)}$, де точка $a=1$, $1<|z-1|<2$.

516. $f(z)=\exp\left[\dfrac{t}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\right]$, де точка $a=0$, $0<|z|<\infty$.

517. $f(z)=e^z\ln\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$,де точка $a=0$, $\max(|\alpha|,|\beta|)<|z|<\infty$.

518. $f(z)=\dfrac{1}{z}\exp\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$, де точка $a=1$, $0<|z-1|<1$.

519. $f(z)=\dfrac{1}{z-i}\exp\left(\dfrac{3}{z}\right)$, де точка $a=0$, $0<|z|<1$.

В прикладах 520–528 для функції $f(z)$ знайти головну частину ряду Лорана в околі точки z_0 та з'ясувати тип цієї точки.

520. $f(z) = \operatorname{ctg} \pi z$, де точка $z_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

521. $f(z) = \dfrac{1}{\sin \pi z}$, де точка $z_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

522. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2 + b^2)^2}$, де точка $z_0 = ib$.

523. $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{(z^2 + b^2)^2}$, де точка $z_0 = ib$, $b > 0$.

524. $f(z) = \dfrac{(z^2 + 1)^2}{z^2 + b^2}$, де точка $z_0 = \infty$.

525. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + b^2}$, де точка $z_0 = ib$, $b > 0$.

526. $f(z) = \dfrac{z - 1}{\sin^2 z}$, де точка $z_0 = 0$.

527. $f(z) = \dfrac{e^z + 1}{e^z - 1}$, де точка $z_0 = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$.

528. $f(z) = \dfrac{z}{(z + 2)^2}$, де точка $z_0 = -2$.

§2.8. Обчислення лишків

Лишком функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці a називається число

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z) \mathrm{d}z,$$

де C — довільна кусково-гладка жорданова крива, що знаходиться в області аналітичності $f(z)$ і охоплює a, причому контур C разом із областю, яку він охоплює, не містить інших особливих точок, крім a. Значення лишка може бути легко підраховано, якщо розкласти функцію в ряд Лорана: лишок функції $f(z)$ в скінченій точці a дорівнює коефіцієнту при $1/(z - a)$ в лоранівському розкладі $f(z)$ в околі a:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}.$$

Основні формули обчислення лишків в ізольованих особливих точках:

1° усувній особливий точкі, або точці аналітичності, лишок дорівнює нулеві.

2° в простому полюсі

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z);$$

Зокрема, нехай $f(z) = \phi(z)/\psi(z)$, де $\phi, \psi \in \mathcal{A}(U(a, \varepsilon))$, причому $\phi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$ та $\psi'(a) \neq 0$, тобто функція $f(z)$ має в a простий полюс, тоді

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}.$$

3° в полюсі n–го порядку

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\Big((z-a)^n f(z)\Big);$$

Зокрема, нехай $f(z) = \phi(z)/(z-a)^n$, де $\phi \in \mathcal{A}(U(a,\varepsilon))$, причому $\phi(a) \neq 0$, тоді

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{\phi(z)}{(z-a)^n} = \frac{\phi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!};$$

4° в суттєво особливій точці використовується тількі така формула

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}.$$

Лишком функції $f(z)$ в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ є число

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z,$$

де γ^- — коло $|z| = R$ досить великого радіуса, що обходиться за годинниковою стрілкою (так що окіл ∞ обходиться в додатньому напрямку). З цього означення випливатиме, що

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

В прикладах 529–551 обчислити лишок функції в зазначеній точці.

529. $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{\exp(z^2)}{z^{2n+1}}$.

530. $\operatorname*{res}_{z=1} z \exp\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$.

531. $\operatorname*{res}_{z=\infty} z^2 \sin(\pi/z)$.

532. $\operatorname*{res}_{z=\infty} z^n \exp(a/z)$.

533. $\operatorname*{res}_{z=\pi/4} \dfrac{\cos z}{z-(\pi/4)}$.

534. $\operatorname*{res}_{z=1} \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$.

535. $\operatorname*{res}_{z=\infty} e^{1/z}$.

536. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{\sin z}{z^2}$.

537. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{z^4+1}{z^6-1}$.

538. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \cos\pi\left(\dfrac{z+2}{2z}\right)$.

539. $\operatorname*{res}_{z=\infty} z\cos^2(\pi/z)$.

540. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{\sin(1/z)}{z-1}$.

541. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{\cos^2(\pi/z)}{z+1}$.

542. $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$, де $n \in \mathbb{N}$.

543. $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$.

544. $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2}$.

545. $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^n z}$, де $n = 2, 3, \ldots$.

546. $\operatorname*{res}_{z=0} z^{n-3} \operatorname{ctg}^n z$, де $n = 2, 3, \ldots$.

547. $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{1}{2}z^2}$.

548. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \ln \dfrac{z-1}{z+1}$.

549. $\operatorname*{res}_{z=1} (z+1)^3 \exp \dfrac{1}{z-1}$.

550. $\operatorname*{res}_{z=\infty} e^z \ln \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$.

551. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{(z^{10}+1)\cos(1/z)}{(z^5+2)(z^6-1)}$.

В прикладах 552–573 обчислити лишкі функції $f(z)$ в усіх особливих точках $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

552. $f(z) = \dfrac{1}{\sin z^2}$.

553. $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$.

554. $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 1}$.

555. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-1)^2}$.

556. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$.

557. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$.

558. $f(z) = \dfrac{1}{\sin \pi z}$.

559. $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

560. $f(z) = \operatorname{cth}^2(\pi z)$.

561. $f(z) = \dfrac{1}{z + z^3}$.

562. $f(z) = \operatorname{th} z$.

563. $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$.

564. $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^3}$.

565. $f(z) = \operatorname{ctg} \pi z$.

566. $f(z) = \dfrac{1}{z^6(z-2)}$.

567. $f(z) = \dfrac{1+z^8}{z^6(z+2)}$.

568. $f(z) = \dfrac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$.

569. $f(z) = \dfrac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)}$, де $a \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

570. $f(z) = (\sin z)(\sin(1/z))$.

571. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$.

572. $f(z) = \dfrac{1+z^8}{z^4(z^4+1)} \cos z \operatorname{ch} z$.

573. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

Глава 3

Застосування теорії аналітичних функцій

§3.1. Обчислення інтегралів по замкнених контурах за допомогою лишків

Застосування лишків базується на теоремі про лишки: нехай функція $f(z) \in \mathcal{A}\left(D \setminus \bigcup_k z_k\right)$, де $k = \overline{1,n} < \infty$. Тоді

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k \in D} f(z).$$

Якщо функція $f(z)$ аналітична на розширеній комплексній площині всюду, крім скінченої кількості ізольованих особливих точок, $f(z) \in \mathcal{A}\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_k z_k\right)$, де $k = \overline{1,n} < \infty$, тоді повна сума лишків рівна нулеві:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

В прикладах 574–615 обчислити інтеграл I вздовж межі області D.

574. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{1+z^4}$, область $D = \{z : |z-1| < 1\}$.

575. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^2\mathrm{d}z}{\sin \pi z - \frac{1}{2}}$, область $D = \{z \,:\, \mathrm{Re}\ z > 0, |z| < 2\}$.

576. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z-1-i| < 2\}$.

577. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z\mathrm{d}z}{\cos \pi z + 1}$, область $D = \{z : \mathrm{Re}\ z > 0, |z| < 5/2\}$.

578. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\sin z}{(z+1)^3}\mathrm{d}z$, область $D = \left\{x, y : x^{2/3} + y^{2/3} < 2^{2/3}\right\}$.

579. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2+i}$, область $D = \{z : |z| < 2, \mathrm{Im}\ z > 0\}$.

580. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z}{z+3} \exp\left(\dfrac{1}{3z}\right)\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 4\}$.

581. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z\mathrm{d}z}{z^4+5z^2+4}$, область $D = \{z : |z| > 1/8, |z| < 8\}$.

582. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\exp\left(\dfrac{1}{z}\right) \mathrm{d}z}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, область $D = \{z : 2 < |z| < 4\}$.

583. $I = \int\limits_{\partial D} \operatorname{tg} z \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |\mathrm{Re}\ z| < \pi, |\mathrm{Im}\ z| < 1,\}$.

584. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^3}{z+1} \exp\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 2\}$.

585. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{(z+1)^2 \mathrm{d}z}{(\sin \pi z)^3}$, область $D = \{z : |z+1| < 1/2\}$.

586. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)}$, область $D = \{z : |z| < 2\}$.

587. $I = \int\limits_{\partial D} z \sin^2(1/z) \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 1/3\}$.

588. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^3 \mathrm{d}z}{z^4-1}$, область $D = \{z : |z| < 2\}$.

589. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\sin^2 z}{z^5} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 7\}$.

590. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^2 \sin^2(1/z)}{(z-1)(z-2)} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 3\}$.

591. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{z^3(2z^5-64i)}$, область $D = \{z : \mathrm{Re}\ z > 0, \mathrm{Im}\ z > 0, |z| < 2\}$.

592. $I = \int\limits_{\partial D} \sin \dfrac{z}{z+1} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 3\}$.

593. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{(z^2+1) \mathrm{d}z}{(z+i)^2}$, область $D = \{z : |z| < 3/2\}$.

594. $I = \int\limits_{\partial D} z \sin \dfrac{z+1}{z-1} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 2\}$.

595. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{(z^2-4z+5)^2}$, область $D = \{z : \mathrm{Re}\ z > 0, \mathrm{Im}\ z > 0, |z| < 5$

596. $I = \int\limits_{\partial D} \sin \dfrac{1}{z-1} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z-1| > 1\}$.

597. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^3} \mathrm{d}z$, де $a > 0$, область $D = \{z : \mathrm{Im}\ z < 0, |z| < 3a\}$.

598. $I = \int\limits_{\partial D} \exp\left(\dfrac{1}{1-z}\right) \dfrac{\mathrm{d}z}{z}$, область $D = \{z : |z-2| + |z+2| < 6\}$.

599. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{2z-3}{(z^2+\beta^2)^2} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : -1 < \mathrm{Re}\ z < 2, 0 < \mathrm{Im}\ z < 2\beta\}$.

600. $I = \int\limits_{\partial D} z \cos \dfrac{z}{z+1} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 2\}$.

601. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{(z^2+2z+10)^2}$, область $D = \{z : |z| > 4\}$.

602. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\sin z}{(z^3-z)(z-i)} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z-1| < 1\}$.

603. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{2z^2+4z-1}{z^3(z^2+i)^2} \mathrm{d}z$, область $D = \{\mathrm{Re}\ z > -1/2, \mathrm{Im}\ z > -1, |z| < 5\}$.

604. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\operatorname{ctg} z}{z} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 1\}$.

605. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\cos^2 z}{z(1-z+z^2)^2}$, область $D = \{z : |z| < 3\}$.

606. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{e^{\pi z}}{2z^2 - i}\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 1, \mathrm{Re}\ z > 0, \mathrm{Im}\ z > 0\}$.

607. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{1}{z^2 - 2iz - 2}\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 5\}$.

608. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z}{e^{z^2} - 1}\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 4\}$.

609. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z \sin z}{z^2 + i9}\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 4\}$.

610. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^3}{e^{z^2} - 1}\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 4\}$.

611. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{e^{2z}}{i - 8z^3}\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 1\}$.

612. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{125i + z^3}$, область $D = \{z : \mathrm{Re}\ z > 0, \mathrm{Im}\ z > 0, 4 < |z| < 7\}$.

613. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^2\mathrm{d}z}{e^{i2\pi z^2} - 1}$, область $D = \left\{z : |z| < [n + (1/2)]^{1/2}\right\}$, де $n = 0, 1, 2, \ldots$.

614. $I = \int\limits_{\partial D} \ln\dfrac{z+1}{z-1}\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 2\}$.

615. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\cos z}{\ln z + i\pi}\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z + 1| < 1/2\}$.

§3.2. Обчислення простіших визначених інтегралів за допомогою теорії лишків

§3.2.1. Інтеграли вигляду $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$

Нехай $R(x, y)$ — раціональна функція. Тоді

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{\substack{z=z_k \\ z\in U(0,1)}} \frac{1}{z} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right].$$

В прикладах 616–647 обчислити інтеграл I.

616. $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{5 + 3\cos\varphi}$.

617. $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{13 + 12\sin\varphi}$.

618. $I = \int\limits_{0}^{\pi} \dfrac{\cos^4\varphi}{1 + \sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

619. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{\cos^2\varphi}{13 + 12\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

620. $I = \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{ctg}(\varphi - ia)\mathrm{d}\varphi$, де $a > 0$.

621. $I = \int\limits_{0}^{\pi} e^{2i\varphi}\,\mathrm{ctg}(\varphi - ia)\mathrm{d}\varphi$, де

$a > 0$.

622. $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$, де $a > 1$.

623. $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$, де $-1 < a < 1$.

624. $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$, де $a = 1$.

625. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{a+\sin\varphi}$, де $a > 1$.

626. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{a+\sin\varphi}$, де $-1 < a < 1$.

627. $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$, де $-1 < a < 1$.

628. $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$, де $-1 < a < 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

629. $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\varphi}{1-2a\sin\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$, де $-1 < a < 1$, $n = 1, 2, \ldots$.

630. $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+2\cos\varphi)^n}{5+4\cos\varphi}\cos n\varphi\mathrm{d}\varphi$, де $n = 0, 1, 2, \ldots$.

631. $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos^2\varphi-\cos^2 a}{\sin\varphi-\sin a}\right)^n e^{in\varphi}\mathrm{d}\varphi$, де $0 < a < \pi/2$, $n = 1, 2, 3 \ldots$.

632. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1-2p\cos 2\varphi+p^2}\mathrm{d}\varphi$, де $0 < p < 1$.

633. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$ де $|a| < 1$.

634. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$ де $|a| > 1$.

635. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$ де $|a| = 1$.

636. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1+a\cos\varphi}$, де $|a| < 1$.

637. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$, де $0 < b < a$.

638. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}$, де $0 < b < a$.

639. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2p\cos 2\varphi+p^2}\mathrm{d}\varphi$, де $|p| < 1$.

640. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2p\cos 2\varphi+p^2}\mathrm{d}\varphi$, де $|p| > 1$.

641. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2p\cos 2\varphi+p^2}\mathrm{d}\varphi$, де $|p| = 1$.

642. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^3}$, де $0 < b < a$.

643. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi}{a+b\cos\varphi}$, де $0 < b < a$.

644. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi}{a\cos\varphi+b}$, де $0 < a < b$.

645. $I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$, де $0 < b < a$.

646. $I = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{1-a\sin^2\varphi}$, $0 < a < 1$.

647. $I = \int\limits_0^{\pi} \dfrac{\cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi}{1 - a\sin^2\varphi}$, $0 < a < 1$.

§3.2.2. Інтеграли вигляду $I = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x$

Нехай функція $f(z)$ — мероморфна на верхній півплощині, $f(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_+)$, містить лише скінчену кількість полюсів, не має особливих точок на дійсній вісі та задовольняє оцінку

$$|f(z)| \underset{z\to\infty}{\leq} \frac{1}{|z|^{1+\delta}}, \quad \delta > 0.$$

Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_k\in\mathbb{C}_+} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$$

Припустимо, що підінтегральна функція має полюси на дійсній вісі в точках $x = x_k$. Тоді інтеграл розбігається. Але в цьому випадку може збігатися його *головне значення* в сенсі Коші. Нехай функція $f(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_+)$, що має лише скінчену кількість полюсів, задовольняє оцінку $|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^{1+\delta}}$ при $z \to \infty$, де $\delta > 0$. Тоді

$$\fint\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_k\in\mathbb{C}_+} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \pi i \sum_{x_k\in\mathbb{R}} \operatorname*{res}_{z=x_k} f(z),$$

В прикладах 648–696 обчислити інтеграл I.

648. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^3}$, де $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

649. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2x+1}{x^6+i}\mathrm{d}x$.

650. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^4+5x^2+5}\mathrm{d}x$.

651. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$, де $a > 0,\ b > 0$.

652. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3(x^2+b^2)}$, де $a > 0,\ b > 0$.

653. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(x-2)\mathrm{d}x}{x^4+3x^2+2}$.

654. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(x-1)x}{x^4-2x^2+2}\mathrm{d}x$.

655. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, де $a > 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

656. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(2x+1)^2}{(x^2+2x+10)^3}\mathrm{d}x$.

657. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)(x^2+a^2)^2}$, де $a > 0$.

658. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+px^2+q}$, де $\Delta = p^2-4q<0$.

659. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2ix-2)^3}$.

660. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3+1}{(x^6+i64)^2}\mathrm{d}x$.

661. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(ax^4+bx^2+c)^2}$, де $\Delta = b^2-4ac<0$.

662. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-2ix^2-2)^3}$.

663. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-i)^3}$.

664. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{x^4-1+i}\mathrm{d}x$.

665. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+1}{x^6-1+i}\mathrm{d}x$.

666. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-2x^2+2)^3}$.

667. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3-i}$.

668. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+6x^2+25)^2}$.

669. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2+3}{x^4+2x^2+10}\mathrm{d}x$.

670. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^4+1+i)^2}$.

671. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1-5x^2\mathrm{d}x}{(x^4+1-i)^3}$.

672. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x$, де $a>0$.

673. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+9)}\mathrm{d}x$.

674. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2ix-2}$.

675. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

676. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$.

677. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+6x^2+25}$.

678. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x$.

679. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$.

680. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2-4ix-5)^2}$.

681. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}$, де $a>0$.

682. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^6\mathrm{d}x}{(x^4+a^4)^2}$, де $a>0$.

683. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2ix-a^2)^3}$, де $a>0$.

684. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^4\mathrm{d}x}{(a+bx^2)^4}$, де $a>0$, $b>0$.

685. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$, де $a>0$, $b>0$.

686. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2i\alpha x-\alpha^2-\beta^2)^n}$, де $\alpha>0$, $\beta>0$, $n=1,2,\ldots$.

687. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)^n}$, де $a>0$, $b>0$, $n=1,2,\ldots$.

688. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x+1)^3}{(x^4+8x^2+16)^2}\mathrm{d}x$.

689. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x-1}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$, де $p, q \in \mathbb{R}$, $D = p^2 - 4q < 0$.

690. $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}$.

691. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+i)(x^2+4ix-5)^2}$.

692. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-i)^2}$.

693. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^3}$.

694. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9i)^3}$.

695. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x-5}{\left[x^2-(1-i)x+(2+i)\right]^2}\mathrm{d}x$.

696. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+2}{(x^4+16)(x^2-2ix-2)}\mathrm{d}x$.

В прикладах 697–704 обчислити головне значення інтеграла.

697. $I = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x-1)}$.

698. $I = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$.

699. $I = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$.

700. $I = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^5-1}$.

701. $I = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)(x-1)}$.

702. $I = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4-1}\mathrm{d}x$.

703. $I = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+2x^2-3}\mathrm{d}x$.

704. $I = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+4}{x^4+4x^2-12}\mathrm{d}x$.

§3.2.3. Інтеграли вигляду $I = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x$

Нехай функція $f(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_+)$, містить лише скінчену кількість полюсів, не має особливих точок на дійсної вісі та задовольняє умовам леми Жордана. Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{C}_+} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[e^{i\alpha z} f(z)\right], \ \alpha > 0. \tag{3.1}$$

В прикладах 705–730 обчислити інтеграл I.

705. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$, де $a > 0$.

706. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$, де $a > 0$.

707. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+2x+10}\mathrm{d}x.$

708. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^3+13x}{x^4+13x^2+36}\sin x\mathrm{d}x.$

709. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$, де $a > 0$.

710. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x$, де Re $a > 0$.

711. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x.$

712. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$, де Re $a > 0$, Re $b > 0$.

713. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\mathrm{d}x$, де $a > 0$, Re $b > 0$.

714. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x$, де $a > 0$, Re $b > 0$.

715. $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$, де $a > 0$.

716. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x.$

717. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5}\mathrm{d}x.$

718. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x.$

719. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x.$

720. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2-2ix-2)^2}\mathrm{d}x.$

721. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^4+8x^2+16}\mathrm{d}x.$

722. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\mathrm{d}x}{x^2-2ix-2}.$

723. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x.$

724. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(ax^2+bx+c)^3}\mathrm{d}x$, де $a,b,c \in \mathbb{R}$, $D = b^2-4ac < 0$.

725. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\mathrm{d}x}{(x^2+4ix-5)^3}.$

726. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{ix}\mathrm{d}x}{x^2-6x+109}.$

727. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x.$

728. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\sin 2x}{x^4-2x^2+5}\mathrm{d}x.$

729. $I = \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{z\operatorname{ch} z}{(z+1)(z+2)}\mathrm{d}z.$

730. $I = \int\limits_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{z\cos zt}{(z+1)^2}\mathrm{d}z$, де $t > 0$.

§3.3. Обчислення визначених інтегралів від багатозначних функцій

В тому випадку, коли повна аналітична функція є багатозначною, для застосування теореми про лишкі потрібно, перш за все, виключити точки розгалуження. Але цього не досить, так як при обході точок розгалуження функція не повертається до того ж значення, тобто необхідно зробити розріз. А потім розглядати однозначну вітку $f(z)$ повної аналітичної функції, що є безпосереднім продовженням функції $f(x)$ на $\overline{\mathbb{C}}$-площину.

§3.3.1. Інтеграли вигляду $I = \int_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} f(x)\mathrm{d}x$

До цього типу належать інтеграли типу *перетворення Мелліна* функції $f(x)$. Нехай функція $f(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ містить лише скінчену кількість полюсів, не має особливих точок на $\mathbb{R}_+$ та задовольняє оцінкам

$$\lim_{z\to 0} |z|^\alpha f(z) = 0, \qquad \lim_{z\to\infty} |z|^\alpha f(z) = 0,$$

причому $f(0) \neq 0$. Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}} \sum_{z_k\in\mathbb{C}} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left\{z^{\alpha-1} f(z)\right\}.$$

В прикладах 731–735 обчислити інтеграл I.

731. $I = \int\limits_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(x+\beta)}$, де $\beta > 0$, $\alpha \in (0,1)$.

732. $I = \int\limits_0^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x+4)\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

733. $I = \int\limits_0^\infty \dfrac{x^\alpha}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x$, де $\alpha \in (-1,1)$.

734. $I = \int\limits_0^\infty \dfrac{x\sqrt{x}}{(x+1)(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x$.

735. $I = \int\limits_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, де Re $\alpha \in (0,n)$, $n \in \mathbb{N}$.

§3.3.2. Інтеграли типа $I = \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^\alpha f(x)\mathrm{d}x$

Нехай функція $f(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ містить лише скінчену кількість полюсів та не має особливих точок на інтервалі Re $z \in [a;b]$. Тоді

$$\int\limits_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha-1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}} \sum_{z_k\in\overline{\mathbb{C}}\setminus[a;b]} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left\{\left(\frac{z-a}{b-z}\right)^{\alpha-1} f(z)\right\},\ \alpha \in (0;1), \tag{3.2}$$

де підсумовування ведеться по всіх полюсах підінтегральної фукнції, включаючи $z=\infty$, окрім точок розрізу $[a;b]$.

В прикладах 736–747 обчислити інтеграл I.

736. $I = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(x+1)^3}\mathrm{d}x.$

737. $I = \int\limits_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

738. $I = \int\limits_0^1 \sqrt{x^3-x^4}\mathrm{d}x.$

739. $I = \int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x}\mathrm{d}x$, де $p \in (-1;2)$.

740. $I = \int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\mathrm{d}x$, де $p \in (-1;2)$.

741. $I = \int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$, де $p \in (-1;2)$.

742. $I = \int\limits_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$, де $p \in (-1;2)$.

743. $I = \int\limits_0^2 \sqrt[5]{x^2(2-x)^3}\mathrm{d}x.$

744. $I = \int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)\sqrt{1-x^2}}$, де $\alpha > 1$.

745. $I = \int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)\sqrt{1-x^2}}$, де $\alpha \in (-1;1)$.

746. $I = \int\limits_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4x-3-x^2}}.$

747. $I = \int\limits_2^3 \frac{x+1}{x^4\sqrt{5x-6-x^2}}\mathrm{d}x.$

§3.4. Задача Діріхле. Фунція Гріна

Постанова задачи Діріхле має вигляд: *знайти функцію $u(x,y)$, що є гармонічною в області D, неперервною в замкненій області $\overline{D}$, що на межі ∂D приймає певні неперервні значення*

$$u(x,y)\Big|_{\partial D} = u_0(x,y).$$

Розв'язок задачі шукатимемо за допомогою метода функцій Гріна. *Функція Гріна* або *функція джерела* задачи Діріхле — це функція двох змінних $G(z,z_0)$, що має властивості:

1. $G(z,z_0) \in \mathcal{H}_z(D \setminus z_0)$;
2. $G(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln|z-z_0| + h(z), \quad h(z) \in \mathcal{H}(D)$;
3. $G(z,z_0)\Big|_{z\in\partial D} = 0.$

Якщо функція $w = f(z,z_0)$ здійснює конформне відображення області D на одиничний круг $U(0,1)$, при якому точка $z_0 \mapsto 0$, функція Гріна задачи Діріхле для області D має вигляд

$$G(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln|f(z,z_0)|.$$

Розв'язок задачи Діріхле дається теоремою Гріна: нехай функція $w = f(z, z_0)$ здійснює конформне відображення області D на одиничний круг $U(0, 1)$, при якому точка $z_0 \mapsto 0$. Тоді розв'язок задачи Діріхле для області D дається *формулою Гріна*

$$u(z_0) = \int\limits_{\partial D} u_0(z) \frac{\partial G(z, z_0)}{\partial n} \mathrm{d}z,$$

де $\partial/\partial n$ — похідна в напрямку зовнішньої нормалі.

В прикладах 748–752 довести, що функція Гріна для області D має зазначений вигляд.

748. Довести, що функція Гріна для півплощини $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ є

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} \right|.$$

749. Довести, що функція Гріна для круга $D = \{z : |z| < 1\}$ є

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}} \right|.$$

750. Довести, що функція Гріна для круга $D = \{z : |z| < R\}$ є

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - z\overline{z_0}} \right|.$$

751. Довести, що функція Гріна для смуги $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ є

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{e^{\pi z} - e^{\pi z_0}}{e^{\pi z} - e^{\pi \overline{z_0}}} \right|.$$

752. Довести, що функція Гріна для прямокутника $D = \{z : -\mathbb{K} < x < +\mathbb{K}; 0 < y < \mathbb{K}'\}$ є

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sigma(z, k) - \sigma(z_0, k)}{\sigma(z, k) - \sigma(\overline{z_0}, k)} \right|.$$

В прикладах 753–757 розв'язати задачі Діріхле.

753. $$\left\| \begin{array}{ll} \Delta u(x, y) = 0, & \text{в } D = \{x, y : -\infty < x < +\infty, y > 0\}, \\ u(x, 0) = \dfrac{A^2}{B^2 + x^2}, & A, B \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

754.
$$\Delta u(\rho,\phi)=0, \text{в } D=\{\rho,\phi:\rho<1,\ 0<\phi<2\pi\},$$
$$u(1,\phi)=\begin{cases}\cos\phi, & 0<\phi<\pi\\ \sin\phi, & \pi<\phi<2\pi\end{cases}.$$

755.
$$\Delta u(\rho,\phi)=0,\ \text{в } D=\{\rho,\phi:\rho<R,\ 0<\phi<2\pi\},$$
$$u(R,\phi)=\begin{cases}\phi, & 0<\phi<\pi\\ 0, & \pi<\phi<2\pi\end{cases}.$$

756.
$$\Delta u(x,y)=0,\ \text{в } D=\{x,y:-\infty<x<+\infty,\ 0<y<1\},$$
$$u(x,0)=\begin{cases}1, & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases},u(x,1)=\begin{cases}-1, & |x|<b\\ 0, & |x|>b\end{cases}.$$

757.
$$\Delta u(x,y)=0,$$
$$\text{в } D=\{x,y:-\mathbb{K}<x<+\mathbb{K};0<y<\mathbb{K}'\},$$
$$u(x,0)=1,\ -\mathbb{K}<x<+\mathbb{K}$$
$$u(x,\mathbb{K}')=0\ -\mathbb{K}<x<+\mathbb{K},$$
$$u(\pm\mathbb{K},y)=-1\ 0<y<\mathbb{K}'.$$

§3.5. Конформні відображення

Конформним відображенням в точці z_0 називається відображення $w=f(z)$, при якому має місце зберігання кутів і незалежність масштабу від напрямку. Відображення $w=f(z)$ є конформним в області D, якщо функція $f(z)$ є аналітичною і однолистною в області D, а її похідна не рівна нулеві в D.

§3.5.1. Дробово–лінійні функції

Функція $w=\sigma(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, де a, b, c та d — комплексні стали, причому $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$ та $c\neq 0$, має назву дробово-лінійної функції, а відображення, яку вона здійснює — дробово-лінійним відображенням. Основні властивості дробово-лінійних відображень:

1° <u>конформність</u>: дробово-лінійна функція здійснює конформне відображення розширеної комплексної площини в себе;

2° <u>групова властивість</u>: сукупність дробово-лінійних відображень утворює групу;

3° <u>кругова властивість</u>: дробово-лінійна функція відображує коло розширеної комплексної площини на коло розширеної комплексної площини.

Визначення дробово-лінійного відображення за трьома точками: дробово-лінійне відображення площини z на площину w, що переводить точки z_1, z_2, z_3 на w_1, w_2 та w_3 має вигляд:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

В прикладах 758–765 визначити дробово-лінійне відображення площини z на площину w, що переводить точки $z_1\mapsto w_1$, $z_2\mapsto w_2$, $z_3\mapsto w_3$.

758. $-1\mapsto 0$, $i\mapsto 2i$, $1+i\mapsto 1-i$.

759. $1\mapsto 1$, $2\mapsto i$, $3\mapsto -i$.

760. $1\mapsto\infty$, $-1\mapsto 0$, $3\mapsto 1$.

761. $-1\mapsto i$, $\infty\mapsto 1$, $i\mapsto 1+i$.

762. $-1\mapsto\infty$, $\infty\mapsto i$, $i\mapsto 1$.

763. $-1\mapsto 0$, $\infty\mapsto\infty$, $i\mapsto 1$.

764. $1\mapsto 1$, $i\mapsto i$, $0\mapsto -1$.

765. $1/2\mapsto 1/2$, $2\mapsto 2$, $5/4+3i/4\mapsto\infty$.

В прикладах 766–767 знайти відображення верхньої півплощини на себе при наведеному нормуванні.

766. $0\mapsto 1$, $1\mapsto 2$, $2\mapsto\infty$.

767. $0\mapsto 1$, $i\mapsto 2i$.

В прикладах 768–774 знайти загальний вигляд дробово-лінійних відображень наведених областей.

768. Відображення півплощини $\mathrm{Im}\ z>0$ на півлощину $\mathrm{Im}\ w>0$.

769. Відображення півплощини $\mathrm{Im}\ z>0$ на круг $|w|<1$.

770. Відображення круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$.

771. Відображення круга $|z-z_0|<R$ на круг $|w|<1$.

772. Відображення круга $|z|<R$ на півлощину $\mathrm{Im}\ w>0$.

773. Відображення півплощини $\mathrm{Re}\ z>0$ на круг $|w|<1$.

774. Відображення півплощини $\mathrm{Re}\ z>0$ на півлощину $\mathrm{Re}\ w>0$.

§3.5.2. Відображення елементарними функціями

В прикладах 775–799 знайти образ області D при відображенні $w(z)$.

775. $D=\{z\ :\ |z|<1, \mathrm{Im}\ z>0\}$, $w=\dfrac{1-z}{1+z}$.

776. $D=\{z\ :\ z\notin[-2;1]\}$, $w=\dfrac{z+2}{1-z}$.

777. $D=\{z\ :\ |z-i|>1, \mathrm{Im}\ z>0\}$, $w=\dfrac{1}{z}$.

778. $D=\{z\ :\ 1<|z|<2\}$, $w=\dfrac{2}{z-1}$.

779. $D = \{z \;:\; \mathrm{Im}\; z > 0\}$, $w = z^2$.
780. $D = \{z \;:\; \mathrm{Re}\; z > 0\}$, $w = z^2$.
781. $D = \{z \;:\; \pi < \arg z < 3\pi/2\}$, $w = z^2$.
782. $D = \{z \;:\; |z| > 1/2,\; \mathrm{Re}\; z > 0\}$, $w = z^2$.
783. $D = \{z \;:\; |\arg z| < \pi/8,\; z \notin [0;1]\}$, $w = z^8$.
784. $D = \{z \;:\; |z| < 1/2\}$, $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$.
785. $D = \{z \;:\; |z| > 2\}$, $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$.
786. $D = \{z \;:\; |z| < 1,\; z \notin [0;1]\}$, $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$.
787. $D = \{z \;:\; |z| < 1,\; 0 < \arg z < \pi/2\}$, $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$.
788. $D = \{z \;:\; |z| < 1, -3\pi/4 < \arg z < -\pi/4\}$, $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$.
789. $D = \{z \;:\; -\pi < \mathrm{Im}\; z < 0\}$, $w = e^z$.
790. $D = \{z \;:\; |\mathrm{Im}\; z| < \pi\}$, $w = e^z$.
791. $D = \{z \;:\; |\mathrm{Im}\; z| < \pi/2\}$, $w = e^z$.
792. $D = \{z \;:\; |\mathrm{Im}\; z| < \pi/4\}$, $w = \mathrm{th}\, z$.
793. $D = \{z \;:\; 0 < \mathrm{Re}\; z < \pi\}$, $w = \mathrm{tg}\, z$.
794. $D = \{z \;:\; 0 < \mathrm{Im}\; z < \pi\}$, $w = \mathrm{ch}\, z$.
795. $D = \{z \;:\; \mathrm{Im}\; z > 0\}$, $w = \ln z$, де $w(i) = i\pi/2$.
796. $D = \{z \;:\; -\pi < \mathrm{Im}\; z < \pi\}$, $w = z + e^z$.
797. $D = \{z \;:\; |z| < 1\}$, $w = \ln \dfrac{1}{1-z}$.
798. $D = \big\{z \;:\; (\mathrm{Im}\; z)^2 - (\mathrm{Re}\; z)^2 \le 1/2\big\}$, $w = \ln\big(z + \sqrt{z^2+1}\big)$, де $w(0) = 2\pi i$.
799. $D = \{z \;:\; \mathrm{Im}\; z > 0,\; \mathrm{Re}\; z > 0\}$, $w = \ln\big(z + \sqrt{z^2+1}\big)$, де $w(2) > 0$.

§3.5.3. Відображення Шварца–Христоффеля

Розв'язок задачі про конформне відображення верхньої півплощини на багатокутник дає відображення Шварца—Христоффеля. Функція

$$f(z) = C \int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k - 1} \mathrm{d}z + w_0$$

здійснює конформне відображення верхньої півплощини на обмежений n-кутник так, що

$$f(a_k) = A_k,$$

кут при вершині A_k дорівнює $\pi\alpha_k$, C, z_0, w_0 та a_k — комплексні стали.

800. Відобразити верхню півплощину $\mathbb{C}_+$ в трикутник з кутами $\pi/2, \pi/4, \pi/4$ так, щоби

$$(a_1, a_2, a_3) = (0, 1, \infty) \mapsto (A_1, A_2, A_3) = (0, \omega, \omega + i\omega).$$

801. Відобразити верхню півплощину $\mathbb{C}_+$ в трикутник з кутами $\pi/2, \pi/3, \pi/6$ так, щоби

$$(a_1, a_2, a_3) = (0, 1, \infty) \mapsto (A_1, A_2, A_3) = (0, \omega, \omega + \frac{i\omega}{\sqrt{3}}).$$

802. Відобразити верхню півплощину $\mathbb{C}_+$ в трикутник з кутами $\pi/3, \pi/3, \pi/3$ так, щоби

$$(a_1, a_2, a_3) = (0, 1, \infty) \mapsto (A_1, A_2, A_3) = (0, \omega, \omega\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}).$$

803. Знайти області площини w, на які функція

$$w = f(z) = \int\limits_0^z \frac{t - \lambda}{\sqrt{t(t - \lambda)}} \mathrm{d}t,$$

відображає верхню півплощину $\mathbb{C}_+$ за умови, що 1)$\lambda < 0$, 2)$0 < \lambda < 1/2$, 3)$\lambda = 1/2$, 4)$1/2 < \lambda < 1$, 5)$\lambda > 1$.

804. Показати, що функція

$$w = f(z) = \int\limits_0^z z^{\alpha_1 - 1}(1 - z)^{\alpha_2 - 1} \mathrm{d}z,$$

$$\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 < 1$$

відображає конформно верхню півплощину $\mathbb{C}_+$ в трикутник з вершинами

$$A_1 = w(0) = 0,\ A_2 = w(1) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

$$A_3 = w(\infty) = e^{\imath\alpha_1}\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}{\Gamma(1 - \alpha_2)}.$$

805. Показати, що функція

$$w = f(z) = \int\limits_0^z \frac{\mathrm{d}z}{(1 - z^6)^{1/3}}$$

відображає конформно круг $|z| < 1$ в правильний шестикутник з вершинами $A_k = Ae^{\imath\pi k/3},\ k = 1, 2, \ldots, 6$, де

$$A = \frac{\Gamma(1/6)\Gamma(2/3)}{6\Gamma(5/6)}.$$

806. Показати, що функція

$$w = f(z) = \int\limits_{\infty}^{z} \frac{(1+z^5)^{2/5}}{(1-z^5)^{4/5}} \mathrm{d}z$$

відображає конформно круг $|z| < 1$ в зірку з вершинами

$$A_k = Ae^{\imath 2\pi k/5},\ B_k = Be^{\imath\pi(2k+1)/5},\ k = 1, 2, \ldots, 5,$$

де

$$A = \int\limits_{0}^{1} \frac{(1+t^5)^{4/5}}{(1-t^5)^{2/5}} \mathrm{d}t\ B = \int\limits_{0}^{1} \frac{(1-z^5)^{2/5}}{(1+z^5)^{4/5}} \mathrm{d}t.$$

807. Показати, що функція Шварца-Христоффеля є розв'язком лінійного диференціального рівняння з раціональними коефіцієнтами

$$w'' = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} \right) w.$$

§3.6. Перетворення Лапласа. Операційне числення

Перетворенням Лапласа функції дійсної змінної $f(t)$ (функції оригінал) називають функцію $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$ (функцію зображення)

$$F(p) = \int\limits_{0}^{\infty} f(t) e^{-pt} \mathrm{d}t, \qquad f(t) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} \mathrm{d}p.$$

Зв'язок між зображенням і оригіналом позначатимемо:

$$f(t) \risingdotseq F(p) \qquad \text{або} \qquad F(p) \risingdotseq f(t).$$

Основні властивості перетворення Лапласа:

1° Лінійність: $\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$.

2° Подібність: $f(\alpha t) \risingdotseq \dfrac{F(p/\alpha)}{\alpha}$.

3° Запізнення: $f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$.

4° Зсув: $e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p-p_0)$.

5° Згортка: $F(p)G(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$.

6° Диференціювання оригінала: $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$.

7° Диференціювання зображення: $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t)$.

8° Інтегрування оригінала: $\int\limits_0^t f(t)dt \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

9° Інтегрування зображення: $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(p)\mathrm{d}p$.

В прикладах 808–821 довести певні співвідношення між оригіналом і зображенням функції.

808. $x^a \risingdotseq \dfrac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$, де $a > -1$.

809. $e^{-\lambda x} \risingdotseq \dfrac{1}{p+\lambda}$.

810. $x^a e^{-\lambda x} \risingdotseq \dfrac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{(a+1)}}$

811. $\sin\omega x \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

812. $\cos\omega x \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$.

813. $e^{-\lambda x}\sin(\omega x+\alpha) \risingdotseq \dfrac{\omega\cos\alpha + (p+\lambda)\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$.

814. $e^{-\lambda x}\cos(\omega x+\alpha) \risingdotseq \dfrac{(p+\lambda)\cos\alpha - \omega\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$.

815. $\dfrac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{\pi x}} \risingdotseq \dfrac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$.

816. $\dfrac{\exp(-\frac{\alpha^2}{4x})}{\sqrt{\pi x}} \risingdotseq \dfrac{\exp(-\alpha\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$.

817. $e^{-\alpha^2 x^2} \risingdotseq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(\dfrac{p^2}{4\alpha^2})\Big[1 - \Phi\big(\frac{p}{2\alpha}\big)\Big]$, де $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

818. $\dfrac{1}{t}(e^{bt} - e^{at}) \risingdotseq \ln\dfrac{p-a}{p-b}$.

819. $\operatorname{sh}\omega x \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$.

820. $\operatorname{ch}\omega x \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$.

821. $f(0)g(x) + \int\limits_0^x f'(y)g(x-y)\mathrm{d}y \risingdotseq pF(p)G(p)$.

В прикладах 822–828 методом перетворення Лапласа розв'язати задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

822. $y^{(IV)} + 2y^{(II)} + y = \sin x$, де $y(0) = y^{(I)}(0) = y^{(II)}(0) = y^{(III)}(0) = 0$.

823. $y^{(III)} + y = 1$, де $y(0) = y^{(I)}(0) = y^{(II)}(0) = 0$.

824. $y^{(III)} + 3y^{(II)} + 3y^{(I)} + y = 1$, де $y(0) = y^{(I)}(0) = y^{(II)}(0) = 0$.

825. $y^{(II)} + a^2 y = b\cos ax$, де $y(0) = y_0$, $y^{(I)}(0) = y_1$.

826. $y^{(II)} + 10y^{(I)} + 74y = 28\sin 4t$, де $y(0) = 0$, $y^{(I)}(0) = 2$.

827. $\begin{cases}(2x^{(II)} - x^{(I)} + 9x) - (y^{(II)} + y^{(I)} + 3y) = 0,\\ (2x^{(II)} + x^{(I)} + 7x) - (y^{(II)} - y^{(I)} + 5y) = 0,\end{cases}$ де $x(0) = x^{(I)}(0) = 1$, $y(0) = y^{(I)}(0) = 0$.

828. $\begin{cases}x^{(II)} - x + y + z = 0,\\ x + y^{(II)} - y + z = 0,\\ x + y + z^{(II)} - z = 0,\end{cases}$ де $x(0) = 1$, $x^{(I)}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y^{(I)}(0) = 0$, $z(0) = 0$, $z^{(I)}(0) = 0$.

В прикладах 829–833 методом перетворення Лапласа розв'язати задачі Коші для різницевих рівнянь рівнянь.

829. $y(t+2) = y(t+1) + y(t)$, де $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. г

830. $f(t+4) + 2f(t+3) + 3f(t+2) + 2f(t+1) + f(t) = 0$, де $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 0$

831. $f(t+3) - 3f(t+2) + 3f(t+1) - f(t) = 0$, де $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$

832. $f(t+4) - \frac{5}{2}f(t+3) + \frac{5}{2}f(t+1) - f(t) = 1$, де $f(0) = 0$, $f(1) = 11$, $f(2) = -8$, $f(3) = 6$.

833. $f(t+2) + f(t+1) + f(t) = 0$, де $f(0) = 1$, $f(1) = -1$

В прикладах 834–836 методом перетворення Лапласа розв'язати інтегральне рівняння.

834. $f(t) + \lambda\int\limits_0^t f(s)e^{\alpha(t-s)}\mathrm{d}s = g(t)$.

835. $f(t) + \lambda\int\limits_0^t f(s)\sin\omega(t-s)\mathrm{d}s = g(t)$.

836. $f(t) + \lambda\int\limits_0^t f(s)\cos\omega(t-s)\mathrm{d}s = g(t)$.

В прикладах 837–837 методом перетворення Лапласа розв'язати інтегро–диференціальні рівняння.

837. $2y^{(I)}(t) + 3y(t) + \lambda\int\limits_0^t y(s)e^{\alpha(t-s)}\mathrm{d}s = a + bt$.

В прикладах 838–839 методом перетворення Лапласа розв'язати задачу для рівняння з частинними похідними

838. $\left\|\begin{array}{ll} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0,\\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = -v_0,\\ u(0,t) = 0, & u_x(l,t) = 0.\end{array}\right.$

839. $\left\| \begin{array}{lll} v_{xx} - \frac{1}{\varkappa} v_t = 0, & a < x < b, & t > 0, \\ v(x,0) = v_0(x), & v(x,a) = v_1(t), & v(b,t) = v_2(t). \end{array} \right.$

В прикладах 840–842 методом перетворення Лапласа розв'язати наступні рівняння.

840. $y^{(I)}(t) + 2y(t) + y(t+1) + 3\int\limits_0^t y(s)e^{2(t-s)}\mathrm{d}s = 1 + t.$

841. $2y^{(I)}(t) + y(t+1) + 3\int\limits_0^t y(s)\sin(t-s)\mathrm{d}s = 4t.$

842. $y(t) + 3y(t+1) + 5\int\limits_0^t y(s)e^{(t-s)}\mathrm{d}s = 4 + t^2.$

Рекомендована література

[1] *Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — Москва: Наука, 1970. — 320 с.

[2] *Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О.* Сборник задач по высшей математике. Т.III. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. — 268 с.

[3] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — 5-е изд. — Москва: Наука, 1987. — 688 с.

[4] *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — 14-е изд. — Москва: Высшая школа, 1999. — 432 с.

[5] Сборник задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов, К. А. Бежанов, Ю. В. Сидоров и др. — Москва: Наука, 1972. — 416 с.

[6] *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. — Москва: Наука, 1979. — 320 с.

[7] *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — 3-е изд. — Москва: Наука, 1985. — Т. Ч.1. Функции одного переменного. — 336 с.

[8] *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — 3-е изд. — Москва: Наука, 1985. — Т. Ч.2. Функции нескольких переменных. — 464 с.

[9] *Шабунин М. И., Сидоров Ю. В.* Теория функций комплексного переменного. — 1-е изд. — Москва: Юнимедиастайл, 2002. — 248 с.

Абетковий покажчик

Навчальне видання

Білоколос Євген Дмитрович
Шека Денис Дмитрович

Збірник задач з комплексного аналізу

Навчальний посібник для студентів природничих факультетів

Оригінал-макет виготовлено авторами за допомогою видавничого пакету LaTeX2e з використанням шрифтів PSCyr