

# Список формул з курсу «Електродинаміка вакуума», які студент має знати напам'ять

## I Спеціальна теорія відносності

### 1) Релятивістська кінематика

a. Спеціальне перетворення Лоренца для координат і часу:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

b. Сповільнення часу:  $\tau_2 - \tau_1 = \int_1^2 dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}$  ( $\tau$  — власний час).

c. Лоренцеве скорочення:  $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  ( $l_0$  — власна довжина).

d. Релятивістське додавання швидкостей:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x \cdot V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{v_x \cdot V}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{v_x \cdot V}{c^2}}.$$

### 2) Геометрія 4-простору

a. Закон перетворення контраваріантних компонент 4-вектора:  $A'^i = \Lambda^i_k A^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k$ .

b. Закон перетворення коваріантних компонент 4-вектора:  $B'_i = (\Lambda^{-1})^k_i B_k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} B_k$ .

c. Перетворення 4-вектора при спеціальному перетворенні Лоренца:

$$A'^1 = \gamma (A^1 - \beta A^4), \quad A'^2 = A^2, \quad A'^3 = A^3, \quad A'^4 = \gamma (A^4 - \beta A^1).$$

d. Диференціальні операції:

коваріантний оператор 4-градієнта:  $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \left( \nabla \phi, \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$

контраваріантний оператор 4-градієнта:  $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \left( \nabla \phi, -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$

4-дивергенція:  $\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A^4}{\partial t}$

4-ротор:  $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$

Оператор д'Аламбера:  $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square$

### 3) Релятивістська механіка

a. 4-швидкість, 4-прискорення, 4-імпульс:  $u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = (\gamma \mathbf{v}, \gamma c)$ ;  $w^i = \frac{du^i}{d\tau}$ ,  $p^i = \left( \mathbf{p}, \frac{\mathcal{E}}{c} \right)$ .

b. Функція Лагранжа:  $\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(r)$

c. Функція Гамільтона:  $\mathcal{H} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + U(r)$ ,

## II Рівняння електромагнітного поля

### 1) Заряд в електромагнітному полі

a. Узагальнений імпульс:  $\mathcal{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$ .

b. Релятивістська функція Лагранжа зарядженої частинки в електромагнітному полі:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi.$$

c. Нерелятивістська функція Лагранжа зарядженої частинки в електромагнітному полі:

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi.$$

d. Релятивістська функція Гамільтона зарядженої частинки в електромагнітному полі:

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left( \mathcal{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\phi.$$

e. Нерелятивістська функція Гамільтона зарядженої частинки в електромагнітному полі:

$$\mathcal{H} = \frac{\left( \mathcal{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}{2m} + e\phi.$$

f. Сила Лоренца:  $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ .

g. Зв'язок між напруженостями полів і потенціалами:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi, \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}.$$

h. Калібрувальне (градієнтне) для векторного та скалярного потенціалів:

$$A_k \Rightarrow A_k + \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \quad \text{або} \quad \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} + \text{grad} \psi, \quad \phi \Rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

i. Типи калібровок:

гамільтонова калібровка	$\phi = 0,$
кулонова калібровка	$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$
лоренцева калібровка	$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \left( \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \right),$
аксіальна калібровка	$\mathbf{A}_z = 0.$

j. 4-тензор електромагнітного поля:  $F^{ki} = A^{i,k} - A^{k,i}$ :

$$\|F\|^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}, \quad \|F\|_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x \\ -B_z & 0 & B_x & E_y \\ B_y & -B_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}.$$

k. Коваріантне рівняння руха заряду в електромагнітному полі:

$$m \frac{du_k}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{ki} u^i, \quad \text{або} \quad m \frac{du^k}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{ki} u_i,$$

l. Формули для перетворень полів:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \left( \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}] \right), \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma \left( \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}] \right). \end{aligned}$$

m. Інваріантами електромагнітного поля:

$$F^{ik} F_{ik} = \operatorname{inv}, \quad F^{ik} F^{lm} \epsilon_{iklm} = \operatorname{inv} \quad \text{або} \quad E^2 - B^2 = \operatorname{inv}, \quad (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = \operatorname{inv}.$$

2) Рівняння електромагнітного поля

a. 4-вектор струма :  $j^k = (\mathbf{j}, \rho c) = \rho \frac{dx^k}{dt}$

b. Рівняння неперервності (закон збереження заряду):

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{de}{dt} = - \oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \cdot dS.$$

c. Вираз для повної дії зарядів і поля:

$$S = - \sum_a m_a c^2 \int d\tau + \frac{1}{c^2} \int \left( A_k j^k - \frac{c}{16\pi} F_{ik} F^{ik} \right) d^4x.$$

d. Різні форми рівнянь Максвелла:

Закон електромагнітного поля	Коваріантна форма	Диференціальна форма	Інтегральна форма
Закон відсутності магнітного заряду	$\epsilon^{kiml} F_{ml,i} = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
Закон електромагнітої індукції Фарадея		$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Закон Кулона	$F^{ki}{}_{,i} = \frac{4\pi}{c} j^k$	$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho$	$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$
Закон Біо – Савара – Лапласа		$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$

e. Межові умови:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) \cdot \mathbf{n}_{12} &= 4\pi \sigma, & [\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)})] &= 0, \\ (-\mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}) \cdot \mathbf{n}_{12} &= 0, & [\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)})] &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_S. \end{aligned}$$

f. Закон збереження енергії електромагнітного поля (теорема Умова–Пойнтінга):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{S} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad \text{або} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V W \, dV = - \int_S \mathbf{S} \, ds - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dV, \quad W = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}].$$

g. Рівняння для потенціалів (рівняння д'Аламбера, або хвильові рівняння):

$$\text{4-вимірні позначення} \quad \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^i \partial x_i} = -\frac{4\pi}{c} j^k, \quad \text{або} \quad \square A^k = -\frac{4\pi}{c} j^k$$

$$\text{3-вимірні позначення} \quad \square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \square \phi = -4\pi \rho.$$

### 3) Електростатика

a. Рівняння електростатики  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ .

b. Рівняння Лапласа  $\Delta \phi = 0$

c. Рівняння Пуассона  $\Delta \phi = -4\pi \rho$

d. Загальний розв'язок рівняння Пуассона:  $\phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

e. Означення перших мультипольних моментів

	Дискретний розподіл зарядів	Неперервний розподіл зарядів
Заряд	$q = \sum_{i=1}^n q_i$	$q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dV'$
Дипольний момент	$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i$	$\mathbf{d} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'$
Квадрупольний момент	$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n q_i (3x'_{\alpha i} x'_{\beta i} - \delta_{\alpha\beta} r_i'^2)$	$D_{\alpha\beta} = \int_V \rho(\mathbf{r}') (3x'_{\alpha} x'_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} r'^2) dV'$

f. Потенціал на великих відстанях:  $\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3} + \frac{D_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}}{2r^5} + \dots$ ,

g. Електричне поле диполя:  $\mathbf{E}_{dip} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{d}}{r^3}$

h. Потенціал аксіально-симметричного квадруполя:  $\phi_{quad} = \frac{D(3 \cos^3 \theta - 1)}{4r^3}$

i. Повна енергія системи зарядів у зовнішньому електричному полі:  $\mathcal{E} = q\phi_0 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 + \dots$

### 4) Магнітостатика

a. Рівняння магнітостатики  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ .

b. Рівняння Лапласа  $\Delta \mathbf{A} = 0$

c. Рівняння Пуассона  $\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$

d. Загальний розв'язок рівняння Пуассона:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

e. Магнітний дипольний момент:  $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] dV'$ .

f. Потенціал на великих відстанях:  $\mathbf{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}]}{r^3}$

g. Магнітне поле магнітного диполя:  $\mathbf{B} = -\frac{\boldsymbol{\mu} - 3\mathbf{n}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})}{r^3}$

h. Повна енергія у зовнішньому магнітному полі:  $\mathcal{E} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_0$ .

## III Електромагнітні хвилі

### 1) Плоскі електромагнітні хвилі

a. Загальний вигляд плоскої хвилі:  $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ .

b. Плоска монохроматична хвиля:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$ ,  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ .

c. Хвильовий 4-вектор  $k^i = (k_x, k_y, k_z, \omega/c)$ .

d. Ефект Доплера:  $\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$

e. Закон Хаббла:  $\frac{dR}{dt} = H \cdot R$ ,  $H \approx (50 - 100) \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}$ .

### 2) Сферичні електромагнітні хвилі

a. Загальний вигляд сферичної хвилі:  $u(x, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r}$ .

b. Сферична монохроматична хвиля:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 \cdot \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r}$ .

c. Загальний розв'язок хвильового рівняння:

$$\text{потенціали спізнення: } \phi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\text{потенціали випередження: } \phi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

3) Електромагнітне поле точкового заряду

a. Потенціали Льенара – Віхерта:  $\phi(\mathbf{r}, t) = q/s$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \beta\phi$ ,  $\beta = \mathbf{v}/c$ ,  $s = R - \beta \cdot \mathbf{R}$ .

b. Електромагнітне поле частинки, що рухається довільним чином:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{R^2} \cdot \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \beta)}{(1 - \beta \cdot \mathbf{n})^3} + \frac{q}{c^2 R} \cdot \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\mathbf{v}}]}{(1 - \beta \cdot \mathbf{n})^3}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}].$$

c. Формула Лармора:  $P = \frac{2q^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3}$ .

4) Електро–дипольне випромінювання

a. Критерій електродипольного наближення:  $a \ll \lambda \ll r$ .

b. Напруженість поля випромінювання:  $\mathbf{E}_{dip} = \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]]}{c^2 r}$ ,  $\mathbf{B}_{dip} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$

c. Кутовий розподіл потужності випромінювання:  $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3}$ .

d. Повна потужність дипольного випромінювання:  $P = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2$ .

e. Опір випромінювання:  $R_\lambda = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$ .

5) Взаємодія заряджених частинок з випромінюванням

a. Класичний радіус електрона:  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ .

b. Сила радіаційного тертя:  $\mathbf{F}^{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^2} \ddot{\mathbf{r}}$ .

c. Природна ширина спектральної лінії:  $\Delta\lambda = \frac{4\pi}{3} r_0$ .

d. Формула Томпсона:  $\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2$ .