

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

*О. О. Жмудський, Д. Д. Шека*

**Основи електродинаміки.  
Частина I**

**Навчальний посібник  
для студентів природничих факультетів**

Київ  
Редакційно-видавничий центр  
«Київський університет»  
2000

ББК 22.31  
УДК 530.1(075.8)

О. О. Жмудський, Д. Д. Шека  
Основи електродинаміки. Частина I: Навчальний посібник для студентів природничих факультетів. — К.: РВЦ «Київський університет», 2000.—214с.

Рецензенти: Обуховський В.В., докт. фіз. -мат. наук,  
Пінкевич І.П., докт. фіз.-мат. наук.

Затверджено Радою  
радіофізичного факультету  
9 вересня 1999 року

---

РВЦ «Київський університет»

ББК 22.31

©О. О. Жмудський, Д. Д. Шека, 2000

# Зміст

Передмова	7
Деякі позначення	8
<b>Глава 1. Попередні відомості</b>	<b>10</b>
§ 1.1. Математична довідка . . . . .	10
§ 1.2. Основні закони електростатики . . . . .	13
§ 1.2.1. Електричний заряд. Закон збереження заряду . . . . .	13
§ 1.2.2. Закон Кулона . . . . .	17
§ 1.2.3. Скалярний потенціал. Рівняння Лапласа і Пуассона . . . . .	20
§ 1.3. Основні закони магнітостатики . . . . .	21
§ 1.3.1. Магнітний момент і закон Біо — Савара — Лапласа . . . . .	21
§ 1.3.2. Векторний потенціал . . . . .	26
§ 1.3.3. Закон електромагнітної індукції Фарадея . . . . .	27
<b>Глава 2. Рівняння Максвелла</b>	<b>29</b>
§ 2.1. Рівняння Максвелла — Лоренца . . . . .	29
§ 2.2. Скалярний та векторний потенціали . . . . .	32
§ 2.3. Рівняння д'Аламбера . . . . .	33
§ 2.4. Функції Лагранжа і Гамільтона частинки в електромагнітному полі . . . . .	35
§ 2.5. Рівняння Максвелла для суцільного середовища . . . . .	39
§ 2.6. Рівняння Максвелла в інтегральній формі . . . . .	44
§ 2.7. Межові умови . . . . .	47
§ 2.8. Закон збереження енергії електромагнітного поля . . . . .	51
<b>Глава 3. Методи розв'язування статичних задач</b>	<b>54</b>
§ 3.1. Формулювання задачі в статичному випадку . . . . .	54
§ 3.2. Загальний розв'язок рівнянь Лапласа і Пуассона . . . . .	56

§ 3.2.1.	Поле зарядженого обмеженого стрижня в довільній точці . . . . .	56
§ 3.2.2.	Поле зарядженого кільця в довільній точці . . . . .	57
§ 3.2.3.	Поле кільцевого струму в довільній точці . . . . .	59
§ 3.3.	Розв'язування рівнянь Лапласа і Пуассона методом відокремлення змінних . . . . .	62
§ 3.3.1.	Поле металевого диска . . . . .	62
§ 3.3.2.	Задача про клин . . . . .	67
§ 3.4.	Метод електростатичних зображень . . . . .	74
§ 3.5.	Метод конформних відображень . . . . .	76
§ 3.5.1.	Комплексний потенціал плоского електростатичного поля . . . . .	76
§ 3.5.2.	Електричне поле прямого кута . . . . .	83
§ 3.5.3.	Електричне поле на краю плоского конденсатора . . . . .	86
§ 3.6.	Поле електростатичної системи на далеких відстанях . . . . .	90
§ 3.7.	Поле магнітостатичної системи на далеких відстанях . . . . .	94
<b>Глава 4.</b>	<b>Магнетизм</b>	<b>99</b>
§ 4.1.	Гіромагнітне відношення . . . . .	99
§ 4.2.	Рівняння руху магнітного моменту . . . . .	101
§ 4.2.1.	Ларморова прецесія . . . . .	106
§ 4.2.2.	Енергія обмінної взаємодії . . . . .	108
§ 4.2.3.	Енергія диполь-дипольної взаємодії . . . . .	110
§ 4.3.	Спінові хвилі . . . . .	112
§ 4.4.	Доменна стінка . . . . .	114
<b>Глава 5.</b>	<b>СТВ та релятивістська електродинаміка</b>	<b>116</b>
§ 5.1.	Принцип відносності . . . . .	116
§ 5.1.1.	Принцип відносності Галілея . . . . .	116
§ 5.1.2.	Рівняння Максвелла та гіпотеза ефіру . . . . .	118
§ 5.1.3.	Принцип відносності Ейнштейна . . . . .	120
§ 5.2.	Кінематика СТВ . . . . .	121
§ 5.2.1.	Перетворення Лоренца . . . . .	121
§ 5.2.2.	Як треба розуміти одночасність. Відносність одночасності . . . . .	125

§ 5.2.3.	Власний час . . . . .	128
§ 5.2.4.	Як треба правильно вимірювати довжини матеріальних тіл . . . . .	130
§ 5.2.5.	Закон додавання швидкостей . . . . .	132
§ 5.3.	Механіка СТВ . . . . .	133
§ 5.3.1.	Геометрія 4–простору . . . . .	133
§ 5.3.2.	Диференціальні операції . . . . .	139
§ 5.3.3.	4–швидкість . . . . .	141
§ 5.3.4.	4–прискорення . . . . .	142
§ 5.3.5.	Функції Лагранжа та Гамільтона в СТВ . . . . .	144
§ 5.3.6.	Коваріантне рівняння руху . . . . .	147
§ 5.3.7.	4–хвильовий вектор та ефект Доплера . . . . .	148
§ 5.3.8.	Червоний зсув . . . . .	152
§ 5.4.	Електродинаміка СТВ . . . . .	156
§ 5.4.1.	Рівняння для потенціалів у коваріантній формі . . . . .	156
§ 5.4.2.	Тензор електромагнітного поля . . . . .	158
§ 5.4.3.	Коваріантний вигляд рівнянь Максвелла . . . . .	160
§ 5.4.4.	Перетворення Лоренца для поля . . . . .	162

## **Глава 6. Випромінювання електромагнітних хвиль 167**

§ 6.1.	Електромагнітні хвилі . . . . .	168
§ 6.1.1.	Модель плоскої хвилі . . . . .	168
§ 6.1.2.	Сферичні хвилі . . . . .	171
§ 6.2.	Потенціали спізнення . . . . .	172
§ 6.3.	Випромінювання точкового заряду . . . . .	174
§ 6.3.1.	Потенціали Льенара — Віхерта . . . . .	175
§ 6.3.2.	Поле точкового заряду . . . . .	178
§ 6.4.	Випромінювання нерелятивістських частинок . . . . .	182
§ 6.4.1.	Потенціали Герца . . . . .	182
§ 6.4.2.	Електромагнітне поле на великих відстанях . . . . .	184
§ 6.4.3.	Дипольне випромінювання . . . . .	187
§ 6.5.	Випромінювання Вавилова — Черенкова . . . . .	190
§ 6.5.1.	Передісторія відкриття . . . . .	190
§ 6.5.2.	Утворення поверхні хвильового фронту . . . . .	191
§ 6.5.3.	Потенціали поля випромінювання . . . . .	193
§ 6.5.4.	Спектральний склад випромінювання . . . . .	198
§ 6.6.	Випромінювання низки електричних диполів . . . . .	201

§ 6.6.1. Випромінювання дипольної площини . 204

**Література** **210**

**Показчик** **211**

# Передмова

Ця книга є першою частиною курсу електродинаміки як складової частини курсу теоретичної фізики для студентів-фізиків і радіофізиків. У його основу покладено курс лекцій, який автори читали на радіофізичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Вважається, що читач знайомий з фізичними основами електрики та магнетизму в межах курсу загальної фізики (див., наприклад, [17, 19]). Відповідна інформація наведена у вступі. Вважається також, що читач володіє необхідним математичним апаратом у межах наведеної у вступі математичної довідки.

У книзі використано гауссову систему одиниць. Зауважимо, якщо для механіки або статистичної фізики вибір системи одиниць може бути довільним, то для електродинаміки система СІ, скажімо, незручна. Розв'язок електродинамічних задач звичайно виконують у гауссовій системі одиниць. Докладне висвітлення цього питання можна знайти в [16, «Вступление»], або [17, § 85].

# Деякі позначення

- $\mathbf{A}$  — векторний потенціал, 26  
 $A^i = (\mathbf{A}, A^4)$  — 4-вектор, 135  
 $A^i = (\mathbf{A}, \phi)$  — 4-вектор потенціал, 157
- $\mathbf{B}$  — вектор магнітної індукції, 23
- $\mathbf{D}$  — вектор електричної індукції, 40  
 $\mathbf{d}$  — дипольний момент, 92  
 $D_{\alpha\beta}$  — квадрупольний момент, 92
- $\mathbf{E}$  — напруженість електричного поля, 17  
 $e, q$  — електричний заряд, 13  
 $\mathcal{E}$  — енергія, 36  
 $\mathbf{E}$  — електрорушійна сила, 28  
 $\mathcal{E}_\omega$  — спектральна густина енергії випромінювання, 187  
 $\varepsilon$  — діелектрична проникність, 40
- $\mathbf{F}$  — сила, 18  
 $\Phi$  — магнітний потік, 28  
 $F^{ik}$  — тензор електромагнітного поля, 159
- $\mathbf{G}$  — гіровектор, 35  
 $\gamma$  — гіромагнітне відношення, 97
- $g^{ik}$  — метричний тензор, 139
- $\mathbf{H}$  — напруженість магнітного поля, 40  
 $\mathcal{H}$  — функція гамільтона, 37  
 $I$  — інтенсивність випромінювання, 186  
 $j$  — густина струму, 14  
 $j_{\text{bound}}$  — густина зв'язаних струмів, 44  
 $j^i = (\mathbf{j}, \rho c)$  — 4-вектор струму, 156  
 $j_S$  — поверхнева густина струмів, 51
- $K^i = mw^i$  — 4-сила, 147  
 $k^i = (\mathbf{k}, \omega/c)$  — 4-хвильовий вектор, 149
- $\mathbf{L}$  — механічний момент, 97  
 $l_0$  — «магнітна довжина», 115  
 $\mathcal{L}$  — функція Лагранжа, 35
- $\mathbf{M}$  — намагніченість, 43  
 $\mu$  — магнітна проникність, 40  
 $\boldsymbol{\mu}$  — магнітний дипольний момент, 96  
 $\mu_B$  — магнетон Бора, 98  
 $\mu_{\text{нук}}$  — ядерний магнетон, 98
- $\mathbf{P}$  — поляризація, 43  
 $\mathcal{P}$  — узагальнений імпульс, 36



$\mathbf{\Pi}_e$  — електричний вектор  
Герца, 182

$p^i = mu^i$  — 4-імпульс, 144

$\mathbf{\Pi}_m$  — магнітний вектор Гер-  
ца, 183

$\Psi, \Phi$  — комплексний потен-  
ціал, 78

$\rho$  — густина заряду, 14

$\rho_{\text{bound}}$  — густина зв'язаних  
зарядів, 44

$\mathbf{S}$  — вектор Умова — Пойн-  
тінга, 52

$\sigma$  — поверхнева густина за-  
рядів, 48

$\tau$  — власний час, 128

$U(\mathbf{r})$  — потенціальна енер-  
гія, 35

$u^i = dx^i/d\tau$  — 4-швидкість,  
141

$W$  — густина енергії, 52

$w^i = du^i/d\tau$  — 4-прискорення,  
142

$x^i = (\mathbf{r}, ct)$  — 4-радіус-вектор,  
135

# Глава 1

## Попередні відомості

### §1.1. Математична довідка

Перелічимо деякі важливі формули з курсу математичного аналізу та векторного аналізу, на які посилаємося в тексті книги:

1. Теорема Остроградського — Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.1)$$

2. Теорема Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}. \quad (1.2)$$

3. Теорема Гріна:

$$\int_S \psi \operatorname{grad} \phi \, d\mathbf{S} = \int_V (\psi \Delta \phi + \operatorname{grad} \psi \operatorname{grad} \phi) \, dV, \quad (1.3a)$$

$$\begin{aligned} \int_S (\psi \operatorname{grad} \phi - \phi \operatorname{grad} \psi) \, d\mathbf{S} = \\ = \int_V (\psi \Delta \phi - \phi \Delta \psi) \, dV, \end{aligned} \quad (1.3b)$$

$$\int_S \operatorname{grad} U \, d\mathbf{S} = \int_V \Delta U \, dV. \quad (1.3c)$$

4. Деякі формули диференціального аналізу для основних фізичних систем координат.

У декартовій системі координат  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\Phi &= \mathbf{e}_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \\ \operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \\ \Delta\Phi &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.\end{aligned}\tag{1.4a}$$

У циліндричній системі координат  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\Phi &= \mathbf{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \\ \operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rF_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{F} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rF_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \\ \Delta\Phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.\end{aligned}\tag{1.4b}$$

У сферичній системі координат

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta :$$

$$\begin{aligned}
\text{grad}\Phi &= \mathbf{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \\
\text{div}\mathbf{F} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}, \\
\text{rot}\mathbf{F} &= \frac{1}{r \sin\theta} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} (F_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi} \right) \mathbf{e}_r + \\
&\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial (r F_\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \\
&\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta} \right) \mathbf{e}_\varphi, \\
\Delta\Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}.
\end{aligned} \tag{1.4c}$$

5.

$$\begin{aligned}
\text{div grad} &= \Delta, \quad \text{rot}[\text{rot}\mathbf{A}] = \text{grad}(\text{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}, \\
\text{div}[\text{rot}\mathbf{A}] &= 0, \quad \text{rot}(\text{grad}\mathbf{A}) = 0, \\
\text{div}(\phi\mathbf{A}) &= \phi \text{div}\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad}\phi, \\
\text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] &= \mathbf{B} \cdot \text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot}\mathbf{B}, \\
\text{rot}(\phi\mathbf{A}) &= \phi \text{rot}\mathbf{A} - [\mathbf{A} \times \text{grad}\phi].
\end{aligned} \tag{1.5}$$

6.

$$\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \text{rot} \frac{\mathbf{a}}{r} = \frac{[\mathbf{a} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \tag{1.6}$$

7. Лаплас поля точкового заряду:

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}). \tag{1.7}$$

## §1.2. Основні закони електростатики

### §1.2.1. Електричний заряд. Закон збереження заряду

Відносно *заряду* зробимо декілька зауважень: заряд і електричне поле — це два фізичні об'єкти, що нерозривно пов'язані один з одним. Заряд є джерелом поля, а поле, у свою чергу, має особливості (полюси) у вигляді зарядів<sup>1</sup>. За сучасними уявленнями розміри протонів та нейтронів  $\sim 10^{-13}$  см, [15, т. 1, с. 259]. Розміри електрона принаймні в  $10^3$  разів менші (експериментальні дані), тому є серйозне питання, пов'язане з масою спокою електрона.

1. Заряд існує у двох формах — позитивній та негативній.
2. Заряд квантується, тобто може набувати лише дискретного набору значень (будь-який заряд є кратний заряду електрона).
3. Відмінність у зарядах протона та електрона становить<sup>2</sup>

$$\frac{|e^+|}{|e^-|} = 1.0 \pm 10^{-21}.$$

4. Заряд зберігається.

Наведемо лише формулювання *закону збереження*: у замкненій системі повний електричний заряд не змінюється. Більш точно: повний електричний заряд ізоляованої системи є релятивістськи інваріантне число. Відмітимо, що якби абсолютні величини зарядів електрона та протона не збігалися з такою фантастичною точністю, то закон збереження заряду не мав би місця.

Запишемо дифференціальне рівняння, що відповідає закону збереження заряду. Відповідно до формулювання самого

<sup>1</sup>Свого часу саме ця спорідненість навела на думку про те, що якщо рівняння руху полів інваріантні відносно перетворень Лоренца, то відносно тієї самої групи повинні бути інваріантні й рівняння руху частинок.

<sup>2</sup>Експерименти Гейлера, 1982 р.

закону зміна заряду всередині деякого замкненого об'єму  $V$  може відбуватись лише за рахунок потоку заряду через поверхню  $S$ , що оточує об'єм  $V$ . Елемент потоку заряду через поверхню  $dS$ , очевидно, є  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$ . Потік через усю поверхню дорівнює

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \cdot dS.$$

А зміна заряду в об'ємі  $V$  становить  $-dq/dt$ . Можемо скласти очевидну рівність:

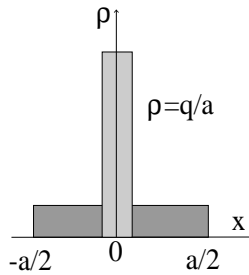
$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \cdot dS.$$

При нерухомій межі  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$ . Отже,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \operatorname{div} \mathbf{j} dV = 0.$$

Остаточно маємо так зване *рівняння неперервності*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.8)$$



Для стаціонарних задач  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , тому  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ . Цією рівністю ми скоро скористаємось.

У теоретичній фізиці електрон описують як частинку, що не має розмірів. Природним наслідком такого зображення є нескінченна густина заряду в точці, де знаходиться електрон.

Розглянемо це питання більш детально. Нехай спочатку густина заряду скінченна і також скінченні його розміри (одновимірний випадок). Величина заряду —  $q$ . Почнемо «стягувати» заряд у точку, але так, щоб повний заряд не змінювався, тобто «площа» прямокутника має постійну величину

$q$  (див. рис. 1.1). Границя послідовності, до якої буде прямувати  $\rho$ , і є  $\delta$ -функція. Будувати граничну функцію можемо не лише у вигляді прямокутників — для цього існує багато можливостей. Проте вказаний спосіб не дуже строгий. Більш точне означення наведемо пізніше. А зараз давайте наочно пересвідчимося до яких непорозумінь може призводити точковість заряду. Для цього перевіримо теорему Гаусса для точкового заряду  $q$ . Згідно з теоремою

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 4\pi q. \quad (1.9)$$

Права частина цього рівняння записується досить просто, тому що під сферичною поверхнею, яка оточує початок координат, знаходиться лише заряд  $q$ . А тепер запишемо поле точкового заряду ( $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$ ) і візьмо від цього виразу дивергенцію:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= q \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2qx^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Оскільки координати  $x$ ,  $y$  та  $z$  рівноправні, то очевидно

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2qy^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2qz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Складаючи рівності для всіх трьох компонент, отримаємо нуль. Причина полягає в тому, що доданки, які скоротили, мають скінченне значення скрізь, крім точки, де зосереджений заряд (у початку координат). Тому таке скорочення потрібно виконувати більш обережно. А саме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = -\Delta \phi = 4\pi q \delta(\mathbf{r}), \quad (1.10)$$

де використано позначення  $\delta$ -функцію. Skorистаємось точним означенням  $\delta$ -функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a), \quad (1.11)$$

де  $f(x)$  — неперервна функція, яка повинна прямувати в нескінченності до нуля.

Якщо це врахувати, отримаємо при інтегруванні в (1.9) правильний результат.

Наведемо без доведення деякі корисні формули, пов'язані з  $\delta$ -функцією.

Як границя деякої послідовності  $\delta$ -функція може мати такі зображення:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 x^2 + 1)} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 x^2) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2(\alpha x)}{\alpha x^2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

$\delta$ -функція допускає розвинення в інтеграл Фур'є:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i k x} dk. \quad (1.13)$$

Для обчислень з  $\delta$ -функцією часто використовують формули

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad \delta(-x) = \delta(x), \quad x \delta(x) = 0, \quad (1.14)$$

$$f(x) \delta^{(n)}(x - a) = (-1)^n f^{(n)}(a), \quad (1.15)$$

$$\delta(\phi(x)) = \sum_{x_k: \phi(x_k)=0} \frac{\delta(x - x_k)}{|\phi'(x_k)|}. \quad (1.16)$$



Ці формули мають зміст тільки в інтегральних співвідношеннях. Наприклад, формула (1.15) для  $n = 1$  означає, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)dx = -f'(a). \quad (1.17)$$

### §1.2.2. Закон Кулона

Наша мета полягає в тому, щоб знайти не лише інтегральні вирази для законів електростатики, але і їх диференціальні форми. З курсу математики добре відомо, що для повного визначення деякого векторного поля (зокрема електростатичного), необхідно задати значення ротору і дивергенції цього поля. Тобто рівняння, які ми шукаємо, повинні мати вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= ? \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= ? \end{aligned}$$

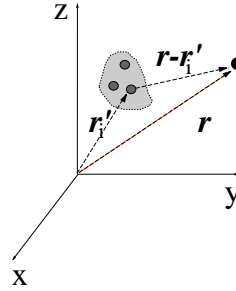


Рис. 1.2.

Нагадаємо, що напруженістю електричного поля називається сила, яка діє на одиничний позитивний (точковий) заряд у вакуумі:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_2} = \frac{q_1 \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.18)$$

Тоді  $\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}$ . Для подальшого важливо відмітити, що згідно з (1.6)

$$\mathbf{E} = q \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -q \operatorname{grad} \frac{1}{r}.$$

Оскільки нам потрібні диференціальні форми законів електростатичного поля, то байдуже, яким чином їх отримаємо. Найкоротший шлях полягає в тому, щоб записати відповідь (розв'язок рівнянь) і з них отримати необхідні рівняння. Можливо, шлях дещо незвичний, проте швидкий. Крім того, на

відміну від математики, фізичні рівняння не «виводяться» — критерієм правильності останніх є лише експеримент. Такий саме шлях оберемо також і при одержанні магнітостатичних рівнянь. Ми будемо спиратись на два експериментальні закони, визначені для електростатичних полів.

- **Закон Кулона: сила взаємодії двох зарядів прямо пропорційна їх добутку, обернено пропорційна квадрату відстані між ними та направлена по лінії, що їх з'єднує.** (Сформульовано для точкових зарядів)<sup>1</sup>:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.19)$$

де  $\mathbf{r}$  — радіус вектор, що з'єднує заряди,  $q_1$  і  $q_2$  — величини зарядів.

- **Принцип суперпозиції електростатичних полів**, який стверджує, що **при знаходженні поля, утвореного багатьма зарядами, загальне поле дорівнює векторній сумі полів окремих частинок:**

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i, \quad (1.20)$$

де  $\mathbf{E}_i$  — напруженість поля створювана  $i$ -тою частинкою.

Цих двох тверджень нам буде достатньо, щоб показати, який вигляд мають шукані рівняння.

<sup>1</sup>Закон Кулона перевірено до відстаней  $10^{-13}$  см. Для відстаней  $10^{-14}$  см і менше експериментальні дані розходяться з формулою (1.19). Але немає єдиної думки про причини розходження. Можливо дійсно порушується закон обернених квадратів, а може для таких відстаней починає проявляти себе не точковість заряду. Ще одне зауваження стосується показника степеня в знаменнику. Це питання цікавило ще Кавендиша. Він виконав досліди і визначив: якщо відмінності  $\epsilon$ , то вони не перевищують двох сотих  $n = 2 \pm 0.02$ . Максвелл провів більш точні досліди і визначив, що  $n = 2 \pm 0.00005$ . Уже в нашому сторіччі були виконані дуже точні експерименти Плімптоном та Лафонттом, які визначили, що  $n = 2 \pm 0.000000001$  ( $10^{-9}$ )(1936).

Почнемо з випадку, коли заряди в просторі мають точковий розподіл (див. рис. 1.2). Оскільки має місце принцип суперпозиції, то для сукупності точкових зарядів маємо:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3}.$$

У тому разі, коли заряди у просторі розподілені неперервно, скористаємося такими простими міркуваннями. Можемо розбити нашу систему неперервних зарядів на елементарні об'єми  $dV'$  (див. рис. 1.3). Заряд кожного з них дорівнює  $\rho(\mathbf{r}')dV'$ . Тоді внесок у загальне поле кожного із зарядів обчислюється згідно з (1.18) і сума перетворюється, очевидно, на інтеграл:

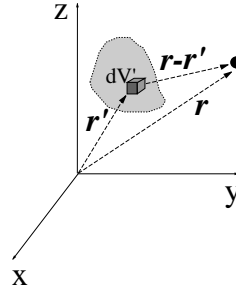


Рис. 1.3.

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= dq \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}; \quad dq = \rho dV', \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

де  $\mathbf{r}$  — радіус-вектор, проведений з початку координат у точку спостереження (там, де знаходиться вимірювальний прилад), а  $\mathbf{r}'$  — радіус-вектор, проведений з початку координат до елемента заряду  $\rho(\mathbf{r}')dV'$ . З цієї формули відразу можемо написати одне з шуканих рівнянь. Спираючись на формулу (1.6) можемо подати (1.21) у вигляді:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.22)$$

Оскільки ротор від градієнта довільної (скалярної) функції тотожно перетворюється на нуль, то маємо  $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ . Це

і є одне з шуканих електростатичних рівнянь. Друге рівняння отримаємо, якщо візьмемо дивергенцію від обох частин (1.22). Враховуючи, що  $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$ , матимемо:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= -\Delta \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \int_V \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \\ &= 4\pi \int_V \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = 4\pi \rho(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Таким чином, повна система рівнянь електростатичного поля має вигляд:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad (1.24)$$

а вираз (1.21) є розв'язок цієї системи рівнянь.

### §1.2.3. Скалярний потенціал. Рівняння Лапласа і Пуассона

Перше рівняння (1.24) має очевидний розв'язок  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ . Порівнюючи це з (1.22) легко можемо записати явний вигляд для  $\phi$ , що має назву *скалярний потенціал*:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.25)$$

Уведений таким чином потенціал визначається з точністю до довільної постійної величини, тому що для обчислення поля необхідно виконувати диференціювання і довільна константа зникне.

Відмітимо також, що перше рівняння (1.24) є умовою потенціальності поля (довільного, а не тільки електричного). Ця умова означає, що в такому полі робота з переміщення деякого заряду з точки 1 у точку 2 не залежить від шляху, по якому воно відбувалось.

Нагадаємо знову, що розв'язком першого рівняння (1.24) є вираз  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ , оскільки ротор від довільного градієнта

тотожно дорівнює нулеві. Підставляючи цей вираз у друге рівняння системи (1.24) одержуємо

$$\Delta\phi = -4\pi\rho, \quad (1.26)$$

так зване *рівняння Пуассона*. Там, де нема зарядів, воно перетворюється на *рівняння Лапласа*:

$$\Delta\phi = 0. \quad (1.27)$$

Звертаємо увагу, що в тому випадку, коли заряди задані, розв'язок рівняння Пуассона має вигляд (1.25). Неважко і безпосередньо переконатись, що потенціал у формі (1.25) задовольняє рівняння Пуассона:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \Delta \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= -4\pi \int_V \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

### §1.3. Основні закони магнітостатики

#### §1.3.1. Магнітний момент і закон Біо — Савара — Лапласа

Нагадаємо основні положення, що стосуються магнітних явищ. Оскільки магнітних зарядів не існує, то основним об'єктом, що використовують у дослідженнях є магнітний диполь<sup>1</sup>. Диполем може бути шматок магніту — магнітна стрілка, або петля зі струмом.

У присутності магнітного поля диполь орієнтується в певному напрямку. Цей напрям за означенням вважають за напрям вектора магнітної індукції, який позначають  $\mathbf{B}$ . Символ

<sup>1</sup>Вважається, що диполь має малі розміри та слабе магнітне поле — для того, щоб не збурювати поле, в яке він внесений.

$\mathbf{B}$  замість  $\mathbf{H}$  використовують з причин історичного характеру. Величина магнітної індукції може бути виміряна через механічний момент сили, що діє на диполь:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}],$$

де  $\mathbf{m} = J\mathbf{S}/c$  — магнітний момент. При визначенні  $\mathbf{B}$  частіше користуються силою Лоренца:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

При вивченні магнітних явищ будемо спиратись на два експериментальні закони, що були встановлені для магнітостатичних полів.

- *Закон Біо — Савара — Лапласа.* Згідно з цим законом елемент струму  $J \cdot d\mathbf{l}$  на відстані  $\mathbf{r}$  від себе створює елемент індукції  $d\mathbf{B}$ , що дорівнює:

$$d\mathbf{B} = \frac{J}{c} \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}; \quad \mathbf{B} \text{ [гаусс]}. \quad (1.29)$$

У 1819 р. Ерстед виявив, що дріт, по якому тече електричний струм, викликає відхилення постійного магнітного диполя, що знаходиться біля нього. Це означає, що струм є джерелом магнітної індукції. 1820 року Біо та Савар, пізніше (1820-1825) Ампер визначили основні експериментальні закони, що пов'язують магнітну індукцію зі струмом.

- *Принцип суперпозиції магнітостатичних полів.* Згідно з цим принципом при знаходженні поля, утвореного багатьма струмами, результуюча індукція дорівнює векторній сумі індукцій, створених окремими струмами:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i,$$

де  $\mathbf{B}_i$  — індукція, створювана  $i$ -им струмом.

Одиничний заряд  $q$  створює струм елемент струму  $I d\mathbf{l} \rightarrow q\mathbf{v}$ , тому

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c} \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]. \quad (1.30)$$

Магнітне поле прямого проводу

$$|\mathbf{B}| = \frac{2I}{cR}, \quad (1.31)$$

експериментально знайдено Біо і Саваром (це співвідношення відоме як закон Біо — Савара). Необхідно відмітити, що всі експериментальні закони магнітного поля у формі, що містить елементи струму, перевірити неможливо, оскільки неможливо видалити поле, створюване всім останнім колом. Тому, звичайно, закони магнітного поля встановлювалися у вигляді, наприклад, (1.31). Це саме стосується й інших виразів, які будуть далі у тексті.

Експерименти Ампера з'ясували величину сили, що діє на провідники зі струмом у присутності іншого струму. Математичним виразом експериментальних досліджень Ампера за дослідженням взаємодії замкнених струмів, є:

$$d\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu}{c^2} I_1 I_2 \frac{[d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12}]]}{r_{12}^3}. \quad (1.32)$$

На елемент струму в магнітному полі з індукцією  $\mathbf{B}$  діє сила величиною

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}].$$

Індукція створювана всім колом, з огляду на (1.29) обчислюється як інтеграл по ньому:

$$\mathbf{B} = \frac{I}{c} \oint \frac{[d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (1.33)$$

Два паралельні провідники зі струмом, що розташовані на відстані  $d$ , діють один на одного із силою

$$F = \frac{2I_1 I_2}{dc^2}$$

на одиницю довжини. Саме в такому вигляді й був встановлений закон Ампера. Цей вираз використовують для визначення одиниці сили струму в системі СІ. Його можна також використовувати для визначення індукції, не вживаючи поняття магнітного диполя.

Рівняння (1.33) для неперервного розподілу струмів можемо подати у вигляді (враховуємо при цьому, що  $I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{j} dV$ , а початок відліку виберемо в початку лабораторної системи координат):

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \oint \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{1}{c} \text{rot} \oint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (1.34)$$

У цій формулі використано (1.6). З формули одразу видно, що

$$\text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.35)$$

Це є одне з шуканих рівнянь — воно вказує на відсутність магнітних зарядів. Аналогічним для нього рівнянням з електростатики є  $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ . Щоб визначити поле повністю знов потрібні ротор та дивергенція. Нам бракує рівняння для  $\text{rot} \mathbf{B}$ . Візьмемо ротор від (1.34). Оскільки

$$\text{rot rot} \mathbf{A} = \text{grad} (\text{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A},$$

то

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \text{rot rot} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \\ &= \frac{1}{c} \text{grad} \int_V \text{div} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.36)$$

У (1.36) перший доданок не враховано, оскільки двома рядками нижче буде показано, що той інтеграл дорівнює нулеві.



Для цього скористаємось формулою (1.5). Тоді перший доданок можемо трансформувати наступним чином:

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \mathbf{j}(\mathbf{r}') \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.37)$$

У (1.37) перший доданок дорівнює нулеві через те, що диференціювання йде за координатами точок спостереження, а  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  залежить від координат точок, де знаходяться струми.

Тоді, враховуючи (1.37), перший інтеграл у (1.36) перепишемо в такому вигляді:

$$\frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (1.38)$$

де символом  $\operatorname{grad}'$  позначено операцію взяття градієнта за штрихованими змінними (за координатами точок, де знаходяться струми). Оскільки

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

залежить лише від квадратів різниць одноіменних аргументів, то

$$\frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = -\frac{\partial}{\partial x'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

До одержаного вигляду знов застосуємо формулу (1.5), але вже «в іншому напрямку». Штрихами біля диференціальних операцій позначаємо диференціювання за координатами точок, де знаходяться струми:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \\ & = \frac{1}{c} \int_V \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{c} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{div}' (\mathbf{j}(\mathbf{r}')) dV'. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Другий з тих інтегралів дорівнює нулеві, оскільки, як випливає з (1.8), для стаціонарних задач  $\operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ . У першому інтегралі від інтегрування по об'єму перейдемо до інтегрування по поверхні, теорема Остроградського — Гаусса (1.1):

$$\frac{1}{c} \int_V \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{c} \oint_S \frac{j_n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (1.40)$$

Ми вибираємо об'єм  $V$  таким чином, щоб поза ним струми були відсутні, тому  $j_n(\mathbf{r}') = 0$ . Отже, маємо остаточно:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1.41)$$

повна система рівнянь магнітостатики та її розв'язок:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (1.42)$$

### §1.3.2. Векторний потенціал

З першого рівняння (1.41) випливає, що  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , де  $\mathbf{A}$  — деяке векторне поле, яке при заданій залежності густини струмів від координат обчислюється згідно з (1.34):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (1.43)$$

Величина  $\mathbf{A}$  має назву *векторний потенціал*. Оскільки в рівняннях магнітостатики безпосередньо векторний потенціал не використовується, а лише магнітна індукція, тобто його ротор, тому маємо право визначати  $\mathbf{A}$  з точністю до градієнта деякої довільної функції, яка пропадає при обчисленні ротора. Тобто можна перетворювати векторний потенціал за правилом (при такій заміні значення полів не змінюються):

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi. \quad (1.44)$$

Таке перетворення називається *калібрувальним*, оскільки з першого рівняння отримали  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ , то підставивши цей вираз у друге рівняння (1.41) матимемо:

$$\text{rot rot} \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \text{grad} (\text{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}.$$

Вибір  $\mathbf{A}$  деякою мірою є довільним — існування довільної скалярної функції  $\psi$  дозволяє накласти скалярну умову на векторний потенціал. Найбільш часто в магнітостатиці використовують так звану *кулонову калібровку*<sup>1</sup>

$$\text{div} \mathbf{A} = 0.$$

У результаті отримаємо *рівняння Пуассона* для кожної компоненти вектор-потенціалу:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (1.45)$$

Розв'язком цього рівняння є вираз (1.43). При відсутності струмів векторний потенціал задовольняє *рівняння Лапласа*

$$\Delta \mathbf{A} = 0. \quad (1.46)$$

### §1.3.3. Закон електромагнітної індукції Фарадея

У 1831 р. Фарадей провів експерименти з контурами, що вміщувались у змінне магнітне поле і визначив, що струм у контурі наводиться, якщо:

- у сусідньому контурі струм включається або виключається;
- сусідній контур із незмінним струмом рухається відносно першого;
- у контур вноситься (або виноситься) постійний магніт.

<sup>1</sup>Про інші можливі калібровки див. нижче (2.5).

Фарадей зробив висновок, що зміна магнітного потоку через контур приводить до виникнення електрорушійної сили (інтеграл від електричної напруги взятий уздовж контура). Ця електрорушійна сила і приводить до появи струму. Введемо поняття *електрорушійної сили*:

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}', \quad (1.47)$$

де  $\mathbf{E}'$  — електричне поле на елементі контура  $d\mathbf{l}'$  (записано в системі координат, де  $d\mathbf{l}'$  знаходиться в стані спокою). А також нагадаємо означення магнітного потоку:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}' \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (1.48)$$

Закон електромагнітної індукції можна записати так:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.49)$$

Знак відповідає *правилу Ленца*, згідно з яким індукований струм має такий напрям, що заважає зміні потоку через контур. Підставимо наведені означення:

$$\oint_L \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}' = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}' \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Використовуючи теорему Стокса (1.2), одержимо:

$$\oint_L \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}' = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S}.$$

Звідки

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.50)$$

Співвідношення, яке ми отримали, є диференціальна форма *закону електромагнітної індукції Фарадея*. У ньому враховано, що якщо досліджуваний контур не змінює своєї форми, то повну похідну маємо право замінити на частинну.

## Глава 2

# Рівняння Максвелла

### §2.1. Рівняння Максвелла — Лоренца

Відомо, що система диференціальних рівнянь для статичних полів, отримана Максвеллом, має такий вигляд:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.\end{aligned}$$

Ми знаємо також одне динамічне рівняння, а саме закон Фарадея в диференціальній формі:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Тобто це рівняння вірне як у динамічному випадку, так і в статичному. Відносно інших рівнянь потрібно сказати, що зовсім не обов'язково, щоб рівняння, які описують статичні задачі, справджувались також і у випадку змінних полів. У тому і полягає геніальний здобуток Максвелла, що він зміг, використовуючи здоровий глузд та фізичну інтуїцію, написати систему рівнянь, яка адекватно описує змінні в часі електромагнітні поля.

Хочемо нагадати, що в ті часи сучасних уявлень про електромагнітне поле не було. Вакум уявляли собі як деяке пружне середовище. Сам Максвелл намагався пояснити одержані ним рівняння за допомогою деякої механічної моделі. Зараз відтворити хід думок Максвелла навряд чи хто зможе. Та в цьому немає потреби.

Оскільки довести рівняння Максвелла неможливо, то лише відмітимо таке:

1. Якщо магнітних зарядів немає в статичному випадку, то їх немає і в динамічному. Тобто статичне рівняння

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

залишається без зміни.

2. Диференціальна форма закону Фарадея, очевидно, є узагальненням рівняння  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ . Тому для динамічного випадку вважатимемо, що

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

3. Диференціальна форма закону Гаусса має бути справедливою і в динаміці, оскільки в будь-якому випадку потік  $\mathbf{E}$  через замкнену поверхню пропорційний заряду, який знаходиться всередині. Тобто

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho.$$

4. Єдине рівняння, яке повинні змінювати, це

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

У такому вигляді воно суперечить закону збереження заряду, оскільки взявши дивергенцію від правої та лівої частин одержимо:

$$0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (2.1)$$

що справедливо лише для статичних задач. Помилки не буде, якщо після диференціювання отримаємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Якщо із самого початку написати закон Біо — Савара — Лапласа у вигляді

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

то ніяких суперечностей із законом збереження заряду не буде. Підкреслимо ще раз, що система рівнянь

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.2a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.2c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.2d)$$

є постулат, який довести неможливо. Очевидно, що для статичних задач ( $\partial/\partial t = 0$ ) ця система розпадається на дві незалежні системи — рівняння (1.24) для електростатичних задач і рівняння (1.41) для магнітостатичних задач. За термінологією, що склалася, система рівнянь (2.2) називається системою рівнянь Максвелла — Лоренца або системою рівнянь Максвелла для вакууму.

З моменту появи цих рівнянь (1865) було виконано безліч прямих та побічних (опосередкованих) експериментів з перевірки рівнянь Максвелла. Під побічними розуміються всі електричні, магнітні та електромагнітні пристрої, що розраховувались на основі цих рівнянь, а потім втілювались у життя, побут. Далі коротенько перелічимо лише ті галузі (не експерименти — бо їх безліч), в яких рівняння Максвелла знайшли блискуче підтвердження: оптика, фізика магнітних явищ (зокрема магнітна гідродинаміка), фізика лазерного випромінювання, теорія випромінювання та поширення електромагнітних хвиль (включаючи всі поняття радіо зв'язку, антенну техніку тощо), надпровідність, нелінійна оптика, фізика плазми та ін. Цей список можна продовжувати.

Крім того, було здійснено цілий ряд безпосередніх експериментів по перевірці рівнянь Максвелла. Усі вони підтверджують справедливість цих рівнянь. Наведемо межі, в яких справедливі рівняння Максвелла. У результаті експериментальних та теоретичних досліджень було з'ясовано, що рівняння Максвелла справедливі від космічних масштабів до відстаней  $10^{-10}$  см. Тобто навіть у цих умовах не проявляє себе квантовий характер електромагнітних сил. Для менших

відстаней — квантова електродинаміка. Цікаво, що відштовхування та притягання листків електроскопа та елементарних частинок описуються тими ж самими законами (незважаючи на колосальну різницю в масштабах).

Ми записали цю систему рівнянь у вигляді, коли густина заряду і густина струму залежать лише від часу і координат і не залежать від напруженостей полів:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(t, \mathbf{r}), & \mathbf{j} &= \mathbf{j}(t, \mathbf{r}), \\ \rho &\neq \rho(\mathbf{E}, \mathbf{B}), & \mathbf{j} &\neq \mathbf{j}(\mathbf{E}, \mathbf{B}).\end{aligned}$$

За термінологією, що склалася, такі заряди звать *вільними*. Найчастіше це буває у випадку, коли речовина, або середовище, у моделі відсутні. У цьому разі можливо точно розв'язати систему рівнянь Максвелла — Лоренца (див. нижче §6.2).

## §2.2. Скалярний та векторний потенціали

Поняття *скалярного* та *векторного* потенціалів, які вводили для статичних задач, можуть бути узагальнені й для випадку динамічних задач. Розглянемо рівняння (2.2а). Очевидно, що як і в статичному випадку, воно має розв'язок

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}. \quad (2.3a)$$

Підставимо одержаний вираз у рівняння (2.2b) та виконаємо нескладні перетворення:

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Це рівняння має розв'язок (знак перед градієнтом вибираємо таким чином, щоб силові лінії були спрямовані від додатного заряду до від'ємного):

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.3b)$$



де введено величину, яку ми будемо називати скалярним потенціалом, але для динамічних задач. Для статичного випадку це визначення переходить у потенціал (1.25). Те саме стосується і векторного потенціалу.

Нагадаємо, що векторний потенціал визначений неоднозначно — з точністю до калібрувального (градієнтного) перетворення, див. (1.44). Очевидно, невизначеність виникає і для скалярного потенціалу. Накладаючи умову незмінності напруженості електричного поля, з (1.44) та (2.3b) матимемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\Rightarrow \mathbf{A} + \text{grad}\psi, \\ \phi &\Rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Саме ця умова має назву *перетворення калібровки* для векторного та скалярного потенціалів. Вона дозволяє накласти додаткову (скалярну) умову на потенціали. Залежно від задачі, використовують наступні умови:

$$\text{гамільтонова калібровка} \quad \phi = 0, \quad (2.5a)$$

$$\text{кулонова калібровка} \quad \text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (2.5b)$$

$$\text{лоренцева калібровка} \quad \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (2.5c)$$

$$\text{аксіальна калібровка} \quad \mathbf{A}_z = 0. \quad (2.5d)$$

Для динамічних задач найбільш зручною є лоренцева калібровка (2.5c), що зберігається при релятивістських перетвореннях, див. нижче (5.86).

### §2.3. Рівняння д'Аламбера

Запишемо рівняння, які задовольняють потенціали (2.3). Підставимо (2.3) у рівняння (2.2d). Після нескладних перетворень матимемо

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left\{ \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.6)$$

Таблиця 2.1. Порівняння статичного та динамічного випадків

Формула	Статичний випадок	Динамічний випадок
Вираз для магнітної індукції через векторний потенціал	$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$	$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$
Вираз для електричного поля через скалярний потенціал	$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$	$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
Рівняння для скалярного потенціалу	$\Delta \phi = -4\pi \rho$	$\square \phi = -4\pi \rho$
Рівняння для векторного потенціалу	$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$	$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$

Накладаючи лоренцеву калібровку (2.5с), остаточно матимемо:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.7)$$

Підставимо також (2.3b) у рівняння (2.2с)

$$-\Delta \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \rho, \quad (2.8)$$

що з урахуванням (2.5с) перетворюється на:

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\frac{4\pi}{c} \rho. \quad (2.9)$$

Досить часто ці рівняння можна зустріти у вигляді

$$\begin{aligned} \square \phi &= -4\pi \rho, \\ \square \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

де символ  $\square \equiv \Delta - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2$  використовується для позначення оператора д'Аламбера, а самі рівняння мають назву *рівнянь д'Аламбера, або хвильових рівнянь*.

Запишемо порівняльну таблицю для статичного та динамічного випадків (див. табл. 2.1).

На перший погляд може здатися, що потенціали поля — це тільки математичний апарат. До речі, з математичного погляду введення потенціалів дозволяє звести систему чотирьох рівнянь Максвелла (2.2), тобто вісьми зв'язаних скалярних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку, до двох рівнянь д'Аламбера (2.10) — чотирьох незалежних скалярних рівнянь другого порядку — що, безперечно, дуже зручно. Але виникає питання, який фізичний зміст мають потенціали? Фізичний зміст скалярного потенціалу — це робота по перенесенню одиничного заряду з нескінченності в точку спостереження. Для того, щоб визначити фізичний зміст векторного потенціалу, знайдемо функцію стану зарядженої частинки в електромагнітному полі.

## §2.4. Функції Лагранжа і Гамільтона частинки в електромагнітному полі

Нагадаємо, що нерелятивістська *функція Лагранжа* динамічної системи, яка описується радіус-вектором  $\mathbf{r}$  та швидкістю  $\mathbf{v}$ , має вигляд

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} - U(\mathbf{r}), \quad (2.11)$$

де  $m$  — маса частинки,  $\mathbf{G}(\mathbf{r})$  — гіровектор<sup>1</sup>,  $U$  — потенціальна енергія поля, в якому знаходиться частинка. Функції Лагранжа відповідають такі лагранжеві рівняння

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \overleftarrow{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{v} - \text{grad } U, \quad (2.12)$$

<sup>1</sup>Нагадаємо, що гіроскопічний доданок з'являється тільки при неоднорічному русі. Наприклад, якщо частинка рухається вздовж осі  $x$ , гіроскопічний доданок  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(gx)$  має вигляд повної похідної, тому не впливає на рух.

де

$$g_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial x_j} - \frac{\partial G_j}{\partial x_i}. \quad (2.13)$$

Наша мета — побудувати функцію Лагранжа частинки в електромагнітному полі. Виходимо з того, щоб рівняння Лагранжа набували форми<sup>1</sup>

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + e\mathbf{E}. \quad (2.14)$$

Порівнюючи (2.12) та (2.14), матимемо

$$e\mathbf{E} = -\text{grad } U, \quad \frac{e}{c}\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{G},$$

звідки остаточно

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi. \quad (2.15)$$

Узагальнений імпульс частинки в електромагнітному полі

$$\mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \quad (2.16)$$

На підставі цього виразу легко побачити, що фізичний зміст векторного потенціалу — це зміна імпульсу частинки за рахунок взаємодії з електромагнітним полем.

Побудуємо також *функцію Гамільтона* — як енергію системи

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} + e\phi,$$

але записану в позначеннях  $(r, \mathcal{P})$ :

$$\mathcal{H} = \frac{\left(\mathcal{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m} + e\phi. \quad (2.17)$$

<sup>1</sup>Слід нагадати, що в електричному полі рух може бути одновимірним, проте в магнітному, як видно з (2.14) це неможливо.

Хоча фізичний зміст векторного потенціалу вже з'ясовано, однак може виникнути питання про його реальність через те, що він визначений неоднозначно. Нагадаємо, що скалярний потенціал теж неоднозначний, але це не впливає на його реальність. Так, наприклад, електричне поле може перетворюватись на магнітне при відносному русі, але це нас не турбує.

Щонайперше необхідно з'ясувати, що маємо розуміти під реальністю, коли йдеться про поле. Нагадаємо, поняття поля вводиться для того, щоб уникнути поняття дальності. Під реальним полем будемо розуміти таке поле, що локально впливає на фізичні процеси; тобто якщо наявність поля в точці змінює фізичну картину в цій же самій точці, то вважатиме його реальним.

Розглянемо фізичну систему, в якій магнітне поле відсутнє, але векторний потенціал ненульовий. Якщо векторний потенціал є реальним, то його наявність має приводити до нових явищ.

Розглянемо соленоїд радіуса  $R$ . У наближенні нескінченно довгого соленоїда вектор магнітної індукції всередині є постійним та однорідним, а зовні магнітне поле відсутнє,

$$\mathbf{B}(\rho) = \begin{cases} B \cdot \mathbf{e}_z, & \text{якщо } \rho < R, \\ 0, & \text{якщо } \rho > R. \end{cases} \quad (2.18)$$

Оберемо векторний потенціал у вигляді

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}], \quad (2.19)$$

що відповідає аксіальній калібровці (2.5d). На поверхні циліндра  $\mathbf{r} = R \cdot \mathbf{e}_\rho$  та  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} BR \cdot \mathbf{e}_\varphi$ . Зовні, враховуючи симетрію системи,  $\mathbf{A} = \text{const} \cdot \mathbf{e}_\varphi / \rho$ , де const знайдемо з умови неперервності потенціалу на поверхні соленоїда, отже

$$\mathbf{A} = \frac{BR^2}{2\rho} \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{2} [\mathbf{B} \times \mathbf{r}] \cdot (R/\rho)^2.$$

Таким чином, векторний потенціал дається формулою

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} f(\rho) [\mathbf{B} \times \mathbf{r}], \quad f(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \rho < R, \\ \left(\frac{R}{\rho}\right)^2, & \text{якщо } \rho > R. \end{cases} \quad (2.20)$$

Запишемо гамільтоніан частинки у циліндричній системі координат:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{p_\rho^2 + p_z^2}{2m} + U_{\text{eff}}, \\ U_{\text{eff}} &= \frac{\left(\mathcal{P}_\varphi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\rho}\right)^2}{2m\rho^2} + e\phi, \end{aligned} \quad (2.21)$$

де  $U_{\text{eff}}$  має сенс ефективного потенціалу радіального руху.

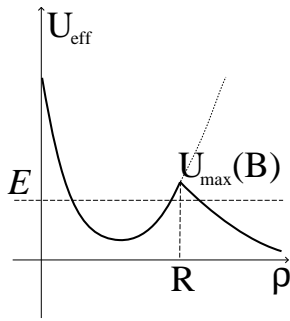


Рис. 2.1.

Якщо розглянути частинку з деякою енергією  $\mathcal{E}$  (див. рис. 2.1), то всередині циліндра ( $\rho < R$ ) рух є фінітним, зовні інфінітним; функція розсіювання залежить від амплітуди поля, тобто наявності векторного потенціалу при відсутності поля веде до зміни фізичної картини — розсіювання на соленоїді. Отже, векторний потенціал є реальною фізичною характеристикою електромагнітного поля. Експеримент, що описує цей ефект, був поставлений у 60-х роках. При цьому, крім описаного ефекту, який зникає, якщо  $R \rightarrow 0$ , існує ще один більш тонкий ефект, що залишається в граничному випадку  $R \rightarrow 0$ . Але це вже квантовий ефект, згідно з яким амплітуда розсіювання визначається магнітним потоком  $\Phi = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}$ . Він має назву *ефекту Ааронова — Бома* і був теоретично запропонований у 1959 р.

Наприкінці цього розділу зауважимо, що рівняння механіки інваріантні відносно інверсії часу, тобто заміні майбутнього минулим ( $t \rightarrow -t$ ). Отже, якщо в механіці можливий

який-небудь рух, то можливий і обернений, завдяки якому система послідовно змінює стани в оберненому порядку.

В електродинаміці рівняння руху частинки (2.14) не зміняться, якщо разом із зміною напрямку часу змінити також знак магнітного поля,

$$t \rightarrow -t, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}. \quad (2.22)$$

Отже, якщо в електромагнітному полі можливий деякий рух, то можливий також і обернений рух у полі з оберненим напрямом  $\mathbf{B}$ .

## §2.5. Рівняння Максвелла для суцільного середовища

Раніше в тексті розглядалися лише рівняння Максвелла для вакууму (2.2). Однак майже завжди в полі знаходиться суцільне середовище: діелектрик, магнетик тощо. Зрозуміло, у цьому випадку поведінка речовини — поляризація, намагнічування — залежать від прикладного зовнішнього поля, а воно, у свою чергу, стає залежним від значення полів, які створюються зарядами та струмами, що виникають у самій речовині. Треба розв'язувати самоузгоджену задачу і, крім того, визначити, які саме заряди та струми викликає в середовищі зовнішнє поле (матеріальні рівняння).

Запишемо систему рівнянь Максвелла для суцільного середовища<sup>1</sup>:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.23a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.23b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho, \quad (2.23c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.23d)$$

<sup>1</sup>Нагадаємо ще раз, що рівняння Максвелла ми будемо записувати в такому вигляді, коли густина зарядів та струмів залежить лише від часу і координат і не залежить від напруженостей полів та індукцій. Існують і інші форми запису рівнянь Максвелл, але ми ними користуватись не будемо. Подробиці є в книжці [20].

Ці рівняння вимагають декількох досить важливих коментарів:

1. Простий підрахунок кількості рівнянь (вісім скалярних) та кількості невідомих ( $3 \times 4 = 12$ ) показує, що невідомих більше ніж рівнянь. Отже, розв'язувати таку систему безглуздо — вона перевизначена. Для того, щоб вона була коректною в математичному розумінні треба, щоб кількість невідомих була б рівна (принаймні не більша) кількості рівнянь. З фізичного погляду необхідно додати зв'язок індукцій з полями:  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$  і  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$  — так звані матеріальні рівняння.

Визначимо вигляд матеріальних рівнянь для деяких загальноживаних моделей. Слід зазначити, що на основі лише електродинамічних міркувань вигляд цих співвідношень визначити неможливо. Треба брати до уваги також рівняння руху частинок або середовища (у класичній або квантовій формах).

Зразу ж скажемо, що вибір матеріальних рівнянь у вигляді

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.24)$$

де  $\varepsilon$  та  $\mu$  — константи, є досить значним наближенням і справджується лише для статичних задач (або для полів, що надто повільно змінюються з часом, так званих квазістаціонарних полів).

Найбільш загальна форма лінійного матеріального рівняння, що зв'язує вектор  $\mathbf{D}$  з  $\mathbf{E}$  (а також  $\mathbf{B}$  з  $\mathbf{H}$ ) — це інтегральне співвідношення вигляду

$$\begin{aligned} D_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^t dt' \int_{dV'} \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') E_\beta(\mathbf{r}', t'), \\ B_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^t dt' \int_{dV'} \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') H_\beta(\mathbf{r}', t'), \end{aligned} \quad (2.25)$$

де  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\mu_{\alpha\beta}$  — деякі тензорні функції, так звані *функції відгуку*. Фізичний зміст цих співвідношень полягає в тому, що



реакція середовища в точці  $\mathbf{r}$  в момент часу  $t$  визначається в загальному випадку значеннями поля в усьому просторі (*просторова дисперсія*) в усі попередні моменти  $t' < t$  (*часова дисперсія*). Звертаємо увагу, що межі інтегрування за  $t'$  узгоджуються з принципом причинності: реакція середовища в даний момент часу не може залежати від майбутніх значень поля. Тензорний характер функцій відгука  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\mu_{\alpha\beta}$  є результат анізотропії середовища: напрямки векторів  $\mathbf{D}$  та  $\mathbf{B}$  не збігається відповідно з напрямками  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{H}$ .

Надалі вважатиме, що властивості середовища однакові в різних точках простору і в різні моменти часу (однорідне середовище). Тоді функція відгука залежить лише від відносного положення точок  $\mathbf{r}$  і  $\mathbf{r}'$ , але не їх абсолютного значення (такий самий висновок відносно часової залежності):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \quad \mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$$

і зв'язок (2.25) набуває вигляду

$$\begin{aligned} D_{\alpha}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^t dt' \int_{dV'} \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_{\beta}(\mathbf{r}', t'), \\ B_{\alpha}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^t dt' \int_{dV'} \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') H_{\beta}(\mathbf{r}', t'). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Це співвідношення іноді записують в символічному вигляді

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H},$$

де  $\hat{\varepsilon}$ ,  $\hat{\mu}$  — лінійні інтегральні оператори, дія яких визначається згідно з (2.26). Математично, формула (2.26) уособлює згортку функцій  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  та  $E_{\beta}$  ( $\mu_{\alpha\beta}$  та  $H_{\beta}$ ). Якщо перейти до фур'є-образів векторів електричної індукції і напруженості електричного поля (іншими словами, зробити розклад на плоскі монохроматичні хвилі), цей зв'язок приймає алгебраїчну форму:

$$\begin{aligned} D_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) &= \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_{\beta}(\mathbf{k}, \omega), \\ B_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) &= \mu_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) H_{\beta}(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Отже, аналогічно до (2.24), можна знов ввести поняття діелектричної (магнітної) проникності, як коефіцієнтів пропорційності між відповідними Фур'є-компонентами полів.

Загальноживана класифікація дисперсії полягає в поділі її на додатну і від'ємну, нормальну та аномальну (див. табл.) Ключовими поняттями при аналізі процесу дисперсії є фазова  $v_{ph}$  і групова  $v_{gr}$  швидкості:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}, \quad \mathbf{v}_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (2.28)$$

	Нормальна	Аномальна
Додатна дисперсія	$v_{ph} > v_{gr}$ $v_{ph} \cdot v_{gr} > 0$	$v_{ph} < v_{gr}$ $v_{ph} \cdot v_{gr} > 0$
Від'ємна дисперсія	$v_{ph} > v_{gr}$ $v_{ph} \cdot v_{gr} < 0$	$v_{ph} < v_{gr}$ $v_{ph} \cdot v_{gr} < 0$

Відмітимо також геометричну дисперсію, яка пов'язана не з властивостями середовища, а з обмеженістю простору, тобто геометрією.

Особливо підкреслимо, що якщо для рівнянь Максвелла — Лоренца ми написали розв'язок, то у випадку суцільного середовища інколи не відомо як слід поставити задачу, оскільки не відомі рівняння руху або матеріальні рівняння.

2. Докорінно відрізняється фізичний зміст величин, що входять до мікроскопічної системи рівнянь Максвелла — Лоренца та макроскопічної систем рівнянь для суцільного середовища.

Якщо для мікроскопічної системи значення кожної величини було визначено в точці, то для системи мікроскопічної визначити значення фізичної величини в точці принципово не можна. Справа в тому, що за наявності середовища значення в точці буде залежати від того, наскільки близько буде знаходитись окрема частинка біля вимірювального приладу. Це може бути і майже нульове значення в одному випадку, і нескінченно велике в іншому. Тому за наявності суцільного середовища оперують із середніми значеннями величин. Але при цьому виникає проблема — диференціальні рівняння є рівності в точках і потребують неперервних функцій. Вихід із цього становища такий: навколо точки, в якій необхідно визначити значення деякої фізичної величини, описують сфе-

ру малого радіуса — фізично нескінченно малий об'єм. Згідно з визначенням фізично нескінченно малим об'ємом називають такий малий об'єм, що за розмірами набагато менше ніж усі характерні розміри задачі, але в ньому є ще достатня кількість частинок, щоб виконати процедуру осереднення. Пригадаємо, що число Лошміта дорівнює  $\sim 2.7 \cdot 10^{19} \text{ 1/см}^3$ . Якщо кожне ребро такого куба розділити на  $10^5$  частин, то в об'ємі, що утвориться, буде знаходитись  $\sim 2.7 \cdot 10^4$  частинок і відносна помилка у визначенні фізичної величини становитиме  $1/\sqrt{N} \sim 0.006$ , тобто менше 1%.

Далі за добре відомим правилом виконують процедуру осереднення фізичної величини:

$$\bar{G} = \frac{1}{V} \int G(\mathbf{r}', t) dV', \quad (2.29)$$

де  $V$  — фізично нескінченно малий об'єм. А потім знайдене значення приписують центральній точці. Для кожної наступної точки весь цей процес повторюють, таким чином утворюється неперервна множина значень фізичної величини.

3. Із загальних фізичних міркувань випливає, що при накладанні поля (електричного чи магнітного) на матеріальне середовище в ньому наводяться поляризаційні заряди або молекулярні струми (або і те й інше), які створюють своє власне поле на додаток до прикладеного. Тому загальне поле в середовищі матиме вигляд: зовнішнє поле + поле наведене в середовищі. Цей факт прийнято виражати рівностями:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad (2.30)$$

де  $\mathbf{P}$  та  $\mathbf{M}$  — *поляризація* (дипольний момент одиниці об'єму) та *намагніченість* (магнітний момент одиниці об'єму). Підкреслимо, що ці співвідношення не уособлюють матеріальних рівнянь, оскільки замість двох невідомих векторних величин  $\mathbf{D}$  та  $\mathbf{B}$  вводять дві також невідомі величини  $\mathbf{P}$  та  $\mathbf{M}$ . Скористаємось цими співвідношеннями, щоб знайти зв'язок густини *зв'язаних зарядів і струмів* з поляризацією та намагніченістю. Підставимо для цього (2.30) в (2.23с) та (2.23d):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho + \rho_{\text{bound}}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{bound}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}\quad (2.31)$$

де  $\rho_{\text{bound}}$  і  $\mathbf{j}_{\text{bound}}$  визначаються відповідно до

$$\rho_{\text{bound}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j}_{\text{bound}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.\quad (2.32)$$

## §2.6. Рівняння Максвелла в інтегральній формі

Звертаємо увагу, що рівняння (2.23) є диференціальні рівняння в частинних похідних, отже це є «рівності в точках». Зміст цієї термінології полягає в тому, що функції, з якими потрібно мати справу в цьому випадку, повинні бути неперервними і відповідно матимемо неперервні розв'язки. Тобто задача, в якій присутня межа розподілу двох середовищ, за допомогою лише самих рівнянь Максвелла розв'язана бути не може. Її треба доповнювати межовими умовами. Спочатку задачу розв'язують для середовища, що знаходиться по один бік межі, потім для середовища що знаходиться по інший її бік, а відтак отримані розв'язки «зшивають» (підбирають значення довільних констант таким чином, щоб розв'язки з обох боків задовольняли межові умови). Рівняння Максвелла в інтегральній формі є більш загальними, оскільки описують також і ті випадки, коли є поверхні розриву, на яких параметри середовища та поля можуть мати розриви. Диференціальна форма передбачає неперервну зміну всіх величин. Однак можна виправити ситуацію, якщо доповнити диференціальні рівняння межовими умовами. Це ми зробимо пізніше. Накреслимо табл. 2.2, в якій кожному закону електромагнітного поля (перший стовпчик) буде зіставлено у відповідність рівняння Максвелла в диференціальній (другий стовпчик) та інтегральній (третій стовпчик) формах.

Почнемо із закону відсутності магнітного заряду. Виберемо довільний об'єм  $V$ , що обмежений замкненою поверхнею  $S$  і проінтегруємо все рівняння по цьому об'єму. У лівій частині рівності перейдемо від інтегрування по об'єму до інтегрування по поверхні згідно з теоремою Остроградського — Гаусса (1.1). Одержуємо:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dV = \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0, \quad (2.33)$$

де елемент поверхні має напрям вектора зовнішньої нормалі. А отриманий вираз має досить простий фізичний зміст — потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню дорівнює нулеві.

Цілком аналогічно виконаємо інтегрування для рівняння, яке уособлює закон Кулона. Інтегруючи по тому самому об'єму  $V$  та переходячи від інтегрування по об'єму до інтегрування по поверхні згідно з теоремою Остроградського — Гаусса, одержуємо:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV = \oint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho \, dV = 4\pi Q, \quad (2.34)$$

де  $Q$  — повний заряд обмежений поверхнею  $S$  нормалі. Отримане рівняння добре знайоме — це теорема Гаусса, яка стверджує, що потік вектора електричної індукції через замкнену поверхню дорівнює повному заряду, обмеженому цією поверхнею.

Наступні два рівняння будемо інтегрувати по деякій поверхні  $S$ , яка обмежена замкненим контуром  $L$ . При інтегруванні закону електромагнітної індукції по вказаній поверхні перейдемо в лівій частині рівняння від інтегрування по поверхні до інтегрування по замкненому контуру згідно з теоремою Стокса (1.2), а в правій частині змінимо порядок диференціювання за часом та інтегрування за просторовими

Таблиця 2.2. Диференціальна та інтегральна форма рівнянь Максвелла

Закон електромагнітного поля	Диференціальна форма	Інтегральна форма
Закон відсутності магнітного заряду	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0$
Закон Кулона	$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\oint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = 4\pi Q$
Закон електромагнітої індукції Фарадея	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S}$
Закон Біо – Савара – Лапласа	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S}$

змінними. Ці перетворення змінять рівняння таким чином:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S}, \quad (2.35)$$

яке в статичному випадку відоме як теорема про циркуляцію вектора напруженості електричного поля по замкненому контуру. У випадку динамічних задач циркуляція вектора напруженості електричного поля по замкненому контуру дорівнює з точністю до  $c$  похідній за часом від потоку вектора магнітної індукції зі знаком мінус.

Нарешті, проінтегрувавши таким же чином узагальнений закон Біо–Савара та врахувавши, що скалярний добуток гу-

стини струму на елемент поверхні дорівнює значенню елемента струму, який тече через елемент  $dS$ , матимемо:

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} dS &= \oint_L \mathbf{H} dl = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} dS + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} dS = \\ &= \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} dS, \end{aligned} \quad (2.36)$$

де останній доданок, очевидно, пропорційний похідній за часом від потоку вектора електричної індукції через  $S$ .

## §2.7. Межові умови

Скористаємося інтегральною формою рівнянь Максвелла для того, щоб одержати межові умови на поверхнях розриву. Необхідно сказати, що в електродинаміці межові умови одержуються безпосередньо із самих рівнянь. Для порівняння в гідродинаміці поверхні розриву становлять значну складність — з гідродинамічних рівнянь одержати межові умови неможливо, тому доводиться додавати до рівнянь деякі умови, обґрунтування яких викликає сумнів.

Почнемо з нормальних складових індукцій електричного і магнітного полів. Візьмемо рівняння  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  і розглянемо межу двох середовищ, що збігається з площиною  $XOY$  (див. рис. 2.2). Хай середовище під межею характеризується  $\varepsilon_1$  і  $\mu_1$ , а над нею  $\varepsilon_2$  і  $\mu_2$ . Спрямуємо одиничний вектор нормалі  $\mathbf{n}$  з першого середовища в друге. У деякій точці поверхні побудуємо маленький циліндр (висота  $h$ , площа основи  $\Delta S$ ), розміри якого при остаточних обчисленнях будуть зменшені

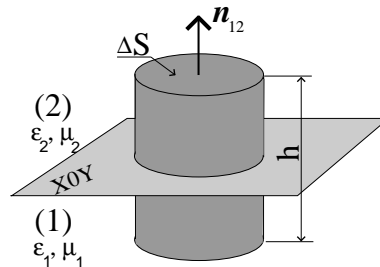


Рис. 2.2.

до нуля. Оскільки площа основи  $\Delta S \rightarrow 0$ , то можемо вважати, що в межах основ значення індукції  $\mathbf{B}$  залишається постійним, а тому його можна винести за знак інтеграла.

Треба враховувати, що зовнішня нормаль до верхньої основи має такий же напрям, як і вектор  $\mathbf{n}$ , а зовнішня нормаль до нижньої основи — протилежний напрям

$$\mathbf{n}_{12} = \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1.$$

Крім того, не будемо враховувати потік через бічну поверхню через те, що в остаточному результаті значення висоти  $h \rightarrow 0$ . Виконуючи нескладні перетворення, одержимо:

$$\int_S \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{n}_1 dS - \int_S \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{n}_2 dS = \left( -\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{n}_{12} + \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{n}_{12} \right) \cdot \Delta S = 0.$$

Скорочуючи на  $\Delta S$ , одержуємо межову умову для нормальних компонент магнітної індукції:

$$\left( -\mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)} \right) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0, \quad (2.37)$$

яку досить часто записують у вигляді:

$$B_n^{(2)} = B_n^{(1)},$$

з огляду на те, що скалярне множення на перпендикулярний до поверхні напрям дає проекцію на  $\mathbf{n}$ . Крім того, нормальна компонента вектора — скаляр, отже маємо право записати (2.37) у вигляді скалярної рівності.

Інтегрування рівняння  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$  відрізняється лише тим, що права частина його не дорівнює нулеві й може дати відмінний від нуля результат при стягуванні об'єму в точку, якщо на поверхні розподілу двох середовищ знаходиться заряд з густиною  $\sigma$ . Виконуюючи ті самі інтегральні перетворення в лівій частині рівності та враховуючи, що  $\int_{\Delta V} \rho dV =$



$\sigma \Delta S$ , одержимо аналогічно до попереднього випадку:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{n}_1 dS - \int_S \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{n}_2 dS = \\ = \left( -\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{n}_{12} + \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{n}_{12} \right) \cdot \Delta S = 4\pi\sigma \Delta S. \end{aligned}$$

Скорочуючи на  $\Delta S$  одержуємо межову умову для нормальних компонент електричної індукції:

$$\left( \mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)} \right) \cdot \mathbf{n}_{12} = 4\pi\sigma, \quad (2.38)$$

яку як і (2.37) часто записують у вигляді:

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = 4\pi\sigma.$$

Відмітимо, якщо одне із середовищ є провідним, а друге — вакуумом, то

$$\begin{aligned} D_n^{(2)} = E_n^{(2)} = 4\pi\sigma, \\ \text{або} \\ \sigma = \frac{E_n}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial n}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

де остання похідна символічно означає диференціювання за напрямом, перпендикулярним до поверхні. Це співвідношення буде необхідним при формулюванні статичних задач.

Межові умови для тангенціальних компонент полів можна одержати, інтегруючи рівняння з (2.2b) та (2.2d) по малому контуру, що охоплює межу розподілу двох середовищ.

Розглянемо тепер тангенціальні складові полів. Почнемо із закону електромагнітної індукції. Зберігаючи всі позначення, введені вище для середовищ (1) та (2), виберемо контур

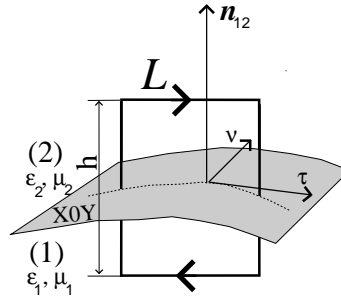


Рис. 2.3.

інтегрування  $L$  таким чином, щоб він охоплював межу розподілу середовищ. Контур звичайно вибирають невеликим (а при остаточних розрахунках його розміри прямують до нуля), щоб значення електричного поля в межах контуру не змінювались. Вектор нормалі спрямуємо із середовища (1) у середовище (2). Крім того, введемо ще два одиничних вектори  $\boldsymbol{\tau}$  та  $\boldsymbol{\nu}$ , дотичні до межової поверхні. Вектор  $\boldsymbol{\tau}$ , який лежить у площині контуру  $L$  та вектор  $\boldsymbol{\nu}$ , що перпендикулярний до нього (він же визначає напрям елемента площі контура). При обчисленні складових по окремих частинах контуру будемо враховувати, що в середовищі (2) вектори  $d\boldsymbol{l}$  та  $\boldsymbol{\tau}$  паралельні між собою, а в середовищі (1) — антипаралельні. Тому маємо

$$\oint_L \mathbf{E} d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot L = 0. \quad (2.40)$$

В рівності (2.40) праву частину прирівняли до нуля, оскільки потік вектора  $\mathbf{B}$  через елемент поверхні, що стягується до нуля, дорівнює нулеві. Для введених векторів повинна виконуватись рівність  $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}_{12}]$ . Скориставшись нею та циклічно переставляючи співмножники в змішаному добутку отримаємо

$$[\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)})] = 0. \quad (2.41)$$

Це і є межева умова для тангенціальних компонент електричних полів. Підкреслюємо, що на відміну від нормальних компонент записувати цю рівність у скалярному вигляді не бажано, тому що  $\mathbf{E}$  має дві компоненти.

Нарешті проінтегруємо закон Біо — Савара по такому самому контуру, який ми щойно ввели, щоб одержати умови для тангенціальних компонент магнітних полів. Цілком аналогічно виконуючи перетворення в лівій частині та нехтуючи похідною від потоку вектора електричної індукції, одержимо

$$(\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot L = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{j}_S \cdot L, \quad (2.42)$$

де  $\mathbf{j}_S$  — поверхнева густина струму, що тече по межі розподілу двох середовищ. Якщо  $\mathbf{j}_S = 0$ , то тангенціальні компоненти поля неперервні при переході із середовища (1) у (2). Аналогічно до попереднього випадку внеском вертикальних компонент контуру знехтували, оскільки  $h \rightarrow 0$ . Користуючись співвідношенням  $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}_{12}]$  та циклічно переставляючи співмножники в змішанному добутку приводимо межову умову до вигляду

$$\left[ \mathbf{n}_{12} \times \left( \mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)} \right) \right] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_S. \quad (2.43)$$

Застерігаємо, що використання цієї умови в скалярному вигляді веде до неминучих помилок.

## §2.8. Закон збереження енергії електромагнітного поля

Очевидно, які б аргументи ми не наводили на користь рівнянь Максвелла, ці рівняння повинні містити закон збереження енергії (і ще декілька основних принципів — інші закони збереження, властивості інваріантності тощо). Це ми зараз покажемо. Із системи (2.2) скористаємось рівняннями, що містять ротори, домноживши їх скалярно на  $\mathbf{E}$  та  $\mathbf{H}$ .

$$\mathbf{E} \times \begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{cases}$$

Віднімемо друге рівняння від першого:

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right), \quad (2.44)$$

та скористаємось рівністю (1.5) у лівій частині рівності,

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\text{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

У правій частині рівності розглянемо доданок  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  окремо. Скористаємось рівністю  $\mathbf{j} = qn\mathbf{v}$ . Скалярний добуток  $q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$  є за фізичним змістом робота, що виконується за одиницю часу над зарядженою частинкою з боку електричного поля  $\mathbf{E}$ . А над  $n$  частинками, які знаходяться в одиниці об'єму, виконується робота в  $n$  разів більша, тобто

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{F}d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Перетворимо також останній доданок скориставшись співвідношеннями  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  та  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ . Будемо вимагати лише, щоб  $\epsilon$  та  $\mu$  не залежали від часу. Тоді останній доданок можемо подати як

$$\frac{1}{2c} \left[ \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right],$$

яке можна подати у вигляді похідної від добутку:

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right).$$

Домножимо все рівняння (2.44) на  $c/4\pi$  і запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{S} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.45)$$

В цьому рівнянні  $W$  — повна енергія електромагнітного поля на одиницю об'єму (тобто густина енергії):

$$W = \frac{1}{8\pi} \left( \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right). \quad (2.46)$$

Вектор  $\mathbf{S}$  має назву *вектор Умова — Пойнтінга* та являє собою кількість енергії електромагнітного поля, яка щосекунди перетинає  $1\text{см}^2$  поверхні перпендикулярної до напрямку поширення хвилі (тобто потік):

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \left[ \mathbf{E} \times \mathbf{H} \right]. \quad (2.47)$$

Якщо виділити деякий об'єм  $V$ , оточений поверхнею  $S$ , та проінтегрувати рівняння (2.46) по ньому, матимемо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV = - \int_S \mathbf{S} ds - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV, \quad (2.48)$$

де було використано теорему Гаусса — Остроградського (1.1). У такому вигляді можемо остаточно сформулювати *закон збереження енергії* електромагнітного поля (*теорему Умова — Пойнтінга*): **зміна електромагнітної енергії в замкненому об'ємі може відбуватись за рахунок потоку енергії назовні або всередину, або за рахунок роботи, що виконується над частинками, які знаходяться в цьому об'ємі.**

Розглянемо два граничні випадки:

- Нехай система замкнена, тобто ізольована від зовнішнього середовища. Тоді потік через обмежуючу поверхню дорівнює нулю. Тому

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV = - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV.$$

Зміна енергії в об'ємі може відбуватись лише за рахунок роботи виконуваної над частинками.

- Нехай у об'ємі немає речовини, тобто  $\mathbf{j} = 0$ . Маємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV = - \int_S \mathbf{S} ds.$$

Зміна густини енергії в об'ємі відбувається лише за рахунок потоку її через обмежуючу поверхню.

## Глава 3

# Методи розв'язування статичних задач

### §3.1. Формулювання задачі в статичному випадку

Одне з основних положень полягає в тому, що для статичної системи рівнянь не можна довільним чином нав'язувати межові умови. З курсу математичної фізики відомо, що для рівняння певного типу (еліптичного, гіперболічного, параболічного) необхідно вибирати межові умови цілком певного вигляду і ніякі інші. «Нав'язування» невідповідних умов приведе до некоректного розв'язку<sup>1</sup>.

Рівняння Лапласа та Пуассона належать до рівнянь еліптичного типу. Спираючись на наш досвід можемо стверджувати, що якщо задати потенціал на заданій поверхні, то це єдиним чином визначає значення потенціалу в усіх інших точках простору. Як приклад, можемо навести систему провідників на яких підтримуються різні значення потенціалів. Математично це твердження можна записати так:

$$\Delta\phi = -4\pi\rho, \quad \phi(\mathbf{r})\Big|_{S_i} = \phi_i. \quad (3.1)$$

Тобто потрібно розв'язати електростатичну задачу в області, якщо задано розподіл потенціалу на її межі. Така постановка задачі наизається крайовою *задачею Діріхле*. Можна довести, що в цьому разі є єдиний та стійкий розв'язок.

Наступне, що спадає на думку — якщо на замкнених поверхнях задати значення розподілу поверхневого заряду (тоб-

---

<sup>1</sup>З цього приводу є гарний вислів у курсі математичної фізики Морса і Фешбаха: «Не слід намагатися зашхнути праву ногу в лівий чобіт» [14].

Таблиця 3.1. Існування та стійкість розв'язків для різних типів крайових умов

Крайові умови	Поверхня замкнена	Поверхня не замкнена
Діріхле	Єдиний стійкий розв'язок	Наявних умов не достатньо
Неймана	Єдиний стійкий розв'язок	Наявних умов не достатньо
Коші	Надлишкові умови	Не має фізичного змісту

то нормальні похідні потенціалу на обмежуючих поверхнях), то це також єдиним чином визначить значення потенціалу в усьому просторі. Математично це виглядатиме так:

$$\Delta\phi = -4\pi\rho, \quad -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{S_i} = \sigma_i. \quad (3.2)$$

Така постановка задачі називається крайовою *задачею Неймана*. При її запису ми скористались межовими умовами (2.39). Символом  $\partial\phi/\partial n$  символічно звичайно позначають похідну за напрямом, перпендикулярним до поверхні. Для цього випадку також можна довести, що розв'язок єдиний та стійкий.

Не потребує окремого пояснення твердження про те, що крайова умова Коші, тобто завдання на межовій поверхні функції (потенціалу) та її похідної (електричного поля) для випадку електричного поля приведе до неможливості побудувати розв'язок. Справді, якщо потенціал на поверхні вже задано, то значення електричного поля (похідної) на поверхні вже однозначно визначене. Спроба нав'язати його приведе до надлишкових умов.

Відмітимо, що можна сформулювати також задачі, в яких на одних поверхнях задано потенціал, а на інших — заряд (див. табл. 3.1).

### §3.2. Загальний розв'язок рівнянь Лапласа і Пуассона

Із самої назви випливає, що метод розв'язку рівняння Пуассона (1.26), (1.45) базується на (1.25) або (1.43):

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \text{або} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

#### §3.2.1. Поле зарядженого обмеженого стрижня в довільній точці

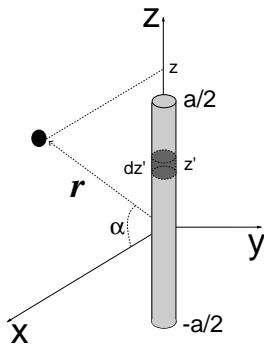


Рис. 3.1.

Розглянемо спочатку порівняно простий приклад — знайдемо потенціал, який створює нескінченно тонкий рівномірно заряджений стрижень довжиною  $a$  в довільній точці простору, що несе на собі повний заряд  $q$  (див. рис.3.1). Нехай стрижень розташований уздовж осі  $z$  від  $-a/2$  до  $a/2$ . Очевидно, що задача має аксіальну симетрію, тобто осі координат можемо на довільний кут повертати навкруг осі  $z$ . Це дозволяє розмістити точку спостереження в площині  $XOZ$ . Позначимо координати точки спостереження відповідно  $(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ . Користуємось циліндричною системою координат через те, що для цієї задачі вона є найзручнішою. Кожен елемент стрижня довжиною  $dz'$ , який знаходиться на відстані  $z'$  від початку координат, дає внесок у потенціал величиною

$$d\phi = \frac{q}{a} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}},$$

де враховано, що відстань від точки спостереження до точки  $z'$  дорівнює

$$\sqrt{r^2 + (z - z')^2}.$$



Тоді повне значення потенціалу  $\phi$ :

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{q}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{d(z' - z)}{\sqrt{r^2 + (z' - z)^2}} = \frac{q}{a} \ln \left| z' - z + \sqrt{(z' - z)^2 + r^2} \right| \Bigg|_{z' = -\frac{a}{2}}^{z' = \frac{a}{2}} \\ &= \frac{q}{a} \ln \left| \frac{\frac{a}{2} - z + \sqrt{(\frac{a}{2} - z)^2 + r^2}}{\frac{a}{2} - z + \sqrt{(\frac{a}{2} - z)^2 + r^2}} \right|.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Завдання:

- Знайти напруженість електричного поля в кожній точці простору.
- Перевірити граничні випадки:  $r \rightarrow 0$  і  $r \rightarrow \infty$ .
- Дайте відповідь ще на такі питання: з якого матеріалу зроблено стрижень?
- Чи можна скористуватись теоремою Гаусса в даному випадку?
- Розв'яжіть задачу про поле та потенціал на осі нескінченно тонкого рівномірно зарядженого кільця (радіус  $R$ , лінійна густина  $\lambda$ ).
- Поле та потенціал на осі симетрії нескінченно тонкого зарядженого диска (радіус  $R$ , поверхнева густина  $\sigma$ ).
- Знайти поле (у довільній точці) нескінченно тонкої зарядженої смуги (шириною  $a$ , довжина нескінченна, поверхнева густина  $\sigma$ ).

### §3.2.2. Поле зарядженого кільця в довільній точці

«Технологію» розв'язку освоєно, тепер розглянемо більш складні приклади. Обчислимо потенціал кільця радіуса  $R$ , який рівномірно заряджено з лінійною густиною  $\lambda$  (див. рис.

3.2). З огляду на аксиальну симетрію виберемо точку спостереження в площині  $XOZ$ . Для точок спостереження скористаємось сферичною системою координат. Точка спостереження має координати

$$(r \sin \theta, 0, r \cos \theta).$$

Елемент зарядженого кола, що дає внесок у потенціал, має координати  $(R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$ .

Обчислимо модуль радіус-вектора відстані між цими точками:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{(r \sin \theta - R \cos \varphi)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \sin \theta \cos \varphi}. \end{aligned}$$

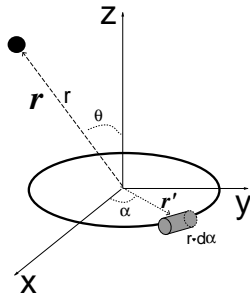


Рис. 3.2.

Маємо інтегрувати в межах від нуля до  $2\pi$ . Очевидно, що нічого не зміниться, якщо виконати інтегрування в межах від нуля до  $\pi$ , а результат подвоїти. Тому маємо:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \\ &= 2\lambda R \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \sin \theta \cos \varphi}}. \end{aligned}$$

Зробимо заміну змінних  $\varphi = \pi - 2\beta$ , щоб привести цей інтеграл до стандартного вигляду. Тоді межі інтегрування та диференціал змінюються згідно з

$$\begin{aligned} \varphi = 0 &\rightarrow \beta = \pi/2, & \varphi = \pi &\rightarrow \beta = 0, & d\varphi &= -d\beta \\ \cos \varphi &= \cos(\pi - 2\beta) = -\cos(2\beta) = -(1 - 2 \sin^2 \beta). \end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned}\phi(r, \theta) &= 4\lambda R \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2Rr \sin \theta - 4Rr \sin \theta \sin^2 \beta}} = \\ &= \frac{4\lambda R}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2Rr \sin \theta}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}},\end{aligned}$$

де введено позначення (для модуля еліптичного інтеграла):  
 $k^2 \equiv r^2 + R^2 + 2Rr \sin \theta$ .

Тому остаточно

$$\phi(r, \theta) = \frac{4\lambda R}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2Rr \sin \theta}} K(k). \quad (3.4)$$

Символом  $K(k)$  позначено еліптичний інтеграл першого роду

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}, \quad (3.5)$$

Легко бачити, що на осі кільця ( $\theta = 0$ ,  $K(0) = \pi/2$ ):

$$\phi = \frac{2\pi\lambda R}{\sqrt{r^2 + R^2}}.$$

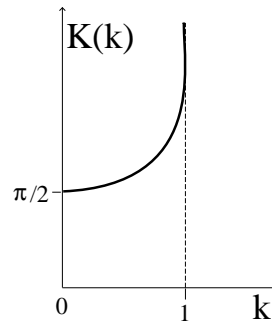


Рис. 3.3.

**Завдання:** порівняйте цю відповідь з результатом безпосереднього розрахунку, знайдіть поле в усьому просторі, перевірте, чи переходить цей вираз у кулонів потенціал при  $r \rightarrow \infty$ .

### §3.2.3. Поле кільцевого струму в довільній точці

Подібно можемо обчислити векторний потенціал, який створює кільце радіуса  $R$  зі струмом  $I$ , розташоване в площині  $XOY$  (див. рис. 3.4).

Як і вище, через наявність аксіальної симетрії, маємо право вибрати точку спостереження в площині  $XOZ$ . Для об'ємного розподілу струмів окремий елемент має вигляд  $\mathbf{j} dV'$ , для лінійного провідника відповідний вираз є  $I \cdot d\mathbf{l}$ . Якщо подивитись на кільце зверху (див. рис. 3.5), то побачимо, що два симетричні елементи струму, які розташовані під азимутами  $\varphi$  і  $-\varphi$ , дають однаковий за абсолютною величиною внесок у векторний потенціал. З рисунка видно, що елемент створюваного ними потенціалу є

$$|d\mathbf{A}| = \frac{2 I dl \cos \varphi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

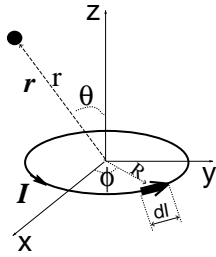


Рис. 3.4.

Крім того, з цього рисунка зрозуміло, що векторний потенціал у сферичній системі координат має лише одну компоненту  $A_\varphi$ . Дійсно, через те, що задача має аксіальну симетрію, то яку б точку простору ми не взяли, завжди можна повернути осі координат таким чином, щоб точка спостереження попала в площину  $XOZ$ . Тому при довільному значенні азимуту векторний потенціал матиме тільки одну компоненту — перпендикулярну до площини, в якій знаходиться точка спостереження.

Відстань від елемента струму  $I \cdot d\mathbf{l}$  до точки спостереження як і в попередньому випадку дорівнює

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \sin \theta \cos \varphi}.$$

Враховуючи це, після інтегрування від нуля до  $\pi$  одержимо:

$$A_\varphi = \frac{2IR}{c} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \sin \theta \cos \varphi}}.$$

Крім того, з цього рисунка зрозуміло, що векторний потенціал у сферичній системі координат має лише одну компоненту  $A_\varphi$ . Дійсно, через те, що задача має аксіальну симетрію, то яку б точку простору ми не взяли, завжди можна повернути осі координат таким чином, щоб точка спостереження попала в площину  $XOZ$ . Тому при довільному значенні азимуту векторний потенціал матиме тільки одну компоненту — перпендикулярну до площини, в якій знаходиться точка спостереження.

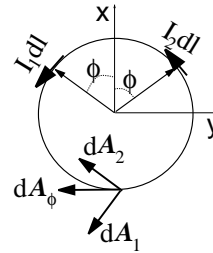


Рис. 3.5.

Знов виконуючи зміну змінних  $\varphi = \pi - 2\beta$ , маємо:

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{4IR}{c} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \beta - 1) d\beta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2Rr \sin \theta - 4Rr \sin \theta \sin^2 \beta}} = \\ &= \frac{4JR}{kc} \left[ -\frac{2}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \sin^2 \beta + 1) d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \right] \\ &= \frac{4JR}{kc} \left[ \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right], \end{aligned}$$

де введені позначення для повних еліптичних інтегралів першого,  $K(k)$ , див. (3.5), та другого,  $E(k)$ , роду:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta, \quad (3.6)$$

а також позначення для модуля еліптичного інтеграла:

$$k^2 \equiv r^2 + R^2 + 2Rr \sin \theta.$$

Завдання: знайдіть значення компонент магнітного поля  $B_r$  та  $B_\theta$  ( $B_\varphi = 0$ ). Крім того покажіть, що векторний потенціал на осі системи дорівнює нулю, а на далекій відстані ( $r \rightarrow \infty$ ) переходить у потенціал петлі зі струмом:

$$\mathbf{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}]}{cr^3},$$

де  $\boldsymbol{\mu} = \pi R^2 I \mathbf{e}_z$  — магнітний момент кільця зі струмом. Питання: чи можемо тут скористуватись теоремою Ампера?

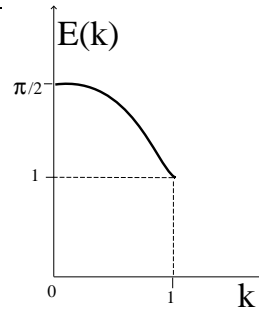


Рис. 3.6.

### §3.3. Розв'язування рівнянь Лапласа і Пуассона методом відокремлення змінних

#### §3.3.1. Поле металевого диска

Розглянемо більш складну задачу відшукування потенціалу і поля нескінченно тонкого металевого диска радіуса  $a$  в довільній точці простору [8]. Потенціал на поверхні диска набуває постійного значення  $\phi_0$  (див. рис. 3.7). Ця задача є прикладом досить складних межових умов. Дійсно, в оточуючому просторі повинно виконуватись рівняння Лапласа  $\Delta\phi = 0$ , яке з огляду на симетрію задачі запишемо в циліндричних координатах:

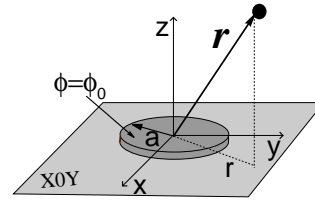


Рис. 3.7.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.7)$$

Однак межові умови, які треба формулювати для площини  $z = 0$ , мають досить складний вигляд:

$$\begin{cases} \phi|_{z=0} = \phi_0, & \text{якщо } 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z}|_{z=0} = 0 & \text{якщо } r > a. \end{cases} \quad (3.8)$$

Друге співвідношення вказує на відсутність поверхневих зарядів зовні диска. Задача є аксіально симетричною — довільної величини поворот навколо осі  $z$  жодним чином нічого змінити не може. Тому аксіально симетричне тіло може створити лише симетричне за азимутом поле. Скористаємось методом відокремлення змінних, тобто шукатиме частинний розв'язок у вигляді

$$\phi(r, \varphi, z) = R(r) \cdot Z(z), \quad (3.9)$$

і підставимо це в (3.7). Поділимо все рівняння на добуток  $R \cdot Z$ . Матимемо:

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (3.10)$$

У цьому рівнянні перший доданок залежить лише від  $r$ , а другий — лише від  $z$ , тому кожен з доданків є сталою величиною. Отже, позначимо другий доданок за  $k^2$  (знак сталої буде зрозумілим з подальшого). Відповідне рівняння для функції  $Z$  матиме форму

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$$

із загальним розв'язком

$$Z(z) = A_1 e^{kz} + a_2 e^{-kz}.$$

Цей розв'язок має задовольняти очевидну межову умову відсутності поля на нескінченності,  $Z(z = \pm\infty) = 0$ . Тому шукана функція  $Z(z) \sim e^{-k|z|}$ . Якщо б вибрали інший знак сталої відокремлення, то не задовольнили б цю умову.

Відповідне рівняння для радіальної частини рівняння

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0. \quad (3.11)$$

Це так зване рівняння Бесселя нульового порядку. Воно має загальний розв'язок у вигляді:

$$R(r) = B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr),$$

де  $J_0$  — функція Бесселя нульового порядку, а  $N_0$  — функція Неймана нульового порядку. Оскільки функція Неймана розбігається в точці нуль, то повинні її відкинути ( $B_2 = 0$ ) і залишити в розв'язку лише функцію Бесселя. Підставляючи всі знайдені функції до (3.9), маємо:

$$\phi \sim C \cdot J_0(kr) e^{-k|z|}, \quad (3.12)$$

де  $C$  — довільна константа,  $k$  вважаємо додатним. Вираз (3.12) задовольняє рівняння (3.7), але не задовольняє межові умови. Через складність межових умов задовольнити їх одним єдиним доданком (3.12) не можна. Тому треба взяти суперпозицію таких функцій (не просто суму, а неперервну суму — інтеграл), вважаючи, що  $C$  є функція від змінної  $k$ :

$$\phi(r, z) = \int_0^{\infty} C(k) J_0(kr) e^{-k|z|} dk \quad (3.13)$$

і підібрати  $C(k)$  таким чином, щоб були виконані межові умови. Для вибраного типу розв'язку умови (3.8) у площині  $z = 0$  перетворюються на:

$$\begin{aligned} \phi(r, 0) &= \int_0^{\infty} C(k) J_0(kr) dk = \phi_0, \quad \text{коли } 0 \leq r \leq a, \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} &= - \int_0^{\infty} k C(k) J_0(kr) dk = 0, \quad \text{коли } r > a. \end{aligned} \quad (3.14)$$

На перший погляд може здатись, що ці два рівняння задовольнити не можна, тому що рівнянь два, а невідома функція лише одна. Проте це не так, оскільки рівняння записані для різних значень параметру  $r$ : верхнє для  $0 \leq r \leq a$ , а нижнє для  $r > a$ . Взагалі, отримана система (3.14) є так званим парним інтегральним рівнянням. І цілком коректний шлях його розв'язування — метод Вінера—Хопфа [8]. Є інший шлях — розв'язати задачу про поле зарядженого металевого еліпсоїда (яйце), а потім одну з півосей спрямувати до нуля [11]. Еліпсоїд перетворюється на металевий диск. Проте це досить громіздка та довга робота.



Найзручніший спосіб — скористатися відомими математичними формулами [1, с.167]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ka}{k} J_0(kr) dk = \frac{\pi}{2}, \quad \text{якщо } 0 \leq r \leq a,$$

$$\int_0^{\infty} \sin ka J_0(kr) dk = \begin{cases} 0, & \text{коли } r > a \\ \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}, & \text{коли } r < a \end{cases}. \quad (3.15)$$

Очевидно, що обидві рівності можна задовольнити, якщо покласти:

$$C(k) = \frac{2\phi_0}{\pi} \cdot \frac{\sin ka}{k}.$$

Тобто розв'язок, який задовольняє і рівняння (3.7), і межові умови (3.8) має вигляд:

$$\phi(r, z) = \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ka}{k} J_0(kr) e^{-k|z|} dk. \quad (3.16)$$

Маючи повний розв'язок (3.16) можемо зв'язати потенціал диска з повним зарядом, що на нього нанесено. Справді, поверхнева густина заряду пов'язана зі значенням нормальної компоненти поля на поверхні як  $E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = 4\pi\sigma$ . Оскільки поля в металі немає,  $E_n^{(1)} = 0$ . Нормальною до поверхні металу є  $z$ -координата, тому

$$E_n^{(2)} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = 4\pi\sigma.$$

Отже поверхневу густину заряду можемо записати як:

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi} \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ka J_0(kr) dk = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{2\phi_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

де враховано значення похідної від потенціалу за координатою  $z$ . При обчисленні інтеграла (3.17) також враховано (3.15). Знаючи густину поверхневого заряду можемо легко обчислити повний заряд, нанесений на диск. Треба лише врахувати, що диск має дві поверхні — нижню та верхню, тому результат обчислення треба подвоїти:

$$\begin{aligned} q &= 2 \int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma(r) r \, dr \, d\varphi = 4\pi \frac{1}{4\pi} \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^a \frac{r \, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \\ &= \frac{2\phi_0}{\pi} \sqrt{a^2 - r^2} \Big|_a^0 = \frac{2a}{\pi} \phi_0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Звідси одразу бачимо, що коефіцієнт пропорційності між зарядом, нанесеним на диск, та створеним на ньому потенціалом (ємність) дорівнює

$$C = \frac{2a}{\pi}.$$

Це співвідношення з великою точністю було експериментально перевірено ще в 1870 р. Кавендишем [8]. Він порівнював у експериментах заряд, що нанесено на диск із зарядом, що нанесено на сферу при однаковому значенні потенціалу.

Використаємо зв'язок заряду, нанесеного на диск та потенціалу і перепишемо формулу (3.16) у вигляді:

$$\begin{aligned} \phi(r, z) &= \frac{q}{a} \int_0^\infty \frac{\sin ka}{k} J_0(kr) e^{-k|z|} \, dk = \\ &= \frac{q}{a} \arcsin \left[ \frac{2a}{\sqrt{(r-a)^2 + z^2} + \sqrt{(r+a)^2 + z^2}} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

де використано формулу (6.751) [7, с. 777]

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin cx}{x} J_0(bx) e^{-ax} dx = \\ = \arcsin \left[ \frac{2c}{\sqrt{a^2 + (c+b)^2} + \sqrt{a^2 + (c-b)^2}} \right].$$

Певний інтерес можуть становити також вирази для потенціалу на осі диска:

$$\phi(0, z) = \frac{q}{a} \arcsin \frac{a}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{q}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{z}. \quad (3.20)$$

та в площині  $z = 0$ :

$$\phi(0, z) = \frac{q}{a} \begin{cases} \arcsin \frac{a}{r}, & r > a \\ \frac{\pi}{2}, & r < a \end{cases}. \quad (3.21)$$

Запишемо також вираз для густини поверхневого заряду:

$$\sigma(r) = \frac{q}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Як і повинно бути, на нескінченно тонкому краю диска густина заряду (а разом з нею і поле) має нескінченне значення.

### §3.3.2. Задача про клин (Н.М.Маcdonald, 1895)

Знайдемо потенціал, створюваний точковим зарядом  $q$ , поміщеним між двома металевими заземленими півплощинами, що перетинаються під кутом  $\beta$ . Циліндричні координати заряду  $\mathbf{r}_0 = (a, \alpha, 0)$  (див. рис. 3.8).

Шуканий потенціал  $\phi(r, \varphi, z)$  є розв'язком рівняння Пуассона  $\Delta u = -4\pi\rho(\mathbf{r})$ , де  $\rho(\mathbf{r})$  — густина заряду. Оскільки заряд точковий, то густина пропорційна  $\delta$ -функції:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

У циліндричних координатах  $\mathbf{r} = (r, \varphi, z)$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{a} \delta(r - a) \delta(\varphi - \alpha) \delta(z),$$

тому рівняння Пуассона набуває вигляду

$$\Delta u = -\frac{4\pi q}{a} \delta(r - a) \delta(\varphi - \alpha) \delta(z).$$

Пригадавши вираз (1.4b) для оператора Лапласа в циліндричних координатах, переконуємось, що Фур'є-образ цього потенціалу

$$\phi_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r, \varphi, z) \cos kz dz$$

є розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial \varphi^2} - k^2 \phi_k = \\ = -\frac{4q}{a} \delta(r - a) \delta(\varphi - \alpha). \end{aligned} \quad (3.22)$$

У кожній з областей  $r < a$  та  $r > a$  рівняння (3.22) однорідне. Шукатимемо розв'язки такого однорідного рівняння методом відокремлення змінних, будуючи частинні розв'язки у вигляді

$$\phi_k(r, \varphi) = R_k(r) \Phi(\varphi).$$

Поділивши рівняння на  $R_k \cdot \Phi$ , матимемо

$$\frac{1}{r R_k} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d R_k}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} - k^2 = 0. \quad (3.23)$$

У цьому рівнянні перший доданок залежить лише від  $r$ , а другий — лише від  $\varphi$ , тому кожен з них є сталою величиною.

Позначимо другий доданок як  $-\nu^2$ . Тоді рівняння для  $\Phi$  матиме вигляд:

$$\Phi'' + \nu^2 \Phi = 0, \quad \text{і має розв'язок: } \Phi = C_1 \cos \nu\varphi + C_2 \sin \nu\varphi.$$

Стала  $\nu$  визначається з додаткових умов:

$$\Phi(0) = \Phi(\beta) = 0,$$

завдяки заземленості клина, звідки

$$\Phi_n(\varphi) = \sin \nu_n \varphi, \quad \nu_n = \frac{n\pi}{\beta}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.24)$$

Якби ми вибрали знак сталої відокремлення протилежним, то, очевидно, мали б розв'язок не у вигляді тригонометричних, а гіперболічних функцій; тому задовольнити дві однорідні умови було б неможливо.

Підставляючи (3.24) у рівняння (3.23), отримуємо так зване модифіковане рівняння Бесселя

$$\frac{d^2 R_{kn}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{kn}}{dr} - \left( k^2 + \frac{\nu_n^2}{r^2} \right) R_{kn} = 0, \quad (3.25)$$

яке має загальний розв'язок у вигляді [2, т. 2]

$$R_{kn}(r) = A_{kn} I_{\nu_n}(kr) + B_{kn} K_{\nu_n}(kr), \quad (3.26)$$

$I$  — модифікована функція Бесселя,  
 $K$  — функція Макдональда. При  $\nu > 0$  модифікована функція Бесселя  $I_\nu(r)$

обмежена в околі нуля і прямує до нескінченності при  $r \rightarrow \infty$ ; функція Макдональда  $K_\nu(r)$ , навпаки, необмежена в околі нуля і прямує до нуля при  $r \rightarrow \infty$ . Ці властивості функцій  $I_\nu$ ,  $K_\nu$  показують, що  $R_{kn}(r)$  пропорційне  $I_{\nu_n}(kr)$  при малих  $r$  і  $K_{\nu_n}(kr)$  при великих. Вигляд правої частини рівняння

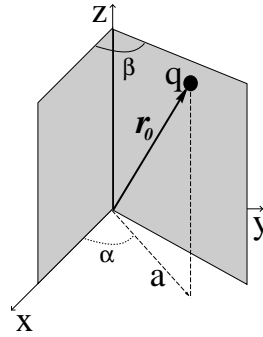


Рис. 3.8.

(3.22) показує, що за межу між малими та великими значеннями слід узяти  $a$ . Отже, загальний розв'язок (3.22) набуває вигляду

$$\phi_k(r, \varphi) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} I_{\nu_n}(kr) \sin \nu_n \varphi, & r < a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_{kn} K_{\nu_n}(kr) \sin \nu_n \varphi, & r > a. \end{cases} \quad (3.27)$$

Щоб визначити сталі  $A_{kn}$  та  $B_{kn}$ , скористаємось, по-перше, умовою неперервності потенціалу в точці  $a$ :

$$\phi(a-0) = \phi(a+0) \implies \frac{B_{kn}}{A_{kn}} = \frac{I_{\nu_n}(ka)}{K_{\nu_n}(ka)}. \quad (3.28)$$

По-друге, вимагатимемо, щоб потенціал (3.27) задовольняв рівняння (3.22). Помножимо обидві частини (3.22) на  $\Phi_m(\varphi)$  і проінтегруємо за змінною  $\varphi \in [0, \beta]$ . З урахуванням ортогональності  $\Phi_m(\varphi)$  на відрізку  $[0, \beta]$  дістанемо рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR_{km}}{dr} \right) - \left( k^2 + \frac{\nu_m^2}{r^2} \right) R_{km} = -\frac{8q}{\beta a} \delta(r-a) \sin \nu_m \alpha, \quad (3.29)$$

де

$$R_{km}(r) = \begin{cases} A_{km} I_{\nu_m}(kr), & r < a, \\ B_{km} K_{\nu_m}(kr), & r > a. \end{cases} \quad (3.30)$$

Функція  $R_{km}$  неперервна (див. умову (3.28)). Її похідна в кожній з областей  $r < a$  та  $r > a$  є гладка функція, але згідно із (3.30) у самій точці  $r = a$  вона має стрибок:

$$\begin{aligned} [R'_{km}]_a &\equiv R'_{km}(a+0) - R'_{km}(a-0) = \\ &= kB_m K'_{\nu_m}(ka) - A_m I'_{\nu_m}(ka). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Нехай  $\{R''_{km}\}$  позначає класичну похідну функції  $R'_{km}$ , тобто  $R''_{km}(r) = \{R''_{km}(r)\}$  для будь-яких  $r \neq a$ . Врахувавши (3.31), подамо похідну  $R''_{km}$  у вигляді (див. [3]):

$$R''_m(r) = \{R''_{km}(r)\} + [R'_{km}]_a \cdot \delta(r-a). \quad (3.32)$$

Підставивши (3.32) у (3.29), дістанемо рівняння

$$\begin{aligned} \{R''_{km}\} + [R'_{km}]_a \cdot \delta(r-a) \frac{1}{r} R'_{km} - \left(k^2 + \frac{\nu_m^2}{r^2}\right) R_{km} &= \\ = -\frac{8q}{\beta a} \delta(r-a) \sin \nu_m \alpha. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Функції  $R_{km}$  із (3.30) задовольняють рівняння (3.25), що перетворює (3.33) до вигляду

$$[R'_{km}]_a \cdot \delta(r-a) = -\frac{8q}{\beta a} \delta(r-a) \sin \nu_m \alpha.$$

Із (3.31) маємо друге співвідношення між коефіцієнтами  $A_{kn}$  і  $B_{kn}$ :

$$kB_{kn}K'_{\nu_n}(ka) - kA_{kn}I'_{\nu_n}(ka) = -\frac{8q}{\beta a} \sin \nu_n \alpha. \quad (3.34)$$

Розв'язуючи рівняння (3.28), (3.34) з урахуванням співвідношення

$$K_{\nu}(x)I'_{\nu}(x) - I_{\nu}(x)K'_{\nu}(x) = \frac{1}{x},$$

знаходимо явний вираз для коефіцієнтів  $A_{kn}$  та  $B_{kn}$ :

$$\begin{aligned} A_{kn} &= \frac{8q}{\beta} K_{\nu_n}(ka) \sin \nu_n a, \\ B_{kn} &= \frac{8q}{\beta} I_{\nu_n}(ka) \sin \nu_n a. \end{aligned}$$

Отже, розв'язок задачі можна подати у вигляді інтеграла Фур'є

$$\phi(r, \varphi, z) = \int_0^{\infty} \phi_k(r, \varphi) \cos kz \, dk, \quad (3.35a)$$

де

$$\phi_k(r, \varphi) = \frac{8q}{\beta} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} K_{\nu_n}(ka) I_{\nu_n}(kr) \sin \nu_n \alpha \sin \nu_n \varphi, & r < a, \\ \sum_{n=1}^{\infty} I_{\nu_n}(ka) K_{\nu_n}(kr) \sin \nu_n \alpha \sin \nu_n \varphi, & r > a. \end{cases} \quad (3.35b)$$

Скориставшись формулою [7]

$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(kr) I_{\nu}(ka) \cos kzk dk = \frac{1}{2\sqrt{2ar}} Q_{\nu-1/2}(\text{ch } \eta),$$

де

$$\text{ch } \eta = \frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ar}, \quad \eta > 0,$$

$Q_{\nu}$  — функція Лежандра другого роду [2, т. 1], і проінтегрувавши ряди (3.35) почленно, матимемо

$$\phi(r, \varphi, z) = \frac{4q}{\beta\sqrt{ar}} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{\nu_n-1/2}(\text{ch } \eta) \sin \nu_n \alpha \sin \nu_n \varphi.$$

Цей ряд легко підсумовується. Використовуючи інтегральне зображення  $Q_{\nu}$  [2, 7]

$$Q_{\nu-1/2}(\text{ch } \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\xi\nu} d\xi}{\sqrt{\text{ch } \xi - \text{ch } \eta}}$$

і формулу підсумовування [7]

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p^n \cos nx = \frac{1 - p^2}{1 - 2p \cos x + p^2}, \quad |p| < 1,$$



отримаємо інтегральний вираз для потенціалу:

$$\phi(r, \varphi, z) = \frac{q}{\beta\sqrt{2ar}} \int_{\eta}^{\infty} \left[ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\zeta}{\beta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos \frac{\pi(\varphi-\alpha)}{\beta}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\zeta}{\beta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos \frac{\pi(\varphi+\alpha)}{\beta}} \right] \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch} \zeta - \operatorname{ch} \eta}}. \quad (3.36)$$

Отже, розподіл потенціалу, створюваного точковим зарядом  $q$  поблизу металевого заземленого клина, дається формулою Макдональда (3.36).

Відмітимо граничний випадок  $\beta = 2\pi$ , коли клин вироджується в півплощину. Тут інтеграл (3.36) легко обчислюється і для потенціалу  $\phi$  отримуємо вираз

$$\phi \Big|_{\beta=2\pi} = \frac{q}{\pi} \left[ \frac{1}{R} \arccos \left( -\frac{\cos \frac{\varphi-\alpha}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2}} \right) - \frac{1}{R'} \arccos \left( -\frac{\cos \frac{\varphi+\alpha}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2}} \right) \right], \quad (3.37)$$

в якому

$$R = \sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos(\varphi - \alpha)},$$

$$R' = \sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos(\varphi + \alpha)}.$$

Якщо точка спостереження наближається до точки знаходження заряду  $q$ , потенціал (3.37) матиме вигляд

$$\phi = \frac{q}{R} + \phi', \quad \phi' = -\frac{q}{2\pi a} \left( 1 + \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi} \right). \quad (3.38)$$

Перший доданок у (3.38) є кулонів потенціал, необмежено зростаючий при  $R \rightarrow 0$ , а вираз  $\phi'$  — це частина потенціалу в точці спостереження, що виникає за рахунок взаємодії з провідником. У цьому випадку енергія взаємодії заряду  $q$  з металевою півплощиною є (див. [11])

$$\mathcal{E} = \frac{q\phi'}{2} = -\frac{q}{4\pi a} \left( 1 + \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi} \right).$$

### §3.4. Метод електростатичних зображень

Вище ми розглянули прямі методи розв'язування статичних задач. Вони приводили до безпосереднього інтегрування рівнянь Пуассона. Існує простіший метод розв'язування статичних задач з металевими поверхнями, так званий *метод електростатичних зображень*. Ідея метода полягає в тому, щоб підібрати систему фіктивних зарядів, які забезпечують необхідний потенціал на металевій поверхні. Тобто поверхня метала збігається з одною з еквіпотенціалей для цієї системи зарядів. Такі заряди називають *зображеннями*.

Розглянемо простий приклад. Нехай потрібно знайти поле точкового заряду  $q$ , що знаходиться на відстані  $l$  від металеві площини. В даному випадку достатньо ввести фіктивний заряд  $q' = -q$  в точці, дзеркально симетричній відносно площини. Тоді потенціал поля заряду  $q$  та його зображення  $q'$  дорівнює

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} - \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'}|}, \quad (3.39)$$

де  $\mathbf{r}_q$  — радіус-вектор заряду  $q$  ( $|\mathbf{r}_q| = l$ ), а  $\mathbf{r}_{q'}$  — радіус-вектор заряду  $q'$ . На межовій площині  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'}|$ , отже потенціал  $\phi = 0$ .

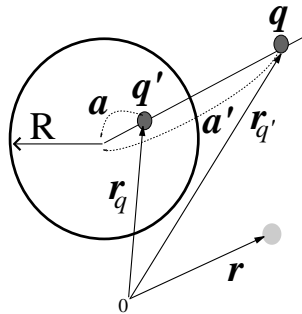


Рис. 3.9.

На заряд  $q$  діє сила  $F = q^2/(2l)^2$ , що притягує його до поверхні метала, так звана *сила зображення*. Розподіл поверхневих зарядів, які наводяться на поверхні метала обчислюються за формулою (2.39):

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{q'}|} = -\frac{q}{2\pi} \cdot \frac{l}{r^3}. \quad (3.40)$$

Розглянемо тепер більш складну задачу про поле точкового заряду  $q$ , що знаходиться на відстані  $l$  від центру заземленої металеві сфери, радіус якої дорівнює  $R$ . Для цього скористаємось

наступним результатом, який легко перевіряється безпосереднім розрахунком. Потенціал поля, що утворюється двома точковими зарядами  $q$  та  $q'$  дорівнює

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'}|}. \quad (3.41)$$

Він приймає нульове значення на сферичній поверхні, радіус якої дорівнює  $R$ . Центр поверхні знаходиться на прямій, що з'єднує заряди, на відстані  $a$  та  $a'$  від цих точок (див. рис. 3.9). Параметри  $a$ ,  $a'$  і  $R$  пов'язані співвідношеннями:

$$\frac{a}{a'} = \left(\frac{q}{q'}\right)^2, \quad a \cdot a' = R^2, \quad (3.42)$$

звідки  $a' = \frac{R^2}{a}$ ,  $q' = -q \frac{R}{l}$ .

З огляду на (3.42), потенціал системи (3.41) набуває вигляду

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} - \frac{qR}{a \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'}|}. \quad (3.43)$$

Енергія взаємодії заряду зі сферою

$$\mathcal{E} = \frac{qq'}{2(a - a')} = -\frac{q^2 R}{2(a^2 - R^2)},$$

а сила, з якою заряд притягується до сфери

$$F = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = -\frac{q^2 a R}{(a^2 - R^2)^2}.$$

Розглянуті вище приклади можуть бути узагальнені при використанні принципу суперпозиції.

Нехай точковий заряд  $q$  знаходиться на відстані  $l$  від центру сферичного виступу (радіус  $R$ , де  $R < l$ ) з металевої площини на осі симетрії системи. Потрібно знайти потенціал цієї системи (див. рис. 3.10).

Поверхня метала складається зі сфери та площини. Кожну з цих задач вже розв'язано. Забезпечимо спочатку умови на виступі. Для цього слід помістити фіктивний заряд  $q' = -qR/l$  на відстані  $l' = R^2/l$  відносно центра сферичного виступу (зображення відносно сфери). Але така система не відповідає умовам на металевій площині. Отже необхідно помістити два додаткових дзеркальних зображення зарядів 1 та 2 відносно площини (відповідно заряди 3 та 4). Таким чином потенціал усієї системи має вигляд

$$\phi = \frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} - \frac{q}{r_3} - \frac{q'}{r_4}. \quad (3.44)$$

Нажаль, не завжди можливо підібрати скінчену кількість зарядів для забезпечення необхідних умов на поверхні метала. В цьому розумінні метод зображень не є універсальний. Однак кожного разу є майже безліч розв'язаних задач. Для тієї самої зарядженої частинки біля нескінченної поверхні провідника: скільки еквіпотенціальних поверхонь — стільки і розв'язаних задач.

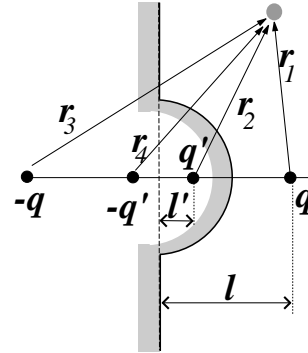


Рис. 3.10.

### §3.5. Метод конформних відображень

#### §3.5.1. Комплексний потенціал плоского електростатичного поля

Якщо електричне поле залежить лише від двох координат, наприклад  $\mathbf{E}(x, y)$ , його звать плоским. Прикладом такого поля може служити поле нескінченного рівномірно зарядженого дроту, або довільного нескінченного об'єкта з незмінним поперечним перерізом (нескінченна смуга, нескінченний циліндр тощо). У такому випадку, як буде видно далі, досить просто побудувати аналітичну функцію комплексного змін-

ного і використовувати весь потужний апарат теорії функцій комплексного змінного.

Як завжди, електростатичне поле у вакуумі або однорідному ізотропному діелектрику задовольняє систему рівнянь

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (3.45)$$

Розв'язок першого рівняння добре відомий:  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ , де  $\phi$  — скалярний потенціал. Вибір знака мінус відповідає загальноприйнятій умові, що вектор  $\mathbf{E}$  має напрям від позитивного заряду до негативного. Оскільки електричне поле плоске і має всього дві компоненти (з трьох), то одна компонента (наприклад,  $E_z$ ) залишається «вільною». Тому буде зручно ввести ще одну величину — вектор  $\mathbf{a}$  з однією компонентою  $\mathbf{a} = (0, 0, a)$  і записати розв'язок другого рівняння (3.45) у вигляді  $\mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$ . Таким чином, уведена величина має назву «векторний потенціал», проте його не слід плутати з векторним магнітним потенціалом. Скалярна функція  $a$  називається функцією струму. Із самого означення видно, що вектор  $\mathbf{a}$  перпендикулярний до площини  $(x, y)$ . А зовсім простий розрахунок показує, що ротор цього вектора лежить у площині  $(x, y)$ .

Запишемо розв'язок першого рівняння у вигляді:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} - \mathbf{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (3.46)$$

Відповідно, розв'язок другого рівняння буде

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \frac{\partial a}{\partial y} - \mathbf{e}_y \frac{\partial a}{\partial x}. \quad (3.47)$$

З (3.46) та (3.47) випливає, очевидно, що:

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial a}{\partial x}. \quad (3.48)$$

Дві величини, уведені нами таким чином, задовольняють умови Коші — Рімана (Даламбера — Ейлера)<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial(-a)}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\partial(-a)}{\partial x}, \quad (3.49)$$

тому вибираючи  $\phi$  як дійсну частину, а величину  $-a$  як уявну частину комплексної функції, будемо комплексний потенціал<sup>2</sup>:

$$\Phi = \phi - i a. \quad (3.50)$$

Дійсна та уявна частини цього потенціалу, як відомо, задовольняють рівняння Лапласа, що впливає безпосередньо з (3.49):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0. \quad (3.51)$$

Оскільки умови Коші — Рімана маємо право записувати і так:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (3.52)$$

то означення комплексного потенціалу можемо вибирати таким чином:

$$\Phi = a + i \phi. \quad (3.53)$$

В обох випадках як дійсна так і уявна частини комплексного потенціалу задовольняють рівняння Лапласа.

Комплексний потенціал є аналітичною функцією своєї змінної. Це означає, що значення похідної в точці  $z$  не залежить

<sup>1</sup>Для функції комплексної змінної  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  матимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

<sup>2</sup>Власне, заздалегідь маючи на меті побудову цього комплексного потенціалу ми й уводили «векторний потенціал»  $\mathbf{a}$ , оскільки при такому означенні зможемо користуватися всіма можливостями, що надає теорія функцій комплексної змінної для аналітичних функцій.

від способу наближення до цієї точки. Звідки випливає, що<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dz} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} - i \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial y} - i \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i \frac{\partial\phi}{\partial y}, \\ \frac{d\Phi}{dz} &= -i \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} = -i \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = -i \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial x}.\end{aligned}\quad (3.54)$$

Неважко бачити, що серед цих рівностей незалежних співвідношень — чотири, тому що два доданки можуть набувати по два значення кожний (умови (3.49)).

Скористаємось правилами диференціювання (3.54) і запишемо співвідношення, які будемо часто використовувати нижче:

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i \frac{\partial a}{\partial x} = -E_x + i E_y, \quad \text{або} \quad \mathbf{E} = -\overline{\frac{d\Phi}{dz}}, \quad (3.55)$$

де рискою зверху позначено комплексне спряження. Легко перевірити, що всі інші варіанти запису (див. (3.54)) та (3.48), приводять до тих самих рівностей.

Тепер пересвідчимося, що введений нами потенціал має цілу купу корисних властивостей. Силові лінії електричного

---

<sup>1</sup>Ці співвідношення є правила диференціювання функції  $f(z)$  уздовж дійсної

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

та уявної

$$\frac{df}{dz} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

осей, застосовані до комплексного потенціалу  $\Phi$ .

поля, як відомо<sup>1</sup>, визначаються умовами:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}. \quad (3.56)$$

Перепишемо це співвідношення у вигляді:

$$E_y dx = E_x dy, \quad (3.57)$$

та скористаємось умовами (3.54). Звідки одержимо:

$$-\frac{da}{dx}dx - \frac{da}{dy}dy = da = 0. \quad (3.58)$$

Таким чином, постійне значення векторного потенціалу,

$$a(x, y) = \text{const},$$

відповідає рівнянням силових ліній електричного поля. А постійне значення скалярного потенціалу,

$$\phi(x, y) = \text{const},$$

є рівнянням еквіпотенціальних ліній.

Як і повинно бути, ці дві родини ліній взаємно ортогональні між собою. Це простіше побачити, якщо обчислити скалярний добуток їх градієнтів:

$$\begin{aligned} \text{grad}\phi \cdot \text{grada} &= \left( \mathbf{e}_x \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \cdot \left( \mathbf{e}_x \frac{\partial a}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial a}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

<sup>1</sup>Ці співвідношення випливають просто з означення. Силовою лінією називають лінію, дотична до якої в кожній точці за напрямом збігається з вектором напруженості електричного, у даному випадку — поля. Оскільки поле плоске, то це означає, що повинна виконуватись рівність:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x},$$

що збігається з (3.56)



Оскільки тепер маємо на «озброєнні» аналітичну функцію комплексної змінної, то можемо скористатись теорією функцій комплексної змінної та за допомогою конформного перетворення переходити від однієї геометрії до іншої.

Пригадаємо, як визначається конформне перетворення. Нехай маємо аналітичну функцію

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (3.60)$$

яка здійснює взаємно однозначне перетворення.

Згідно з означенням функція (3.60) здійснює конформне перетворення, якщо в околі довільної точки  $z$  головна лінійна частина цього відображення є ортогональним перетворенням, яке зберігає орієнтацію. З наведеного означення випливають дві основні властивості конформних перетворень:

1. Конформне перетворення відображує нескінченно малі кола в такі ж нескінченно малі кола (з точністю до величин другого порядку малості).
2. Конформне перетворення зберігає кути між кривими в точках їх перетину.

Нагадаємо також геометричний зміст похідної  $f'(z)$  від функції комплексної змінної: модуль похідної  $|f'(z)|$  є коефіцієнт розтягу, а аргумент  $\alpha = \arg(f'(z))$  — кут повороту головної лінійної частини відображення  $w = f(z)$  у точці  $z$ . Інакше кажучи, коефіцієнт розтягу та кут повороту самого відображення  $w = f(z)$  у точці  $z$ .

Для того, щоб функція  $w = f(z)$  здійснювала конформне відображення в області  $D_z$  необхідно та достатньо виконання таких властивостей.

1. Функція повинна бути однолисною.
2. Аналітичною.
3. Похідна  $f'(z)$  скрізь у області  $D_z$  має бути відмінною від нуля.

Досить простий висновок, яким будемо користуватись, полягає в тому, що елемент дуги гладкої кривої  $dl_z$  у області  $D_z$  після перетворення, здійсненого аналітичною функцією, переходить у елемент  $dl_w$  у області  $D_w$ . Причому виконується рівність  $dl_w = dl_z |f'(z)|$  а кут між  $dl_z$  та  $dl_w$  дорівнює  $\arg(f'(z))$ .

Узявши до уваги все вищезазначене, можемо запропонувати такий порядок розв'язку плоскої електростатичної задачі:

1. Починаємо з того, що вибираємо деяку просту задачу, розв'язок якої добре відомий. Досить часто таким розв'язком є електричне поле рівномірно зарядженої площини.
2. Використовуючи цей розв'язок, будуємо комплексний потенціал  $\Phi$ .
3. Вибираємо відповідне конформне перетворення, яке дозволяє перетворити геометрію вихідної задачі (вже розв'язану) на геометрію шуканої задачі. Тобто з площини  $(x, y)$  та відомого розв'язку переходимо до площини  $(u, v)$  та шуканого розв'язку. У дійсності, цей пункт є найважчим, оскільки загальних методів побудови функцій відображення з необхідними властивостями навіть для однозв'язних областей не існує.
4. Виконуємо аналіз отриманого розв'язку в площині  $(u, v)$ . Заздалегідь гарантовано, що він задовольняє рівняння Лапласа та межові умови.

Зручно зобразити схему розв'язку задачі за допомогою конформних відображень у вигляді таблиці (див. табл. 3.2).

Для нових змінних маємо (з точністю до позначень) такі ж формули:

$$\begin{aligned} \Psi &= \phi'(w) - i a'(w), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial w} &= \frac{\partial \phi'}{\partial u} - i \frac{\partial a'}{\partial u} = -E_u + i E_v. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Звертаємо увагу, що дійсна ( $\phi'$ ) та уявна ( $a'$ ) частини комплексного потенціалу задовольняють рівняння Лапласа. Як

Таблиця 3.2.

«Старі змінні» (розв'язана задача)	Конформне перетворення	«Нові змінні» (нова задача)
Комплексний потенціал $\Phi(z)$ $z = x + iy$	$z = z(w)$ або $w = w(z)$	Комплексний потенціал $\Psi(w)$ $w = u + iv$

і для вихідних змінних, рівняння екіпотенціалей має вигляд  $\text{Re}\Psi = \text{const}$ , а рівняння силових ліній —  $\text{Im}\Psi = \text{const}$ , ці дві системи ліній ортогональні між собою.

### §3.5.2. Електричне поле прямого кута

Розглянемо як вихідну задачу про поле нескінченної площини (див. рис. 3.11). Вона має очевидний розв'язок  $E_x = 0$ ,  $E_y = 2\pi\sigma$ . Отже,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= -\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial(-a)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\partial(-a)}{\partial x} = 2\pi\sigma.\end{aligned}\tag{3.62}$$

З цих двох рівнянь легко знаходимо вираз для потенціалу  $\phi$  та величини  $a$  (вибрано коефіцієнт  $2\pi\sigma$  тому, що поле площини існує з двох боків; якби при  $y < 0$  знаходився метал, то мали б коефіцієнт  $4\pi\sigma$ ):

$$\phi = -2\pi\sigma y \quad a = -2\pi\sigma x, \tag{3.63}$$

і будемо комплексний потенціал:

$$\Phi = -2\pi\sigma y + i 2\pi\sigma x = i 2\pi\sigma(x + iy) = i 2\pi\sigma z. \tag{3.64}$$

Корисно перевірити, що для цього потенціалу рівняння екіпотенціалей  $2\pi\sigma y = \text{const}$ , а рівняння силових ліній  $2\pi\sigma x =$

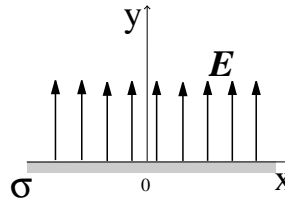


Рис. 3.11.

const. Далі для вже побудованого комплексного потенціалу виконаємо конформне перетворення  $z = w^2$ , де  $w = u + iv$ . Зараз ми побачимо, що для цього випадку початкова геометрія перетворюється на геометрію прямого кута. При іншому виборі конформного перетворення могли б перейти до іншої геометрії. Відокремимо дійсну та уявну частини конформного перетворення:

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv. \quad (3.65)$$

Розглянемо в площині  $w$  прямий кут — перший квадрант — та подивимось на яку область він відобразиться в площині  $z$ . Візьмемо спочатку уявну піввісь  $0 \leq v < \infty$ ,  $u = 0$  і будемо рухатись від нескінченно великих значень  $v$  до нуля. Очевидно, що при цьому в площині  $z$  відповідна точка рухається від значень  $x = -\infty$  до нуля, а  $y = 0$ . Тобто рухається вздовж дійсної осі, починаючи з мінус нескінченності. Початок координат у площині  $w$  збігається з початком координат у площині  $z$ . Далі в площині  $w$  будемо рухатись уздовж дійсної півосі  $0 \leq u < \infty$ ,  $v = 0$ . Відповідна точка в площині  $z$  рухається вздовж додатної півосі  $0 \leq x < \infty$ ,  $y = 0$ . Таким чином, бачимо що дійсній осі в площині  $z$  відповідає перший квадрант у площині  $w$ .

Отже, за допомогою конформного перетворення  $z = w^2$  задачу про поле нескінченної площини зведено до задачі в полі прямого кута. Наступний крок, як заплановано, полягає в тому, щоб записати розв'язок задачі в площині  $w$  — комплексний потенціал  $\Psi$ :

$$\Psi(u + iv) = i 2\pi\sigma(u + iv)^2 = -4\pi\sigma uv + i 2\pi\sigma(u^2 - v^2). \quad (3.66)$$

Це і є розв'язок задачі. Далі необхідно виконати аналіз: побудувати екіпотенціали, силові лінії, знайти компоненти електричного поля. Як було показано, рівняння екіпотенціалей та силових ліній мають вигляд

$$4\pi\sigma uv = \text{const}, \quad 2\pi\sigma(u^2 - v^2). \quad (3.67)$$

Екіпотенціальні лінії будуються елементарно і мають вигляд, зображений на рис. 3.12. Рівняння силових ліній перепишемо у вигляді

$$u^2 - v^2 = \pm p^2,$$

де через  $\pm p^2$  позначено довільну константу (вона може мати значення додатні, від'ємні та нуль). На рисунку зручно спочатку побудувати рівняння для випадку  $p = 0$  — це є бісектриса прямого кута. Для додатних значень  $p$  перепишемо рівняння у вигляді  $v = \sqrt{u^2 - p^2}$ , з якого бачимо, що  $v < u$  і при великих значеннях  $u$  асимптотично до нього наближується, залишаючись весь час меншим. Крім того, очевидно, що повинна виконуватись нерівність  $u > p$ . Нарешті обчислимо похідну  $dv/du = u/\sqrt{u^2 - p^2}$ , з якої видно, що для значень  $u = p$  похідна перетворюється на нескінченність.

Усе це дає змогу легко побудувати силові лінії поля для першої півчверті. Для від'ємних значень  $p$  рівняння силових ліній набуває вигляду  $v = \sqrt{u^2 + p^2}$ . З нього видно, що  $v > u$  і при великих значеннях  $u$  асимптотично до нього наближується зверху. Обчислимо похідну  $dv/du = u/\sqrt{u^2 + p^2}$ , з якої видно, що для значень  $u = 0$  похідна перетворюється на нуль. Аналогічним чином можна побудувати силові лінії поля для другої півчверті.

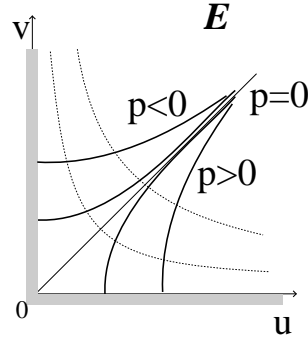


Рис. 3.12.

Відповідно до нашої програми нескладно обчислити значення компонент електричного поля:

$$\frac{d\Psi}{dz} = \frac{\partial\phi'}{\partial x} - i \frac{\partial a'}{\partial x} = -E_x + i E_y = -4\pi\sigma v - i - 4\pi\sigma u. \quad (3.68)$$

Звідки:

$$E_u = 4\pi\sigma v, \quad E_v = 4\pi\sigma u.$$

Звертаємо особливу увагу, що поряд з поставленою розв'язали ще нескінченну множину задач — треба лише користуватись «металізацією» екіпотенціальних поверхонь. Зазначимо також, що оскільки саме перетворення є суто математичним, то про фізичну відповідність найменувань необхідно потурбуватись самостійно. Так, наприклад, коректний аналіз

мали б виконувати в змінних, що не мають найменувань, а величину електричного поля віднести до множника  $2\pi\sigma$ .

### §3.5.3. Електричне поле на краю плоского конденсатора

Розглянемо більш складний та практично цікавий приклад — поле на краю плоского конденсатора [12]. Вихідним пунктом нашого розв'язку буде поле нескінченного плоского конденсатора. Цей випадок майже не відрізняється від поля нескінченної площини, отже, розв'язок можемо записати майже автоматично:

$$E_u = 0, \quad E_v = -1,$$

де знак мінус вибрано лише для зручності. Обчислюємо скалярний потенціал та функцію струму  $a$ :

$$E_u = -\frac{\partial\phi'}{\partial u} = \frac{\partial a'}{\partial v} = 0, \quad E_v = \frac{\partial\phi'}{\partial v} = \frac{\partial a'}{\partial u} = -1. \quad (3.69)$$

Тоді  $\phi' = v$ ,  $a' = u$ . Будуємо комплексний потенціал:

$$\Psi(u, v) = v - iu = -i(u + iv) = -iw. \quad (3.70)$$

Конформне перетворення виберемо у вигляді:

$$z = \frac{h}{\pi} \left( e^{\frac{\pi}{V}w} + \frac{\pi}{V}w \right) \quad (3.71)$$

Покажемо тепер, що перетворення (3.71) відображає полосу  $-V \leq \text{Im}w \leq V$ , що знаходиться в площині  $w$  на необхідну нам геометрію. Як і в попередньому випадку відокремимо дійсну та уявну частини  $z$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{h}{\pi} \left( e^{\frac{\pi}{V}u} \cos \frac{\pi}{V}v + \frac{\pi}{V}u \right), \\ y &= \frac{h}{\pi} \left( e^{\frac{\pi}{V}u} \sin \frac{\pi}{V}v + \frac{\pi}{V}v \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Знов намалюємо дві комплексні площини  $z$  та  $w$  і проаналізуємо запропоноване відображення (див. рис. 3.13). З рівностей (3.72) бачимо, що коли  $v = \pm V$ , то

$$x = \frac{h}{\pi} \left( -e^{\frac{\pi}{V}u} + \frac{\pi}{V}u \right), \quad y = \pm h.$$

Будемо рухатись у площині  $w$ , знаходячись на прямій  $u = +V$ . Почнемо зі значень  $u \rightarrow -\infty$ , тоді  $x \rightarrow +\frac{h}{\pi}u \rightarrow -\infty$ , а  $y = +h$ . Легко бачити, що зі збільшенням  $u$  величина  $x$  спочатку зростає від  $-\infty$  до  $-\frac{h}{\pi}$  (при  $u = 0$ ), а потім починає зменшуватись. Це легко побачити, якщо знайти похідну  $dx/du$ :

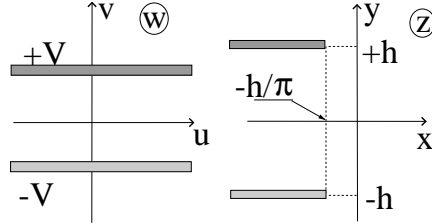


Рис. 3.13.

$$\frac{dx}{du} = \frac{h}{V} \left( -e^{\frac{\pi}{V}u} + 1 \right),$$

звідки видно, що екстремальне значення  $x$  досягає при  $u = 0$ . Тому  $x \leq -\frac{h}{\pi}$ . Інакше кажучи, лінія  $v = +V$  відображається на лінію  $y = h$ ,  $-\infty < x \leq -\frac{h}{\pi}$  «подвійним проходженням». Цілком аналогічно лінія  $v = -V$ ,  $-\infty < u < \infty$  відображається на лінію  $y = -h$ ,  $-\infty < x \leq -\frac{h}{\pi}$ . Отже бачимо, що геометрія площини  $w$  відображається потрібним чином у геометрію площини  $z$ . Залишається лише записати розв'язок задачі в нових змінних:

$$\Psi(z) = -iw(z) = -i(u + iv) = v - iu. \quad (3.73)$$

Якби конформне перетворення було записане у вигляді  $w = w(z)$ , то підставивши його в (3.73) отримали б відповідь у явному вигляді. Припустимо, що зв'язок  $w = w(z)$  нам відомий. Тоді підставивши цей вираз у (3.73) отримали б комплексний потенціал, дійсна та уявна частини якого задають рівняння

еквіпотенціалей та силових ліній. У неявному вигляді ці рівняння набувають вигляду

$$v = \text{const}, \quad u = \text{const}.$$

Ними досить просто скористатись — у першому випадку зафіксувавши значення  $v = \text{const}$  треба змінювати  $u$ , що в параметричній формі задає значення  $x = x(u, v)$  та  $y = y(u, v)$  у площині  $z$  (3.72). Аналогічно будуюмо силові лінії електричного поля  $u = \text{const}$  (див. рис. 3.14).

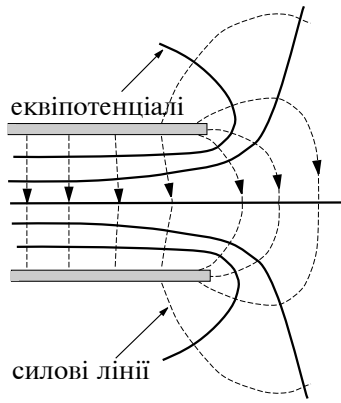


Рис. 3.14.

Обчислимо також компоненти електричного поля. Хоча явний вигляд  $\Psi(z)$  нам не відомий, проте обчислимо похідну від нього за змінною  $z$  так, наче його знаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dz} &= -i \frac{dw}{dz} = -i \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \\ &= -i \frac{V}{h} \frac{1}{1 + e^{\frac{\pi}{V}w}} = -E_x + i E_y, \end{aligned} \quad (3.74)$$

де враховано, що

$$\frac{dz}{dw} = \frac{h}{V} [1 + e^{\frac{\pi}{V}w}].$$

Подальший аналіз полягатиме в тому, щоб у формулі (3.74) замість значень  $x$  та  $y$  підставляти відповідні значення  $u$  та  $v$ , знайдені за допомогою співвідношень (3.72). Продемонструємо це, перевіривши значення поля далеко всередині конденсатора (повинно бути однорідне поле  $E_x = 0$ ,  $E_y = -V/h$ ), та на кінцях пластин (очевидно, там повинні отримати  $E_x = \pm\infty$ ,  $E_y = 0$ ).

Далеко всередині конденсатора маємо  $x = -\infty$ ,  $y = 0$  і відповідно  $u = -\infty$ ,  $v = 0$ . Тому експонента в знаменнику (3.74) прямує до нуля. Отже,

$$-E_x + i E_y = -i \frac{V}{h}, \quad E_x = 0, \quad E_y = -\frac{V}{h}. \quad (3.75)$$



Поблизу кінців пластин ( $u = 0$ ,  $v = \pm V$ ) маємо:

$$e^{\frac{\pi}{V}(0 \mp iV)} = e^{\pm i\pi} = \cos \pi \pm i \sin \pi = -1 \pm i0.$$

Цей вираз навмисне записано з уявною частиною (хоча вона й дорівнює нулеві), оскільки в знаменнику дійсні частини скоротяться і результат буде дорівнювати нулеві, але — уявному нулеві. Це принципово, тому що докорінно впливає на результат — виконавши скорочення неухважно, отримаємо дійсну нескінченність і, відповідно, помилку: нескінченне значення  $y$ -вої компоненти поля. Зберігши рівну нулеві уявну частину знаменника маємо:

$$-E_x + i E_y = -i \frac{V}{h} \frac{1}{\pm i0} = \mp \frac{V}{h} \infty,$$

$$E_x = \pm \infty, \quad E_y = 0.$$

Рівняння силової лінії, що проходить біля кінців конденсатора, має вигляд  $u = 0$ , або

$$x = \frac{h}{\pi V} \cos \frac{\pi v}{h},$$

$$y = \frac{h}{\pi} \left( \sin \frac{\pi v}{V} + \frac{\pi v}{V} \right). \quad (3.76)$$

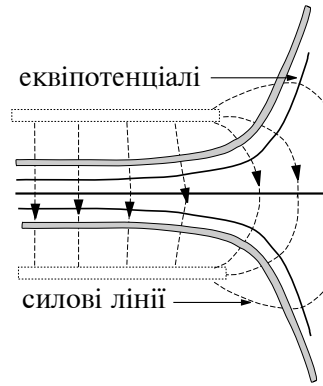


Рис. 3.15.

Силова лінія (3.76) перетинає вісь  $y = 0$  у точці  $x = +h/\pi$ . Отже, характерний розмір, на який поле «виходить» за межі конденсатора дорівнює  $2h/\pi$ . При цьому на його краях напруженість поля необмежено зростає.

Якщо побудувати конденсатор, пластини якого мають форму екіпотенціалів  $v = \pm V/2$ , то напруженість поля для нього не зростає необмежено, як для плоского, а, навпаки, зменшується. Називається він *конденсатором Роговського*.

Для того, щоб розрахувати форму пластин (жирні лінії на рис. 3.15), скористуємось виразами (3.72):

$$x = \frac{h}{V} u, \quad y = \pm \frac{h}{\pi} \left( e^{\pi u/V} + \frac{\pi}{2} \right),$$

звідки

$$y = \pm \left( \frac{h}{2} + \frac{h}{\pi} e^{\pi x/h} \right).$$

### §3.6. Поле електростатичної системи на далеких відстанях

Розглянемо електростатичне поле системи на відстанях, що набагато перевищують характерні розміри системи, де зосереджені заряди та струми, тобто

$$\frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} \ll 1,$$

де, як звичайно, позначено  $\mathbf{r}$  — відстань від початку координат (який вибираємо всередині системи) до точки спостереження,  $\mathbf{r}'$  — відстань від початку координат до точки знаходження заряду. Нам буде зручно розглянути випадок точкового розподілу зарядів у системі. Тоді вираз для потенціалу —

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|}. \quad (3.77)$$

Цей вираз ми розкладемо в ряд, використовуючи нерівність  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'_i|$ . Нагадаємо, що для функції трьох змінних розв'язання в ряд Тейлора має вигляд:

$$\begin{aligned} f(x_\alpha + \Delta x_\alpha) &= f(x_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \Delta x_\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Delta x_\alpha \Delta x_\beta + \dots, \end{aligned} \quad (3.78)$$

де користуємось позначенням  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ . У нашому випадку малим параметром є відстань до точки знаходження заряду, узята з протилежним знаком,  $\Delta x_\alpha \equiv -x'_\alpha$ .

Для того, щоб розкласти функцію

$$f \equiv \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

за степенями відношення  $|\mathbf{r}'|/|\mathbf{r}|$ , обчислимо спочатку похідні першого та другого порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = - \frac{(x_\alpha - x'_\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Big|_{\mathbf{r}'=0} = - \frac{x_\alpha}{r^3}. \quad (3.79)$$

Обчислимо похідні другого порядку. Спочатку за координатою  $x_\alpha$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2} = \left[ -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2(x_\alpha - x'_\alpha)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right]_{\mathbf{r}'=0} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x_\alpha^2}{r^5}.$$

Обчислимо також мішану похідну,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2(x_\alpha - x'_\alpha)(x_\beta - x'_\beta)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \Big|_{\mathbf{r}'=0} = \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} \quad \alpha \neq \beta.$$

Ці два вирази можна об'єднати у формулу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3}. \quad (3.80)$$

Тепер можемо скласти ряд Тейлора в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} + \sum_{\alpha=1}^3 \left( -\frac{x_\alpha}{r^3} \right) (-x'_\alpha) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \left( \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} \right) (-x'_\alpha) (-x'_\beta) + \dots = \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 (3x'_\alpha x'_\beta - \delta_\alpha^\beta r'^2) x_\alpha x_\beta + \dots \end{aligned} \quad (3.81)$$

Одержаний ряд Тейлора підставимо у вираз для потенціалу (3.77):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \dots \quad (3.82)$$

Означення величин  $Q$  — повний заряд системи,  $\mathbf{d}$  — дипольний момент і  $D_{\alpha\beta}$  — квадрупольний момент (див. табл. 3.3). У правій колонці знаходяться означення тих самих величин для випадку неперервного розподілу зарядів. У рядках розміщені відповідно: 1 — повний заряд системи, 2 — дипольний момент, 3 — квадрупольний момент. З одержаного розкладу (3.82) бачимо, що кожний наступний доданок зменшується відносно попереднього на величину  $|\mathbf{r}'|/|\mathbf{r}|$  (відношення: розмір системи / відстань до точки спостереження). Тобто на значних відстанях від системи внесок у поле дають лише кілька перших доданків ряду. Якщо  $Q \neq 0$ , то головний внесок у поле має перший доданок — потенціал системи на великих відстанях діє як потенціал точкового заряду величиною  $Q$ . Якщо  $Q = 0$ , то головний внесок має дипольний момент:

$$\phi_d = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3}. \quad (3.83)$$

У цьому випадку поле знаходимо звичайним чином:

$$\mathbf{E}_d = -\text{grad} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3} = -\frac{\mathbf{d}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})\mathbf{r}}{r^5} = -\frac{\mathbf{d} - 3\mathbf{n}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})}{r^3}, \quad (3.84)$$

де  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$  — одиничний вектор, спрямований на спостерігача. Означення дипольного моменту (а також і квадрупольного) у загальному випадку залежать від вибору системи координат. Проте можна показати, що якщо  $Q = 0$ , то дипольний момент не залежить від вибору початку відліку. Якщо  $Q = 0$  і  $\mathbf{d} = 0$ , то головний внесок у поле має квадрупольний момент. Можна показати, що в цьому разі його величина не залежить від вибору початку відліку. Зауважимо, що введене означення тензора квадрупольного моменту не єдине можливе. Тензор квадрупольного моменту ми ввели таким чином,

Таблиця 3.3. Означення перших мультипольних моментів

	Дискретний розподіл зарядів	Неперервний розподіл зарядів
1	$Q = \sum_{i=1}^n q_i$	$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dV'$
2	$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i$	$\mathbf{d} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'$
3	$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n q_i (3x'_{\alpha i} x'_{\beta i} - \delta_{\alpha\beta} r_i'^2)$	$D_{\alpha\beta} = \int_V \rho(\mathbf{r}') (3x'_{\alpha} x'_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} r'^2) dV'$

що сума його діагональних елементів дорівнює нулеві. Симетричний тензор квадрупольного моменту, визначений згідно з табл. 3.3, має лише 5 незалежних компонент.

Для того, щоб одержати наступні доданки розвинення в ряд, звичайно використовують іншу процедуру. Розкладають потенціал у ряд за поліномами Лежандра, оскільки безпосереднє розвинення в ряд Тейлора проводити досить важко.

Розглянемо тепер електростатичну систему в зовнішньому полі. Нехай  $\phi_{\text{ext}}$  позначає потенціал цього поля. Припустимо, що зовнішнє поле майже не змінюється в об'ємі, де знаходяться заряди. Тоді можливо розкласти його в ряд за малим параметром  $|\mathbf{r}'|/|\mathbf{r}| \ll 1$ ,

$$\phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) = \phi_{\text{ext}}|_{r=0} + \mathbf{r}_i \cdot \text{grad} \phi_{\text{ext}}|_{r=0} + \dots = \phi_0 - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}_0 + \dots,$$

де через  $\phi_0$  і  $\mathbf{E}_0$  позначено потенціал і напруженість зовнішнього поля в початку координат.

Тоді повна потенціальна енергія системи зарядів у цьому полі дорівнює

$$\mathcal{E} = Q\phi_0 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 + \dots \quad (3.85)$$

### §3.7. Поле магнітостатичної системи на далеких відстанях

Зрозуміло, що аналогічне розвинення в ряд можемо написати також і для векторного магнітного потенціалу.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \\ &= \frac{1}{rc} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{cr^3} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') dV' + \dots \end{aligned} \quad (3.86)$$

У виразі (3.86) ураховано лише два перші доданки ряду (3.81). Це пов'язано з тим, що для магнітостатичних задач поряд із малим параметром  $|\mathbf{r}'|/|\mathbf{r}|$  у знаменнику присутній також множник  $c$ , що суттєво зменшує внесок цих доданків.

Інтуїтивно зрозуміло, що для замкненого об'єму, з яким ми працюємо, перший доданок повинен дорівнювати нулеві. Формально це можна побачити, якщо розбити струм на нескінченно тонкі замкнені трубки (лінійні кильцеві струми). Уздовж кожної такої трубки лінійний інтеграл по замкненому контуру дорівнює нулеві. Отже, дорівнює нулеві також і сума цих інтегралів. У другому інтегралі зробимо деякі перетворення, щоб привести його до певного вигляду. Спочатку будемо розглядати лише підінтегральний вираз у (3.86), переписавши його в симетричному вигляді:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \frac{1}{2} \left( \mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \right) + \frac{1}{2} \left( \mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \right)$$

Третій та четвертий доданок у цій формулі легко привести до вигляду:

$$\frac{1}{2} \left( \mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \right) = - \left[ \mathbf{r} \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}] \right].$$

А два перші доданки, як ми зараз покажемо, при інтегруванні дадуть нуль. Для цього домножимо їх скалярно на деякий постійний (але довільний) вектор  $\mathbf{b}$  і виконаємо низку

нескладних перетворень:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \left( \mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \right) &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{j})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \\ &= \mathbf{j} \cdot \left( \mathbf{b}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}) \right) = \mathbf{j} \cdot \left( (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \text{grad}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{b}) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{b}) \text{grad}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \right) = \mathbf{j} \cdot \text{grad}' \left( (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{b}) \right), \end{aligned} \quad (3.87)$$

У (3.87) штрих біля значка градієнта означає диференціювання за координатами точок, де зосереджені заряди. У (3.87) використано також просту рівність (в який не раз пересвідчувались)  $\text{grad}'(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}') = \mathbf{b}$ . Далі скористаємось формулою (1.5), яка приводить до

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \text{grad}' \left( (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{b}) \right) &= \text{div}' \left( \mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{b}) \right) - \\ &\quad - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{b}) \text{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Другий доданок у цьому виразі дорівнює нулеві, тому що згідно із законом збереження заряду для статичних полів  $\text{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ . Вираз, що залишився підставимо до інтеграла (3.86):

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \int_V \left( \mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \right) dV' &= \int_V \text{div}' \left( \mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{b}) \right) dV' \\ &= \oint_S j_n(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{b}) dS' = 0. \end{aligned}$$

В останній рівності ми скористались формулою Остроградського — Гаусса і перейшли від інтегрування по об'єму до інтегрування по замкненій поверхні. Крім того, оскільки за межами об'єму  $V$  струмів і зарядів немає, то нормальна компонента густини струму на поверхні  $S$ , що оточує об'єм  $V$ , повинна дорівнювати нулеві. Таким чином, в основному наближенні векторний потенціал магнітостатичного поля (3.86) набуває вигляду

$$\mathbf{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad \text{де} \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] dV'. \quad (3.89)$$

Користуючись цим виразом знаходимо, що магнітне поле

$$\mathbf{B} = \text{rot} \frac{[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\mu}]}{r^3} = -\frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\mu})\mathbf{r}}{r^5} = -\frac{\boldsymbol{\mu} - 3\mathbf{n}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})}{r^3}, \quad (3.90)$$

де  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$  — одиничний вектор, спрямований на спостерігача. Величина  $\boldsymbol{\mu}$  має назву *магнітний дипольний момент*. Якщо ввести поняття магнітного моменту одиниці об'єму, то обидві частини (3.89) треба поділити на  $V$ . Для елемента струму, очевидно, повинні записати

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c}[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')].$$

Зараз покажемо, що одержаний результат є узагальнення добре відомого означення  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{n} \cdot IS/c$ . Для цього розглянемо плоске коло струму довільної форми. Оскільки є лише кільцевий струм, то маємо замінити

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV' \rightarrow Idl'$$

і вираз для магнітного моменту (3.89) переходить у:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{I}{2c} \oint [\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}']. \quad (3.91)$$

Векторний добуток має напрям перпендикулярний до площини співмножників (тобто перпендикулярно до площини кола), а абсолютна величина диференціала є елемент площі. Отже, після інтегрування одержимо вектор перпендикулярний до площини струму, а за величиною вдвічі більший від площі цього кола, а саме:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{IS}{c}\mathbf{n}. \quad (3.92)$$

Розглянемо магнітний момент у зовнішньому однорідному магнітному полі  $\mathbf{B}_0$  та знайдемо енергію взаємодії магнітного



диполя з полем. Векторний потенціал цього поля, згідно з (2.19), дорівнює

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} [\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}],$$

а функція Лагранжа (2.15), у порівнянні з функцією Лагранжа замкненої системи, відповідно

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{c} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{2c} [\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}] \cdot \mathbf{v} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{2c} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] \cdot \mathbf{B}_0 = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_0. \end{aligned}$$

Відповідно повна енергія взаємодії магнітного диполя із зовнішнім полем

$$\mathcal{E} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_0. \quad (3.93)$$

Означення магнітного моменту (3.89) сформульовано для неперервного розподілу струмів. Якщо магнітне поле створюється завдяки руху окремих частинок (дискретний розподіл), то означення (3.89) переходить у:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \times \mathbf{j}_i] = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^n q_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i], \quad (3.94)$$

де в правій частині рівності враховано, що одна частинка при своєму русі створює густину струму  $\mathbf{j}_i = q_i \mathbf{v}_i$ . Нехай усі частинки системи мають однакове відношення  $q_i/m_i$ , тоді поділивши та домноживши на масу  $m$  під знаком суми, та пригадавши означення механічного моменту системи  $\mathbf{L} = \sum m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i]$ , одержимо:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m_e c} \mathbf{L} = \gamma \mathbf{L}, \quad \text{де позначено } \gamma = \frac{q}{2m_e c}, \quad (3.95)$$

а величина  $\gamma$ , так зване *гіромагнітне відношення* (тут для орбітального руху). Ці співвідношення — не просто математичні вправи. Пропорційність механічного та магнітного моментів перевірялась експериментально. У 1909 році С. Барнетт

(S. Barnett, 1909) визначив, що при швидкому обертанні ферромагнітних зразків збільшується їх магнітний момент [21, с. 382]. У повній відповідності до формули (3.95) — збільшується  $\mathbf{L}$  і відповідно збільшується  $\boldsymbol{\mu}$ . Перевірялось також і зворотне співвідношення — збільшення механічного моменту при намагнічуванні зразка (збільшується  $\boldsymbol{\mu}$  відповідно зростає і  $\mathbf{L}$ ). Ці експерименти були виконані А. Ейнштейном і В. де Гаазом (A. Einstein, W. J. de Haas, 1915) [22, т. 2, с. 700]<sup>1</sup>. Одиницею виміру магнітного моменту (він має спеціальну назву *магнетон*)  $e\hbar/mc = eH_0/mc \cdot \hbar/H_0 \in [1/\text{с} \cdot \text{ерг} \cdot \text{с}/\text{Гс}]$ . Тобто найменування магнетона — [ерг/Гс]. При знаходженні найменування використано константу  $H_0$ , яка має називається напруженість магнітного поля, оскільки добре відомо, що  $eH_0/mc$  вимірюється в [1/с]. У системах атомної фізики, де суттєву роль відіграють електрони, одиницею виміру магнітного моменту є *магнетон Бора*:

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e c} = 0.9274 \cdot 10^{-20}, \quad \frac{\text{ерг}}{\text{Гс}},$$

де  $m_e$  — маса електрона. Тобто магнітний момент електрона  $\mu_e = -\mu_B$ . В ядерній фізиці як одиницю виміру використовують *ядерний магнетон*:

$$\mu_{\text{нuc}} = \frac{|e|\hbar}{2m_p c} = 5.0508 \cdot 10^{-24}, \quad \frac{\text{ерг}}{\text{Гс}},$$

де  $m_p$  — маса протона. Відмітимо, що ядерний магнетон приблизно в 2000 разів менший від електронного (маса протона в 2000 разів більша маси електрона).

---

<sup>1</sup>Варто звернути увагу, що в дійсності в цих експериментах аналізувалось співвідношення між власним механічним (спіном) і власним магнітним (магнетон) моментами (можливо, що самі виконавці цього не підозрювали), див. Савельєв, т. 2, с. 159.

## Глава 4

# Магнетизм

### §4.1. Гіромагнітне відношення

У 1925 р. Дж.Уленбек та С.Гаудсміт запропонували концепцію власного механічного моменту електрона, яку назвали *спіном*. Вимірюється спін у одиницях *сталой Планка*  $\hbar$ . Нагадаємо, що найменування сталої Планка [єрг·с].

Якщо гіромагнітне відношення справедливе для орбітального руху, то природно припустити, що воно справджується і для власного механічного моменту. Так воно і є — виявляється, що електрон (та кожна елементарна частинка) має «від народження» не лише власний механічний момент, але також і власний магнітний момент, який пов'язаний із ним співвідношенням

$$\boldsymbol{\mu} = 2 \cdot \frac{q}{2m_e c} \mathbf{L}. \quad (4.1)$$

Отже, для електрона гіромагнітне співвідношення з погляду класичної електродинаміки є аномальним (вдвічі більше орбітального). А якщо бути зовсім точним, то у

$$2 \times 1.001159652188(4)$$

разів [22, т. 2, с. 319]. Наведене значення — результат сучасних експериментальних вимірів. Цікавий результат дає порівняння з теоретично обчисленим значенням.

Ураховуючи взаємодію електрону з нульовими флуктуаціями вакууму (нульовий стан електромагнітного поля), Швінгер (1948) обчислив перше теоретичне значення магнетону:

$$\mu_{\text{theor}} = \mu_B \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} \right], \quad (4.2)$$

Таблиця 4.1. Гіромагнітні відношення та магнітні моменти для деяких елементарних частинок

Назва частинки	Для орбітального руху	Для власних моментів	
		Гіромагнітне відношення	Магнітний момент
Електрон	$\gamma = -\frac{ e \hbar}{2m_e c}$	$\gamma = -2\frac{ e \hbar}{2m_e c}$	$\mu_e = -2 \cdot \mu_B$
Протон	$\gamma = \frac{ e \hbar}{2m_p c}$	$\gamma = 2.79\frac{ e \hbar}{2m_p c}$	$\mu_p = 2.79 \cdot \mu_{nuc}$
Нейтрон	Не створює орбітального струму	$\gamma = -1.91\frac{ e \hbar}{2m_n c}$	$\mu_n = -1.91 \cdot \mu_{nuc}$

де  $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$ , так звана *стала тонкої структури*. Наступний доданок знайшов К.Зомерфельд (1958, звернемо увагу, що для цього знадобилось десять років):

$$\mu_{\text{theor}} = \mu_B \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} - 0.328 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \right]. \quad (4.3)$$

Треба сказати, що то досить складні розрахунки, які виконуються на основі квантової електродинаміки. Настільки складні, що виконати їх руками майже неможливо. Сучасний теоретичний результат було отримано, лише коли досягли необхідного рівня потужності обчислювальної техніки та математичне забезпечення апарату аналітичних обчислень на ЕОМ.

Сучасний теоретичний результат має вигляд:

$$\mu_{\text{theor}} = \mu_B \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} - 0.328478 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + 1.184175 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^3 \right], \quad (4.4)$$

Щоб було краще порівняти, запишемо експериментальне та теоретичне значення для гіромагнітного співвідношення одне під другим:

$$\left| \begin{array}{l} \gamma_{\text{exper}} = 2 \times 1.001159652188(4) \\ \gamma_{\text{theor}} = 2 \times 1.001159652306(111) \end{array} \right|. \quad (4.5)$$

Це на сьогоднішній день рекордний результат. А тепер нагадаємо, що відправна точка — взаємодія елементарної частинки з нульовими коливаннями вакууму. Така взаємодія приводить до цілком спостережуваних ефектів, відомих у атомній фізиці (надтонка структура рівнів енергії атома водню — лембівський зсув та ін.).

## §4.2. Рівняння руху магнітного моменту

Друге питання, яке важко оминати при згадці про власний магнітний момент — рівняння руху магнітного моменту.

Існують тверді тіла, які при відсутності магнітного поля мають значні значення намагнічування, тобто в цих речовинах існують невеличкі області (*домени*, характерні розміри яких  $10^{-2} - 10^{-4}$  см), в яких намагнічування дорівнює намагнічуванню насичення. Таки тіла називають *феромагнетиками*. Фізичною причиною цього явища є так звані *обмінні сили*. У дійсності це не є новий клас сил. Справа в тому, що повна енергія системи електронів, відповідно до квантової механіки, може залежати від значення повного спіну. Про цю обставину говорять як про обмінну взаємодію. Розглянемо як приклад об'єднання двох атомів водню в молекулу. У кожному з атомів електрон має власний механічний момент (спін) і, відповідно, пропорційний йому магнітний момент (4.1). Спінні моменти протона можемо не враховувати, оскільки значення їх принаймні у 2000 разів менші. При

об'єднанні двох атомів у молекулу спіни (магнітні моменти) можуть розташуватись паралельно або антипаралельно один до одного. Якщо уявити паралельну орієнтацію спінів (спінова частина хвильової функції парна), то координатна частина має бути непарною і навпаки — при антипаралельній орієнтації спінів (спінова частина хвильової функції непарна) координатна її частина повинна бути парною. Парність чи непарність координатної частини означає, що електронна хмара в першому випадку розташована у центрі і до неї притягуються два протони; у другому — симетрично відносно початку координат розташовані два протони, а ще далі два електрони з паралельними спінами. Без обчислень зрозуміло, що другий варіант енергетично менш вигідний, ніж перший. Точні розрахунки показують, що енергія системи в першому випадку менша, ніж у другому. Підкреслимо ще раз, що нічого крім кулонової взаємодії та принципу заборони Паулі ми не використовували. Однак якісно показали, що енергія системи залежить від значення повного спіну. Це означає, що в межах одного домену спінові магнітні моменти атомів міцно зчеплені між собою — утворюють міцну «магнітну ґратку». Якщо ми почнемо «ворушити» один з магнітних моментів, то це збурення відчують також і всі інші магнітні моменти. Тобто магнітні моменти утворюють неперервне магнітне поле. А яке рівняння описує рух цього поля? Виявляється, що до 1935 р. це рівняння було невідомим (нагадаємо, спін було відкрито в 1925 р.).

Інтуїтивно зрозуміло, що поле магнітного моменту  $\mathbf{M}$  буде взаємодіяти із зовнішнім магнітним полем. Це приведе до того, що зміниться намагніченість  $\mathbf{M}$ , отже, зміниться і створена ним частина повного магнітного поля. Але це знов приведе до зміни конфігурації моменту  $\mathbf{M}$  і така взаємозалежність буде продовжуватись. Тобто рух магнітного моменту призводить до зміни магнітного поля, а це, у свою чергу, змінює геометрію магнітного моменту і тощо. Зрозуміло, що цей рух має описуватись математично.

Спочатку наведемо міркування якісного характеру. Нагадаємо, що абсолютне значення (довжина) вектора намагніченості формується за рахунок обмінної взаємодії, а напрям цього вектора визначається релятивістськими ефекта-

ми. Вплив останніх пропорційний відношенню  $v^2/c^2$ . Тому з хорошим наближенням можемо вважати, що вектор намагніченості має постійну довжину, але може обертатись навколо початку координат. Рух цього вектора буде нагадувати рух механічної дзиги, оскільки так само як і на дзигу на магнітний момент  $\mathbf{M}$  у магнітному полі  $\mathbf{H}$  діє момент сил [16, т. 3, с. 243]

$$\mathbf{N} = [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]. \quad (4.6)$$

Легко бачити, що напрям дії моменту сил на магнітний момент приводить до такої ж прецесії навколо напрямку зовнішнього магнітного поля, як і дія механічного моменту на механічну дзигу в полі сили тяжіння. У дійсності, явище спіну є суто квантовим, але деякий час намагались пояснити наявність власного механічного моменту електрону обертанням його навколо своєї осі. Від такого уявлення давно відмовились через те, що власний механічний момент надано електрону «від народження» і не пов'язано ні з яким обертанням. Але для побудови рівняння ці міркування будуть нам корисні. Рівняння руху «спінового» моменту повинно мати зовнішній вигляд такий як і (3.95):

$$\frac{d}{dt} [\text{механічний момент}] = [\text{момент сили}].$$

Момент сили, який діє на магнітний диполь, нам відомий і дорівнює (4.6). А «механічний момент» можемо виразити через магнітний момент, використовуючи гіромагнітне відношення (4.1). Отже, матимемо:

$$\frac{1}{-\frac{e\hbar}{m_e c}} \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}]. \quad (4.7)$$

Та це поки-що навіть не рівняння, тому що в нього ввійшов власний магнітний момент, а не намагніченість. Для того, щоб написати рівняння для магнітного моменту, треба чітко усвідомити, як він створюється. За означенням намагніченість є магнітний момент одиниці об'єму. Отже, оскільки цей магнітний момент складається з суми власних магнітних

моментів окремих атомів, то ми повинні для нашої задачі визначити величину нескінченно малого фізичного об'єму, взяти суму магнітних моментів у цьому об'ємі й поділити результат на об'єм нескінченно малого фізичного об'єму. Тобто:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\mu}_i, \quad (4.8)$$

де  $N$  — кількість елементарних магнітів, що знаходяться в нескінченно малому фізичному об'ємі. Для оцінки об'єму визначимо як куб із ребром  $10^{-6}$  см. Цей вибір обумовлений тим, що в такому об'ємі, з одного боку, буде багато елементарних магнітних моментів (магнітні моменти знаходяться у вузлах просторової ґратки і відстань між ними  $10^{-8} - 10^{-7}$  см), а з іншого — розміри цього об'єму набагато менші за характерні розміри задачі (розмір окремого домену, як ми вже відмічали,  $10^{-2} - 10^{-4}$  см).

Використаємо цю операцію взяття суми до рівняння (4.7). Очевидно, що підсумовування комутує з диференціюванням за часом і векторним множенням. Матимемо:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}], \quad \gamma = -\frac{|e|}{m_e c}. \quad (4.9)$$

Проте це все ще не є рівняння руху магнітного моменту. Воно має дві очевидні вади — у нього входить повна похідна за часом, що добре лише для задач класичної механіки (у механіці є лише одна незалежна змінна — час) і, крім того, воно записано таким чином, наче елементарні магнітні моменти не взаємодіють один з одним через те, що в рівняння входить тільки зовнішнє магнітне поле.

У класичній механіці, оскільки всі величини залежать лише від часу, використовують повну похідну. А в даному випадку через наявність векторного поля маємо чотири незалежні змінні — час  $t$  і радіус-вектор  $\mathbf{r}$ . Тому в рівнянні (4.9), принаймні, повинні замінити повну похідну на частинну. Крім того, магнітне поле, створюване всією системою магнітних моментів, безумовно, впливає на окремий момент цього ан-



самблю, отже у векторному добутку повинні також урахувати не тільки зовнішнє поле, але й усі інші магнітні поля, створені за рахунок різних фізичних процесів. Отже, замість зовнішнього магнітного поля слід писати деяке ефективне поле  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ , яке в загальному випадку не є однорідним, а залежить від значення намагніченості в даній точці простору. Для обчислення цього поля пригадаємо, що енергія елементарного магнітного моменту в зовнішньому полі  $\mathbf{H}$  згідно з (3.93) дорівнює

$$W = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}.$$

Якщо відомо вираз для енергії як функції намагніченості,  $W = W(\mathbf{M})$ , поле можна обчислити як

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{M}}. \quad (4.10)$$

Нехай відомо вираз для повної енергії системи магнітних моментів,

$$\mathcal{E} = \int dV W(\mathbf{M}). \quad (4.11)$$

У цьому виразі залежність повної енергії від намагніченості є функціоналом, а не функцією. Тобто для обчислення поля слід узяти функціональну, тобто варіаційну похідну:

$$\mathbf{H} = -\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{M}}. \quad (4.12)$$

Зауважимо, що результати обчислення  $\mathbf{H}$  у виразах (4.10) і (4.12) збігаються тільки для просторово-однорідного розподілу намагніченості, тобто коли густина енергії залежить тільки від значення  $\mathbf{M}$ . Але, як ми побачимо нижче, ситуація може бути значно складнішою — густина повної енергії магнетика, що зумовлена впливом різноманітних процесів, залежить не тільки від значення компонент намагніченості в точці, а також і просторових похідних.

$$W = W \left( M_i, \frac{\partial M_i}{\partial x_j} \right). \quad (4.13)$$

Нагадаємо, що в цьому випадку варіаційна похідна обчислюється за правилом:

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta M_i} = \frac{\partial W}{\partial M_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial W}{\partial \left( \frac{\partial M_i}{\partial x_j} \right)}. \quad (4.14)$$

Остаточно можемо записати рівняння руху магнітного моменту:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}], \quad \mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{M}}. \quad (4.15)$$

Це рівняння було вперше написано в 1935 р. Його називають *рівнянням Ландау—Лівшиця*. До цього рівняння треба обов'язково написати вираз для енергії системи магнітних моментів  $\mathcal{E}$ . Для кожної окремої моделі відповідний вираз треба визначати окремо. Ще раз наголосимо, що ці якісні міркування ні в якому разі не можна вважати доведенням. Основна робота з «доведення» рівняння починається після того, як воно буде написано, і відбувається одночасно у двох напрямках: намагання одержати це рівняння, базуючись на більш простих принципах (зокрема, для даного випадку, на принципах квантової механіки) і, що більш суттєво, порівняння результатів розв'язку цього рівняння з експериментальними даними. Пройшло вже більше 60-ти років, проте рівняння Ландау—Лівшиця перевірку часом витримало. Воно добре описує світ магнітних явищ. На його основі було пояснено всі експериментальні результати, відомі до 1935 р., а також передбачено фізичні результати, які знайшли надалі експериментальне підтвердження. Це і є основний аргумент на користь рівняння Ландау—Лівшиця.

А тепер розглянемо декілька простих прикладів, щоб упевнитись, що це рівняння дає необхідні результати.

#### §4.2.1. Ларморова прецесія

Знехтуємо всіма видами взаємодії між елементарними магнітами і залишимо лише зовнішнє магнітне поле, спрямоване

вздовж осі  $z$  (див. рис. 4.1). Рівняння руху в проєкціях на осі декартової системи координат матиме вигляд:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = \gamma M_y H_0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma M_x H_0, \quad \frac{\partial M_z}{\partial t} = 0. \quad (4.16)$$

Ці рівняння мають очевидний розв'язок:

$$M_x = M_{\perp} \sin \omega_L t, \quad M_y = M_{\perp} \cos \omega_L t, \quad M_z = M_{\parallel},$$

де  $\omega_L = \frac{|e|H_0}{m_e c}$  та  $M_{\perp}^2 + M_{\parallel}^2 = M_0^2$ . (4.17)

Як бачимо, у всьому просторі спіни синхронно обертаються навколо напрямку зовнішнього магнітного поля з частотою  $\omega_L$ . Цей ефект має назву *ларморової прецесії* спінів. Частота обертання

$$\omega_L = |e|H_0/m_e c$$

називається при цьому *ларморовою частотою*. Зазначимо, що термін «ларморова прецесія» використовують також для орбітального руху заряджених частинок. Частота відповідного руху вдвічі більша за частоту спінового завдяки тому, що гіромагнітне відношення також вдвічі більше.

Ларморова прецесія є виродженим випадком спінової хвилі:  $k \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $v_{ph} \rightarrow \infty$ . Якби ми врахували взаємодію між окремими диполями, то з'явилось би запізнення (це зробимо пізніше), прецесія перестала б бути синхронною, за таких умов коливання перетворилося б на хвилю:  $k \neq 0$ ,  $\lambda < \infty$ ,  $v_{ph} < \infty$ .

Розглянутий випадок є найпростішим з можливих, нам практично вдалось обійтись без певного вигляду енергії взаємодії спінів. Для того, щоб робити розрахунки для найпростіших магнітних моделей, треба врахувати хоча б обмінну енергію і диполь-дипольну взаємодію.



Рис. 4.1.

### §4.2.2. Енергія обмінної взаємодії

Структуру виразу для енергії обмінної взаємодії будуватимемо, виходячи із симетрії системи. Зрозуміло, що енергія взаємодії повинна залежати від намагніченості  $\mathbf{M}$ : вираз енергії може містити вектор намагніченості лише в парних степенях  $(2, 4, 6, \dots)$  і не може містити в собі непарні степені  $\mathbf{M}$   $(1, 3, 5, \dots)$ . Це пов'язано з тим, що при інверсії часу енергія не повинна змінюватись. Звичайно інверсія в даному випадку розуміється як формальна заміна  $t \rightarrow -t$ , але відомо, що всі фізичні рівняння таку інверсію допускають<sup>1</sup>. Це означає, що якщо деяка фізична система може еволюціонувати в додатному напрямі  $t$ , то її можна також «запустити» в зворотному напрямі. При цьому вона буде в оберненому порядку проходити всі ті стани, в яких перебувала при русі в прямому напрямі. Очевидно, що ті величини, які містять час у першому степені при такому зворотному русі поміняють свій знак. Це, наприклад швидкість, імпульс, момент імпульсу і магнітний момент. Отже, потрібно вибирати вирази для енергії з парними степенями  $\mathbf{M}$ .

Випишемо приклади доданків, які можна було б розглядати як потенціальних претендентів на вираз для обмінної енергії

$$M^2, \quad \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}, \quad \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2, \quad \mathbf{M} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2}.$$

Усі ці вирази містять намагніченість у парних степенях<sup>2</sup>. Про перший з цих доданків одразу можна сказати, що право на існування він має, але ніякого внеску в рівняння руху не дасть, оскільки повний квадрат вектора намагніченості є стала величина. Якщо стан однорідний — усі спіни повернулись у один бік і довжина кожного спіну є величина незмінна, то й

<sup>1</sup>Нагадаємо, що винятком з цього правила є система в зовнішньому магнітному, де згідно з (2.22) обернений процес можливий у полі з протилежним напрямом поля.

<sup>2</sup>Для того, щоб не переобтяжувати запис індексними позначеннями, всі вирази записано для випадку однієї просторової змінної. Узагальнення для більшої кількості координат не становить яких небудь складнощів.

векторна сума всіх цих спінів є вектор постійної довжини. З цієї причини не дасть внеску в рівняння руху і другий доданок, тому що він дорівнює повній похідній від квадрата вектора намагніченості. Вже з цих міркувань стає зрозумілим, що однорідний стан вектора намагніченості не впливає на рівняння руху. Внесок у рівняння руху можуть давати лише неоднорідні стани.

Третій доданок з деяким коефіцієнтом якраз і дорівнює енергії обмінної взаємодії:

$$W_e = \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right)^2, \quad (4.18)$$

де  $\alpha$  має назву *сталого неоднорідного обміну*. При запису (4.18) скористались очевидним узагальненням на випадок декількох координат.

Четвертий вираз, як неважко показати, зводиться до третього:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2},$$

і тому його внесок приведе лише до перевизначення константи  $\alpha$ . Константу неоднорідного обміну можна обчислювати, але набагато частіше її значення беруть з експерименту. Ми будемо користуватись виразом для енергії неоднорідного обміну у вигляді (4.18). Фізичні міркування (незмінність величини векторів власних магнітних моментів), а також безпосередній вигляд виразів показує, що обмінна енергія визначає лише довжину вектора намагніченості, але не визначає його напрямку. Вона інваріантна відносно однорідних поворотів у спіновій підсистемі. Дійсно, при повороті всіх спінів на деякий кут не змінюються кути між окремими атомними спінами (отже, незмінними лишаються добутки  $\mathbf{s}_i \mathbf{s}_k$ ) і енергія системи не змінюється. Це мабуть природно, тому що обмінна взаємодія, як ми казали, — це кулонова взаємодія.

Виділений напрям у системі спінів задається більш слабкими (релятивістськими) взаємодіями. Для нашої мети цілком достатньо врахувати диполь-дипольну взаємодію.

### §4.2.3. Енергія диполь-дипольної взаємодії

Розглянемо спочатку взаємодію двох магнітних диполей  $\mu_1$  і  $\mu_2$ . Кожен з цих магнітних моментів створює в точці, де знаходиться його партнер поле величиною (3.90).

Наприклад, поле магнітного моменту  $\mu_2$  у точці  $\mathbf{r}_1$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) = -\frac{\mu_2 - 3\mathbf{n}_{12}(\mu_2 \cdot \mathbf{n}_{12})}{r_{12}^3}.$$

Енергія взаємодії двох магнітних диполей, що розташовані в точках 1 і 2, згідно з (3.93) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} W_a &= -(\mu_1 \cdot \mathbf{B}_2) = \\ &= \frac{(\mu_1 \cdot \mu_2) - 3(\mu_1 \cdot \mathbf{n}_{12})(\mu_2 \cdot \mathbf{n}_{12})}{r_{12}^3}. \end{aligned}$$

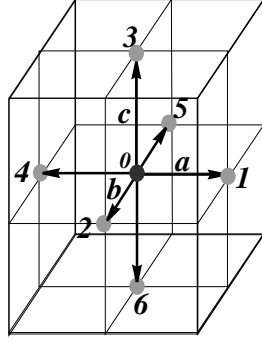


Рис. 4.2.

Розглянемо тепер спіни в кристалічній ґратці, як показано на рис. 4.2. Енергія диполь-дипольної взаємодії дається виразом

$$W_a = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{(\mu_i \cdot \mu_j) - 3(\mu_i \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mu_j \cdot \mathbf{n}_{ij})}{r_{ij}^3}. \quad (4.19)$$

Для оцінки обчислимо енергію взаємодії окремого (центрального) магнітного моменту з найближчими сусідами. Простий розрахунок дає

$$W_a = \mu^2 \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) - 3 \left( \frac{\mu_x^2}{a^3} + \frac{\mu_y^2}{b^3} + \frac{\mu_z^2}{c^3} \right). \quad (4.20)$$

Неважко зрозуміти, що перший доданок у виразі для енергії можемо не враховувати, тому що він пропорційний квадрату намагніченості (це стає очевидним після множення на кількість диполів у фізично нескінченно малому об'ємі та ділення

на величину цього об'єму). Другий доданок (із знаком мінус) після осереднення за таким самим правилом (4.8) зводиться до вигляду

$$W_a = -\frac{1}{2} (\beta_1 M_x^2 + \beta_2 M_y^2 + \beta_3 M_z^2), \quad (4.21)$$

де введено позначення:

$$\beta_1 = \frac{3V_0}{Na^3}, \quad \beta_2 = \frac{3V_0}{Nb^3}, \quad \beta_3 = \frac{3V_0}{Nc^3}.$$

Якщо врахувати віддалених сусідів, то функціональна залежність (4.21) не змінюється, проте значення констант  $\beta_i$  трохи змінюються. Проте, це не містить якихось труднощів, оскільки значення цих констант все одно беруть з експерименту.

Для кристала з високою симетрією (кубічного)  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ , тому вираз для енергії зовсім спрощується:

$$W_a = -\frac{1}{2} \beta M^2,$$

що не впливає на динаміку намагніченості. Тому для кубічного кристала напрям у просторі буде визначатись іншими релятивістськими ефектами.

Загальний вираз для диполь-дипольної взаємодії (4.21) можна спростити, врахувавши, що вектор намагніченості має постійну довжину. Отже, вилучимо доданок з  $M_y^2 = M_0^2 - M_x^2 - M_z^2$ , знехтуючи сталу  $M_0^2$ ,

$$W_a = -\frac{1}{2} (\beta_1 M_x^2 + \beta_3 M_z^2). \quad (4.22)$$

Таким чином, повна енергія ферромагнетика визначається співвідношенням

$$\mathcal{E} = \int dV \left\{ \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{1}{2} \beta_1 M_x^2 - \frac{1}{2} \beta_3 M_z^2 - \mathbf{M} \mathbf{H}_0 \right\}, \quad (4.23)$$

де враховано також взаємодію із зовнішнім магнітним полем  $\mathbf{H}_0$ .

Якщо  $\beta_1 = 0$ , феромагнетик називається *одноосним*. Якщо, крім того,  $\beta_3 > 0$ , має місце анізотропія типу осі легкого намагнічування. У такий системі в основному стані вектор  $\mathbf{M}$  має напрям уздовж «легкої осі»  $z$ ; магнетик при цьому називають «легкоосним». Якщо ж  $\beta_1 = 0$ , але  $\beta_3 < 0$ , має місце анізотропія типу площини легкого намагнічування. У такий системі в основному стані вектор  $\mathbf{M}$  має напрям, перпендикулярний до осі  $z$ . Магнетик з анізотропією такого типу називають «легкоплощинним».

### §4.3. Спінові хвилі

Отриманий вираз для енергії дозволяє розглянути питання про поширення *спінових хвиль*. Обмежимося одновимірним випадком (усі величини залежать лише від координати  $x$ ).

Розглянемо динаміку намагніченості в легкоосному феромагнетикі, що знаходиться в зовнішньому магнітному полі з напрямом уздовж легкої осі,  $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ . Густина магнітної енергії такого магнетика згідно з (4.23) дорівнює

$$\mathcal{E} = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \beta M_z^2 - M_z H \right\}. \quad (4.24)$$

Ефективне магнітне поле  $\mathbf{H}_{\text{eff}} = \delta \mathcal{E} / \delta \mathbf{M}$  обчислюється за правилом (4.14),

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H} + \beta M_z \mathbf{e}_z + \alpha \Delta \mathbf{M}. \quad (4.25)$$

У рівновазі намагніченість за напрямом збігається з магнітним полем,  $\mathbf{M}_0 = M_0 \mathbf{e}_z$ . Вважаємо, що динаміка описує малі відхилення від основного стану (лінійне наближення),

$$\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{m}, \quad |\mathbf{m}| \ll M_0. \quad (4.26)$$

У такому наближенні намагніченість не змінюється за абсолютною величиною,  $\mathbf{M}^2 = M_0^2$ , звідки

$$\mathbf{M}^2 = (M_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{m})^2 = M_0^2 + 2M_0 m_z + m_z^2 = M_0^2.$$



Отже, у лінійному наближенні  $m_z = 0$ , тому

$$\mathbf{m} = m_x \mathbf{e}_x + m_y \mathbf{e}_y. \quad (4.27)$$

У тому ж лінійному наближенні

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{eff}} &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, & \mathbf{H}_0 &= H_0 \mathbf{e}_z, \\ H_0 &= H + \beta M_0, & \mathbf{h} &= \alpha \Delta \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Лінійарізоване рівняння Ландау — Ліфшиця (4.15), що описує динаміку збурень поля намагніченості, набуває вигляду

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma [\mathbf{m} \times \mathbf{H}_0] + \gamma [\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}]. \quad (4.29)$$

Спроектуємо рівняння (4.29) на осі декартової системи координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial t} &= \gamma m_y H_0 - \gamma M_0 h_y \\ \frac{\partial m_y}{\partial t} &= -\gamma m_x H_0 + \gamma M_0 h_x. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Оскільки рівняння лінійні, то можемо шукати розв'язок у вигляді:

$$\mathbf{m}, \mathbf{h} \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Отже

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{m}, \quad \mathbf{h} = -\alpha k^2 \mathbf{m}.$$

Враховуючи це, система (4.30) набуває вигляду

$$\begin{aligned} -i\omega m_x &= \gamma m_y (H + \beta M_0) + \alpha \gamma k^2 M_0 m_y, \\ -i\omega m_y &= -\gamma m_x (H + \beta M_0) - \alpha \gamma k^2 M_0 m_x. \end{aligned}$$

Умова сумісності цих рівнянь є рівність нулеві детермінанта,

$$\begin{vmatrix} -i\omega & \gamma(H + \beta M_0) + \alpha \gamma M_0 k^2 \\ \gamma(H + \beta M_0) + \alpha \gamma M_0 k^2 & -i\omega \end{vmatrix} = 0.$$

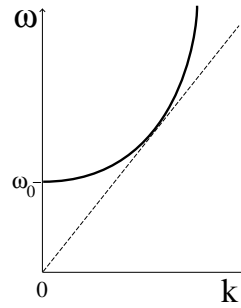


Рис. 4.3.

Дві можливі частоти запишемо як

$$\omega_{1,2} = \pm\gamma (H + \beta M_0 + \alpha M_0 k^2), \quad (4.31)$$

Зручно останній вираз записати у вигляді

$$\begin{aligned} \omega(k) &= \omega_L + \omega_0 (1 + l_0^2 k^2), \\ \omega_0 &= \frac{|e|\beta M_0}{m_e c}, \quad l_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

де  $\omega_L$  — частота ларморової прецесії (4.17) у зовнішньому магнітному полі, стала  $\omega_0$  має назву частоти однорідного феромагнітного резонансу,  $l_0$  — так звана «магнітна довжина».

При відсутності зовнішнього поля

$$\omega(k) = \omega_0 (1 + l_0^2 k^2), \quad (4.33)$$

частота активації спектра визначається частотою однорідного феромагнітного резонансу. Графік закону дисперсії (4.33) зображено на рис. 4.3 неперервною кривою; штрихована лінія має нахил, що визначає мінімальну фазову швидкість спінових хвиль  $v_{\min} = 2\omega_0 l_0$ .

#### §4.4. Доменна стінка

Розглянемо найпростішу неоднорідну область намагніченості між двома однорідно та протилежно намагніченими частинами феромагнетика (*доменами*). Така область має назву *доменної стінки*, або стінки Блоха, чи  $180^\circ$  доменної межі.

Нехай магнетик містить лише два домени. Для простоти розглядатиме одноосний магнетик з легкою віссю  $z$ . Оберемо вісь  $x$  перпендикулярно до межі між доменами (див. рис. 4.4). Вважатимемо, що намагніченість лежить у площині  $YOZ$ <sup>1</sup>.

Нехай  $\theta$  — кут між  $\mathbf{M}$  і віссю  $z$ . Тоді компоненти вектора  $\mathbf{M}$ :

$$M_x = 0, \quad M_y = M_0 \sin \theta, \quad M_z = M_0 \cos \theta.$$

<sup>1</sup>Це не досить коректно. Справа в тому, що вектора намагніченості енергетично вигідно орієнтуватись у цій площині. Це можна показати, але для цього необхідний додатковий аналіз.

Повна магнітна енергія такого магнетика (4.23)

$$\varepsilon = \frac{M_0^2}{2} \int dx \left\{ \alpha \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \beta \sin^2 \theta \right\}. \quad (4.34)$$

У цьому виразі енергію диполь-дипольної взаємодії записано як  $(1/2)\beta M_0^2 \sin^2 \theta$  замість  $-(1/2)\beta M_0^2 \cos^2 \theta$  для того, щоб в основному стані ( $\theta = 0$ ) енергія дорівнювала нулеві.

Стационарний розподіл намагніченості знаходиться з умов мінімуму функціонала енергії ( $\mathbf{H}_{\text{eff}} = 0$ ), що має вигляд

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{1}{l_0^2} \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (4.35)$$

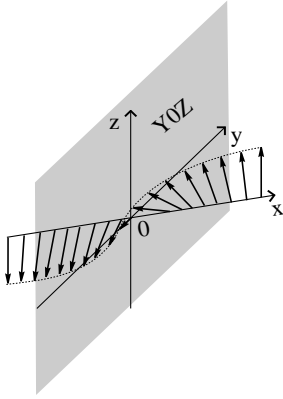


Рис. 4.4.

Проінтегрувавши один раз це рівняння матимемо (константа інтегрування дорівнює нулеві):

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2l_0^2} \sin \theta \cos \theta. \quad (4.36)$$

Нескладні перетворення приводять до виразу:

$$\cos \theta = \text{th} (x/l_0). \quad (4.37)$$

Отже,

$$M_x = 0, \quad M_y = \pm \frac{M_0}{\text{ch} (x/l_0)}, \quad M_z = M_0 \text{th} (x/l_0).$$

Характерний розмір, на якому відбувається основна зміна напрямку вектора намагніченості, дорівнює  $l_0$  — це характерна «магнітна довжина», яку з огляду на (4.37) називають також товщиною доменної стінки.

## Глава 5

# СТВ та релятивістська електродинаміка

### §5.1. Принцип відносності

Теорія відносності — це теорія, що описує універсальні просторово-часові властивості фізичних процесів. Ми розглядатимемо лише спеціальний випадок: властивості простору-часу в областях, де полями тяжіння можна знехтувати. Звідси й термінологія — *спеціальна теорія відносності* (СТВ).

СТВ виникла при невдалих спробах виявити рух Землі відносно так званого *ефіру*. Гіпотеза про існування останнього повинна була врятувати класичний *принцип відносності Галілея*, який вважався на той час безперечним. Розглянемо ці питання більш докладно.

#### §5.1.1. Принцип відносності Галілея

Принцип відносності Галілея, що був сформульований ще в 1636 р., стверджує: **всі закони та рівняння механіки сформульовані для однієї інерціальної системи відліку не змінюються при переході до іншої довільної інерціальної системи відліку.**

У такому вигляді це положення справедливе і по сьогоднішній день через те, що не існує експериментів, які б свідчили про наявність якоїсь виділеної системи відліку — всі інерціальні системи відліку рівноправні. У цьому розумінні Галілей геніальним чином зрозумів одну з основ сучасної фізики.

Однак завжди, коли мають на увазі принцип відносності Галілея, перелічують можливі варіанти переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Очевидно, ми переходимо знов таки до інерціальної системи відліку, якщо:

- зміщуємо початок системи відліку на деяку постійну відстань (у загальному випадку — на постійний вектор  $\mathbf{a}$ )

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}. \quad (5.1a)$$

- повернемо систему відліку в просторі навколо її початку; зобразимо це за допомогою матриці поворотів  $\hat{U}$ :

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \hat{U}\mathbf{r}. \quad (5.1b)$$

- зсунемо початок відліку часу на деяку постійну величину  $t_0$ ,

$$t \rightarrow t' = t + t_0. \quad (5.1c)$$

- перейдемо до системи координат, що рухається рівномірно та прямолінійно вздовж осі  $x^1$ :

$$x \rightarrow x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t \rightarrow t' = t. \quad (5.1d)$$

Ці перетворення називають *перетвореннями Галілея*. З них (5.1d) безпосередньо випливає закон додавання швидкостей у класичній механіці:

$$v' = v - V. \quad (5.2)$$

Відмітимо в перетвореннях Галілея останню рівність — вона свідчить про абсолютний характер часу: згідно з перетвореннями Галілея час іде однаково в усіх інерціальних системах відліку. Такий саме абсолютний характер має в класичній фізиці й простір. Перетворення Галілея є узагальнення повсякденного досвіду, який базуються на деяких припущеннях, що важко перевірити експериментально (для швидкостей руху, які маємо у своєму розпорядженні), а саме:

<sup>1</sup>Оскільки всі напрями руху в пустому просторі рівноправні — ізотропний простір, то байдуже в якому напрямку рухатись. Тому, як правило, виконують перехід до системи координат, що рухається вздовж осі  $x$ . Для перетворення Галілея це значення не має — загальний випадок виписується елементарно. Проте для перетворень Лоренца це приведе до досить складних виразів, але не до принципових відмінностей, тому перехід до рухомої системи відліку найчастіше виглядає так, як ми його наводимо в тексті.

- Довжина деякого тіла однакова в довільній інерціальній системі відліку.
- Час у різних інерціальних системах відліку плине однаково.
- Маса тіл, а також сили взаємодії залишаються незмінними.

Два перших пункти виражають абсолютність поняття простору і часу в класичній фізиці. З цих тверджень випливає, що рівняння та закони механіки не змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Тобто не існує якої-небудь виділеної, спеціальної системи відліку — всі інерціальні системи рівноправні.

### §5.1.2. Рівняння Максвелла та гіпотеза ефіру

Після появи в 1865 р. рівнянь Максвелла виникла необхідність уточнення принципу відносності й перетворень Галілея. Причина полягає в тому, що самі рівняння Максвелла не інваріантні відносно перетворень Галілея. Більш того, із самих рівнянь Максвелла можна було отримати теоретичне значення швидкості світла через електродинамічні сталі (причому, з не поганою точністю). Це теоретичне значення добре узгоджувалось з експериментальним. Але виникало питання: в якій саме системі координат світло поширюється зі швидкістю  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с, оскільки з абсолютності поняття часу та простору випливає звичайний закон додавання швидкостей. Проте в теорії Максвелла немає жодних вказівок на те, в якій саме системі світло повинно мати швидкість  $3 \cdot 10^{10}$  см/с. Таке положення наводило на думку, що існує деяка виділена система відліку, в якій світло поширюється зі швидкістю  $c$ .

У ті часи вважалось природним, що хвильовий процес поширюється в деякому середовищі (наприклад, гідродинамічні хвилі на поверхні води, звукові — у струні). Тому з'явилась гіпотеза *ефіру* — вважалось, що світло поширюється в деякому прозорому середовищі — ефірі, який заповнює весь простір. Тобто швидкість  $c$  має місце саме в системі координат, пов'язаній з ефіром.

Але це твердження одразу ж приводить до виділеної абсолютної системи відліку, що суперечить принципу відносності Галілея. Друга можлива альтернатива полягала в тому, що треба було припустити, що перехід від однієї системи координат до іншої відбувається не за допомогою перетворень Галілея, а за допомогою інших перетворень.

Психологічно простіше було вважати, що є деяка абсолютна система відліку, оскільки в ті часи було важко відмовитись від середовища, в якому поширюється світло. З цього випливало, що система нерухома відносно ефіру (абсолютна), а при переході до іншої рухомої системи відліку повинен виконуватись закон додавання швидкостей  $v_1 + v_2$ , тобто  $v + c$ . Оскільки Земля рухається по орбіті зі швидкістю  $v = 30 \text{ км/с}$ , то поперек ефірного вітру повинна бути швидкість  $c$ , а вздовж нього  $v + c$ . Але експерименти дали заперечний результат — і в повздовжньому і в поперечному напрямку швидкість дорівнювала  $c$ . Трохи нижче ми докладно зупинимось на цьому питанні<sup>1</sup>.

Таким чином, треба було робити вибір (експериментальний) між абсолютною системою відліку та перетвореннями Галілея.

Найвідоміші експерименти, які відіграли першочергову роль у становленні СТВ, — це *досліди Майкельсона і Морлі* (1887 р.). Як уже було відмічено, якщо вважати, що Земля рухається в прозорому ефірі (припущення про існування абсолютної системи відліку), то в поперечному напрямку швидкість світла повинна дорівнювати  $c$ , а в повздовжньому:  $c + v$ . Ця відмінність мала датися знаки на інтерференційній картині (незважаючи на те, що швидкість руху Землі набагато менша за швидкість світла).

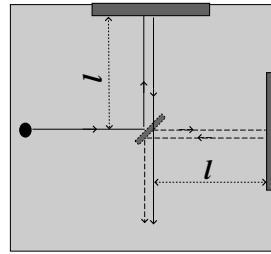


Рис. 5.1.

Досліди було виконано за схемою, зображеною на рис.5.1. У дослідах використовували інтерферометр Майкельсона з рівними плечима; одне плече мало напрям уздовж руху Землі, друге — проти. За рахунок очікуваного руху Землі відносно ефіру, шляхи, які проходять різні промені до екра-

<sup>1</sup>Теорію ефіру намагалися врятувати, пропонуючи такі пояснення:

- Ефір знаходиться в стані спокою не відносно Сонця, а відносно Землі.
- Ефір «утягується» Землею в рух і відносна швидкість дорівнює нулю. Це твердження було спростоване вимірами на повітряних кулях (де рух ефіру повинен був би даватися знаки).
- Лоренц та Фітцджеральд запропонували вважати, що в напрямку руху кожен предмет скорочується в  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  разів. Від теорії ефіру було важко відмовитись.

Але довелось таки від неї відмовитись, оскільки виділеної системи відліку не існує.

на, мали відрізнятись один від одного. Якщо платформу, де розташовано інтерферометр, розвернути на  $90^\circ$ , то шлях, пройдений уздовж ефірного вітру та поперек нього, повинен змінитись, отже має змінитися й інтерференційна картинка. Розрахунок приводив до зсуву інтерференційної смуги на відстань

$$\Delta = \frac{2l}{\lambda} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2,$$

де  $l$  — довжина плеча інтерферометра,  $\lambda$  — довжина хвилі світла,  $v$  — орбітальна швидкість Землі.

Такі експерименти виконувались багато разів багатьма експериментальними групами, проте кожного разу результат був негативний — інтерференційна картинка не змінювалась. У 1927-1930 р. ефективна довжина плечей була доведена до 30 м. При довжині світлової хвилі  $5000 \text{ \AA}$  повинно було б спостерігатись зміщення на цілу спектральну смугу. Точність вимірювань дозволила б зафіксувати зміщення на  $1/1000$  смуги. Але ніякого зміщення зафіксовано не було. Цей експеримент завжди давав негативний результат.

Таким чином, з нього незаперечно випливав **експериментальний факт — швидкість поширення світла не залежить від швидкості руху спостерігача**. Іншими словами, в якій би системі координат ми не вимірювали швидкість руху, завжди отримаємо один і той самий результат —  $3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$ . І в цьому розумінні всі інерціальні системи відліку є рівноправними, виділеної (абсолютної) системи відліку не існує. Тобто саме формулювання принципу відносності Галілея залишається справедливим — треба змінювати формули переходу від однієї системи координат до іншої.

### §5.1.3. Принцип відносності Ейнштейна

Експериментально було надійно встановлено, що  $c = \text{const}$  у довільній інерціальній системі відліку і що не існує виділеної інерціальної системи відліку — всі інерціальні системи відліку рівноправні. Це дозволило Ейнштейну сформулювати *принцип відносності*, який пізніше назвали *ейнштейнівським*, у вигляді:



1. Усі фізичні закони та рівняння, сформульовані для однієї інерціальної системи відліку, не змінюються при переході до іншої довільної інерціальної системи відліку.

2. Швидкість світла не залежить від швидкості руху спостерігача і в довільній інерціальній системі відліку дорівнює  $3 \cdot 10^{10}$  см/с.

З цих двох тверджень логічно випливають перетворення Лоренца.

## §5.2. Кінематика СТВ

### §5.2.1. Перетворення Лоренца

Нехай маємо дві системи координат: нерухому  $K$  та систему  $K'$ , що рухається відносно неї рівномірно і прямолінійно зі швидкістю  $V$  вздовж осі  $x$  (див. рис. 5.2)<sup>1</sup>. Нехай у момент часу  $t = 0$  ( $t' = 0$ ) початки координатних систем збігалися і в цей же момент з початку координат  $\mathbf{r} = 0$  ( $\mathbf{r}' = 0$ ) почала поширюватись сферична світлова хвиля (спалах світла).

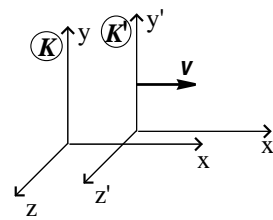


Рис. 5.2.

У системі відліку  $K$  у момент часу  $t$  передній фронт світлової хвилі пройде відстань  $ct$ , а в системі  $K'$  у момент часу  $t'$  його шлях буде  $ct'$ . Тобто спостерігач системи  $K$  буде спостерігати передній фронт світлової хвилі як сферу радіуса  $ct$  і опише її рівнянням

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

А спостерігач системи  $K'$  ту саму сферичну хвилю опише рівнянням

$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Він опише її саме так, оскільки в системі координат  $K'$  світло поширюється з такою самою швидкістю  $c$ . Ці дві рівності по-

<sup>1</sup>Звісно, що поняття рухомий — нерухомий умовні, тому що всі системи відліку рівноправні, отже, вважаючи себе спостерігачем системи  $K'$ , опинимось нерухомими спостерігачами і побачимо як від нас у зворотному напрямку віддаляється система  $K$ .

казують, що величина

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = \text{const}, \quad (5.3)$$

є інваріант переходу (не змінюється при переході) від однієї інерціальної системи відліку до іншої. При поширенні світла цей інваріант дорівнює нулеві, але в інших випадках може бути і додатною, і від'ємною величиною, яка має спеціальну назву — *інтервал*. Він визначає *метрику простору-часу*. Нагадаємо, що в трьохвимірному просторі інваріантом переходу від однієї системи координат до іншої є сума квадратів координат (відстань між точками не змінюється). Усі доданки такого інваріанта входять із однаковими знаками «плюс». А у виразі для інтервалу час ввійшов із знаком мінус — протилежний знак до знака просторових координат. Там, де всі квадрати мають однакові знаки — то геометрія Евклідова, а в даному випадку з'являється геометрія псевдоевклідова. Отже, суто фізичні міркування (і експериментальні дані) привели нас до іншого типу геометрії, а це, звісно, приведе до інших, частково невідомих нам наслідків.

Тобто перехід від однієї інерціальної системи координат до іншої можна собі уявляти як перехід від одних координат до інших у псевдоевклідовому просторі. Якщо йдеться про чисто координатний перехід, то майже очевидно, що тут все буде як у евклідовому випадку. Але коли одна з координат містить час ( $ct$ ), то ситуація ускладнюється. Справді перетворення просторової частини відбуваються, наприклад, при повороті плоских осей навколо початку координат і мають добре знайомий вам вигляд (5.1b):

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Таке перетворення не змінює евклідову довжину

$$x^2 + y^2 = \text{const}.$$

Але перетворення, в якому бере участь час, зберігає іншу величину — інтервал. Можемо скористатись формулами плоского повороту, якщо записати інтервал у вигляді

$$x^2 + (ict)^2 = \text{const}. \quad (5.4)$$

Тоді формально можемо користуватись формулами плоского повороту, замінивши в них координату  $y$  на  $ict$

$$x' = x \cos \varphi + ict \sin \varphi, \quad ict' = -x \sin \varphi + ict \cos \varphi. \quad (5.5)$$

Ці, поки що формальні, перетворення можемо привести до дійсного вигляду, якщо пригадаємо, що гіперболічні функції від уявного аргументу пов'язані з тригонометричними відомим співвідношенням  $\text{sh } iz = i \sin z$ ,  $\text{ch } iz = \cos z$ . Введемо позначення  $\psi = i\varphi$  і запишемо (5.5) у вигляді

$$x' = x \text{ch } \psi + ct \text{sh } \psi, \quad ct' = x \text{sh } \psi + ct \text{ch } \psi. \quad (5.6)$$

Нас цікавить перетворення координат при русі вздовж осі  $x$ . При цьому, очевидно, перетворюються тільки координата  $x$  і час  $t$ . Отже, перетворення матимемо вигляд (5.6). Залишилось визначити тільки кут  $\psi$ .

Розглянемо рух початку координат системи  $K'$ , тобто точки  $x' = y' = z' = 0$  відносно системи  $K$ . Спостерігач системи  $K$  бачить, що відносно нього ця точка рухається зі швидкістю  $V$ . Координати цієї точки в системі  $K$  рівні:  $x = Vt$ ,  $y = z = 0$ . Врахуємо ці співвідношення в (5.6). Маємо:

$$0 = Vt \text{ch } \psi + ct \text{sh } \psi, \quad ct' = Vt \text{sh } \psi + ct \text{ch } \psi. \quad (5.7)$$

Перша з цих рівностей дає, очевидно,  $\text{th } \psi = -V/c$ . А тому неважко обчислити і всі інші значення гіперболічних функцій:

$$\text{th } \psi = -V/c, \quad \text{sh } \psi = \frac{-V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \text{ch } \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (5.8)$$

Враховуючи співвідношення (5.8) у (5.6) одержимо *перетворення Лоренца*:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (5.9a)$$

Для знаходження обернених перетворень потрібно розв'язати рівняння (5.9a) відносно  $x$  і  $t$ ; однак можна їх отримати,

користуючись простими фізичними міркуваннями — система  $K'$  рухається відносно системи  $K$  із швидкістю  $V$  (у додатньому напрямку осі  $x$ ), а система  $K$  рухається відносно системи  $K'$  у бік від'ємних  $x$  із швидкістю  $-V$ . Тому зворотний перехід можемо виконати, помінявши місцями штриховані та нештриховані змінні й змінивши знак у швидкості відносного руху:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (5.9b)$$

Для скорочення запису використовують стандартні у СТВ позначення

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.10)$$

У цих позначеннях перетворення Лоренца (5.9а) має вигляд

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x). \quad (5.11)$$

Необхідно звернути увагу на декілька обставин.

1. У перетвореннях (5.9) простір та час беруть рівноправну участь; найбільш симетризовану форму має перетворення в позначеннях (5.11). Це незаперечно свідчить про те, що наш простір у дійсності чотирьохвимірний. Мається на увазі, що кожна просторова система координат крім позначок на осях повинна в кожній точці мати свій власний годинник і показання всіх цих годинників мають бути синхронізовані. Не треба розуміти чотирьохвимірність як намагання «причепити» четверту координату до вже існуючих.
2. Для малих швидкостей  $V \ll c$  перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея; тобто поняття часу наближається до абсолютного в границі  $V/c \rightarrow 0$ .
3. Перетворення Лоренца не комутують. Результат залежить від порядку переходу між трьома рухомими системами.

4. Ще одне суттєве зауваження, яке свідчить про чотирьох-вимірність простору. З математичного погляду звичний нам трьохвимірний простір поступається своїми алгебраїчними властивостями як перед одно-, двох-, так і перед чотирьох-вимірними просторами. У курсі математиці відома так звана *теорема Фробеніуса*, згідно з якою алгебру з чотирма математичними операціями (додавання, віднімання, множення і ділення) можна побудувати лише, якщо вимірність простору дорівнює 1 (дійсні числа), 2 (комплексні числа), 4 (так звані кватерніони), 8 (октаніони). Для іншої вимірності побудувати повноцінну алгебру неможливо. Так, наприклад, для трьохвимірного простору (простору векторів) не можна коректно ввести операцію ділення.

Оскільки, зважаючи на все сказане, **час не є абсолютним**, то треба перш за все переглянути питання про синхронізацію годинників чотирьохвимірного простору, а також і поняття одночасності.

### §5.2.2. Як треба розуміти одночасність. Відносність одночасності

Як установити годинники та як їх синхронізувати? Перше, що спадає на думку — треба звести всі годинники до купи (на початок координат); поставити стрілки в однакове положення, а потім розвести по своїх точках. Але виявляється, що так зробити не можна, тому що час, який будуть вони показувати, залежитиме від шляху, яким його було перенесено на кінцеву точку.

Тому синхронізацію годинників прийнято виконувати так: нехай всі годинники вже рознесено по своїх точках, у момент часу  $t$  на початку координат відбувається спалах світла і сферична хвиля починає поширюватися в усі боки. Відстані до всіх годинників вже відомі, тому коли світлова хвиля дійде до годинника, що знаходиться в точці  $\mathbf{r}$ , його стрілки потрібно поставити в положення  $t + |\mathbf{r}|/c$ . Цей спосіб синхронізації годинників запропоновано Ейнштейном.

Вимагає також уточнення поняття одночасності. Якщо дві події відбуваються в одній точці, то проблем, зрозуміло, немає.

Але якщо вони відбуваються в різних точках простору  $(x_1, t_1)$  та  $(x_2, t_2)$ , одночасність визначають наступним чином. Нехай одночасно з цими подіями в кожній точці відбувається спалах світла — якщо ці спалахи зустрічаються в точці  $(x_1 + x_2)/2$ , то такі події звать одночасними. Звернемо увагу, що для синхронізації (і для одночасності) використовують саме світловий сигнал. Причина цього полягає в незалежності швидкості світла від вибору інерціальної системи координат.

Нехай у системі  $K$  маємо дві події  $(x_1, t_1)$  та  $(x_2, t_2)$  і відповідно в системі  $K'$  —  $(x'_1, t'_1)$  та  $(x'_2, t'_2)$ . Обчислимо, як пов'язані проміжки часу між цими двома подіями, використавши для цього (5.11)

$$\begin{aligned} t'_1 &= \gamma\left(t_1 - \frac{Vx_1}{c^2}\right), & t'_2 &= \gamma\left(t_2 - \frac{Vx_2}{c^2}\right), \\ t'_2 - t'_1 &= \gamma(t_2 - t_1) - \gamma\frac{V}{c^2}(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (5.12)$$

З (5.12) видно, що якщо нештрихованій системі координат події одночасні ( $t_2 = t_1$ ), то в системі штрихованій можливі всі три варіанти:

$$t'_2 - t'_1 = \begin{cases} > 0, & \text{якщо } x_2 - x_1 < 0 \\ < 0, & \text{якщо } x_2 - x_1 > 0. \\ = 0, & \text{якщо } x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

Це зайвий раз підкреслює, що поняття одночасності є відносним. Але такий результат можемо отримати лише у випадку, коли події в точках 1 і 2 не пов'язані між собою причинно-наслідковим зв'язком. Здоровий глузд підказує, що причина повинна передувати наслідку незалежно від системи відліку. Так у дійсності і є. Наприклад, якщо йдеться про постріл з рушниці і влучення кулі в мішень, то координата мішені пов'язана з координатою рушниці очевидним співвідношенням  $x_2 = x_1 + v_k t$ . Підставивши цю залежність у (5.13) одержимо:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) \left(1 - \frac{Vv_k}{c^2}\right), \quad (5.14)$$

звідки видно, якщо в системі  $K$   $t_2 > t_1$ , то і для системи  $K'$  нерівність має таке саме значення  $t'_2 > t'_1$ .

Питання про можливість причинно-наслідкового зв'язку між двома подіями може бути вирішено в загальному випадку з аналізу знака інтервалу. Розглянемо три випадки:

1. Інтервал між двома подіями називають *часоподібним*, якщо квадрат часової компоненти більше за квадрат (суму квадратів) просторової компоненти:

$$(x_2 - x'_1)^2 + (y_2 - y'_1)^2 + (z_2 - z'_1)^2 < c^2(t_2 - t_1)^2 \quad (5.15)$$

Ця рівність, очевидно, еквівалентна такій:

$$\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}{|t|} < c,$$

з чого неважко зробити висновок — події, які відбуваються в цих точках можуть бути пов'язані причинно-наслідковим зв'язком (але можуть бути і не пов'язані). Це впливає з того, що при заданій відстані за заданий проміжок часу світло (а можливо і більш повільний сигнал) може «добігти» від точки 1 до точки 2.

2. Інтервал між двома подіями називають *просторовоподібним*, якщо квадрат часової компоненти менше за квадрат (суму квадратів) просторової компоненти:

$$(x_2 - x'_1)^2 + (y_2 - y'_1)^2 + (z_2 - z'_1)^2 > c^2(t_2 - t_1)^2 \quad (5.16)$$

Ця рівність, очевидно, еквівалентна такій:

$$\frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}{|t|} > c.$$

З цієї рівності з необхідністю впливає дуже важливий наслідок — події, які відбуваються в цих точках, не можуть бути пов'язані причинно-наслідковим зв'язком, оскільки навіть світло за відведений проміжок часу не зможе подолати відстань між цими точками.

3. Інтервал називають *світлоподібним*, (або *нульовим*), якщо квадрат часової компоненти дорівнює квадрату (сумі квадратів) просторової компоненти.

### §5.2.3. Власний час

Розглянемо нерухому систему координат  $K$  та деяке тіло, що рухається довільним чином (його швидкість змінює свою величину і напрям). З цим тілом пов'яжемо рухому систему координат. Звичайно ця система буде неінерціальною, оскільки бере участь в усіх переміщеннях тіла. Але в деякій певний проміжок часу  $[t; t + dt]$  її можемо вважати локально інерціальною (для нескінченно малих переміщень і нескінченно малих проміжків часу). Інтервал, що пов'язує дві події, розділені нескінченно малим проміжком часу, очевидно, має однакову величину для нерухомої системи і системи пов'язаної з тілом  $(ds)^2 = (ds')^2$ . При запису виразу для інтервалу врахуємо, що в системі тіла зміщення координат не відбувається,  $dx' = dy' = dz' = 0$ . Отже:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2 = -c^2(d\tau)^2, \quad (5.17)$$

де  $d\tau$  — елемент часу в системі координат, пов'язаний з рухомим тілом (так званий *власний час*). Звернемо увагу, що згідно з останнім співвідношенням, власний час є інваріантом відносно перетворень Лоренца:

$$d\tau = \text{inv.} \quad (5.18)$$

При виконанні математичних перетворень врахуємо, що

$$\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2} = v^2,$$

і після нескладних алгебраїчних операцій одержуємо:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5.19)$$

Співвідношення (5.19) пов'язує елемент часу у власній системі координат тіла з елементом часу в лабораторній системі координат. З нього видно, що у власній системі (системі самого тіла) час плине повільніше, оскільки видно, що  $d\tau < dt$ .



Те саме стосується і скінченних відрізків часу:

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_1^2 dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}. \quad (5.20)$$

За допомогою формули (5.20) при заданій швидкості  $v(t)$  можна обчислити різницю показів годинників у лабораторній системі та власній системі тіла.

Зокрема для малих, але скінчених відрізків і постійної рівномірної швидкості руху тіла (системи відліку) запишемо формулу, якою будемо користуватись у подальшому:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (5.21)$$

Відміна власного часу від лабораторного суттєва лише при швидкостях, не малих у порівнянні зі швидкістю світла. Такі швидкості реалізуються, наприклад, в елементарних частинках космічного випромінювання.

Наведемо приклад. Існують елементарні частинки, які мають назву мюони ( $\mu$ ). Вони за багатьма параметрами нагадують електрони, але їх маса у 206 разів більша від маси електронів і, крім того, час життя становить  $2.2 \cdot 10^{-6}$  с. У земних умовах вони не існують, а приходять до нас як вторинна компонента космічного випромінювання. Космічне випромінювання — це потік елементарних частинок (понад 90% складають протони, 7% —  $\alpha$ -частинки, решта — більш важкі частинки), що мають надзвичайно високі енергії ( $10^6$ - $10^{20}$ ) еВ, і приходять до нас із космосу (практично рівномірно з усіх боків). Якби не атмосфера Землі, то все живе під потоком такої інтенсивності загинуло б. Але ця первинна компонента на своєму шляху зустрічає атоми азоту, кисню, неону тощо і в результаті зіткнень на висоті приблизно 20-30 км утворюється вторинне космічне випромінювання. Однією з компонент цього випромінювання є мюони.

Не важко підрахувати, що маючи час життя  $2.2 \cdot 10^{-6}$  с навіть при швидкості  $3 \cdot 10^8$  м/с він пролетів би всього 600м.

Але ці частинки надійно спостерігають на поверхні Землі в лабораторних умовах. Причина полягає в тому, що величина  $2.2 \cdot 10^{-6}$  с є час життя в системі координат, нерухомій відносно до мюона. Ми спостерігаємо його як частинку, що знаходиться щодо нас у рухомій системі координат, а в рухомій відносно нас системі координат час іде повільніше. Тобто при визначенні його часу життя для нас з вами ми повинні користуватись формулою (5.21), де  $\Delta\tau$  — час життя у власній системі координат, а  $\Delta t$  — час життя, який буде спостережено в рухомій системі координат.

Після створення атомних годинників з'явилась можливість безпосередньої перевірки співвідношення (5.21). Один із годинників досить довго літав на літаку (жовтень 1971 р.), інший — знаходився на землі. Різниця показань ( $184 \pm 23$  нс) виявилась близькою до очікуваної  $203 \pm 10$  нс [15, т. 1, с. 133]<sup>1</sup>.

#### §5.2.4. Як треба правильно вимірювати довжини матеріальних тіл

Для того, щоб знайти довжину деякого тіла в певній системі координат, необхідно визначити координати початку та кінця цього тіла одночасно (відносно згаданої системи координат).

Нехай маємо лінійку довжиною  $\Delta x = x_2 - x_1$  у системі  $K$ . Потрібно визначити її довжину в системі  $K'$ . Як уже зазначалося, вимірювання передбачає одночасний вимір координат  $x'_2$  та  $x'_1$ , тобто  $t'_2 = t'_1$ . Скористаємось оберненими перетвореннями Лоренца для координат (5.9b) у вигляді:

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma(x'_1 + Vt'_1), & x_2 &= \gamma(x'_2 + Vt'_2) \\ x_2 - x_1 &= \gamma(x'_2 - x'_1). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Отже співвідношення між довжиною предмета в системі  $K$  та  $K'$  є:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \Delta x. \quad (5.23)$$

<sup>1</sup>Матеріали було надруковано 14 липня 1972 р. у журналі "Science".

У зв'язку з останньою рівністю треба чітко усвідомлювати декілька положень.

1. Відносно останньої рівності часто застосовують термін *лоренцеве скорочення*. У дійсності йдеться не про скорочення у фізичному розумінні (не треба думати, що наче від предмета відрізають шматок). Йдеться лише про відносність результатів вимірів предмета рухомих та нерухомих спостерігачем. Нерухомий відносно предмета спостерігач при вимірюванні одержить, наприклад, результат 1 м. Якщо виміри з тим самим предметом виконуватиме спостерігач рухомої системи координат, то він одержить менший результат (наприклад, 90 см). У цьому немає нічого дивного, оскільки відносно до процесу вимірювання предмет розташований несиметрично (у системі  $K$ ).
2. А як же в такому разі пов'язати результати таких вимірів з положенням про рівноправність усіх інерціальних систем відліку? Процес вимірювання в даному випадку, як відмічено в пункті 1 не є «симетричним» відносно систем  $K$  та  $K'$ . Рівноправність цих двох систем полягає в тому, що якщо перемістити предмет із системи  $K$  у систему  $K'$  і виконати вимірювання довжини, то спостерігач системи  $K'$  (тепер він нерухомий відносно предмета) одержить довжину 1 м, а спостерігач системи  $K$  — 90 см. Тільки так слід розуміти рівноправність цих двох систем<sup>1</sup>.
3. Питання про те, що буде видно при «фотографуванні» рухомого об'єкта потребує додаткових пояснень. Через те, що сигнали від різних частин предмета будуть доходити до об'єктива в різні моменти часу, то будемо бачити предмет наче повернутий під деяким кутом.

Якщо користуватись прямими перетвореннями (5.9а), то при обчисленнях повинні враховувати, що моменти часу  $t_2$

<sup>1</sup>До речі, саме так треба розуміти рівноправність інерціальних систем координат і в багатьох інших випадках, а не тільки відносно вимірювання довжини.

та  $t_1$  не збігаються:

$$\begin{aligned}x'_1 &= \gamma(x_1 - Vt_1), & x'_2 &= \gamma(x_2 - Vt_2) \\x'_2 - x'_1 &= \gamma(x_2 - x_1) - \gamma V(t_2 - t_1).\end{aligned}\quad (5.24)$$

У правій частині рівності (5.24) треба виразити різницю  $t_2 - t_1$  через  $t'_2 - t'_1$  згідно з оберненими перетвореннями Лоренца:

$$\begin{aligned}t_1 &= \gamma\left(t'_1 + \frac{Vx'_1}{c^2}\right), & t_2 &= \gamma\left(t'_2 + \frac{Vx'_2}{c^2}\right) \\t_2 - t_1 &= \gamma(t'_2 - t'_1) - \gamma\frac{V}{c^2}(x'_2 - x'_1).\end{aligned}\quad (5.25)$$

Підставляючи цей результат у (5.24) одержимо:

$$\Delta x' = \gamma\Delta x - \frac{v^2}{c^2} \frac{\Delta x'}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5.26)$$

Отже, знов маємо (5.23).

### §5.2.5. Закон додавання швидкостей

Нехай у системі  $K$  рухається матеріальна точка з координатами  $x(t)$ ,  $y(t)$  і  $z(t)$ . Ця ж сама точка в системі  $K'$  описується координатами  $x'(t')$ ,  $y'(t')$ ,  $z'(t')$ . Продиференціюємо координату  $x'$  за  $t'$ , щоб знайти швидкість точки  $u'_x$  у системі  $K'$ . Користуємось оберненими перетвореннями (5.9b):

$$\frac{dx'}{dt'} = u'_x = \gamma \left( \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} - V \frac{dt}{dt'} \right) = \gamma(u_x - V) \frac{dt}{dt'}. \quad (5.27)$$

З перетворень (5.9b) неважко обчислити похідну  $dt'/dt$ :

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma \left( 1 - \frac{u_x \cdot V}{c^2} \right). \quad (5.28)$$

Підставляючи її в (5.27) маємо:

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x \cdot V}{c^2}}, \quad u'_y = u_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x \cdot V}{c^2}}, \quad u'_z = u_z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x \cdot V}{c^2}}, \quad (5.29)$$

де вирази для  $u'_y$  та  $u'_z$  отримано цілком аналогічним способом. Зовсім неважко записати вирази для зворотного переходу:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x \cdot V}{c^2}}, \quad u_y = u'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x \cdot V}{c^2}}, \quad u_z = u'_z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x \cdot V}{c^2}}. \quad (5.30)$$

Відмітимо, що в нерелятивістському випадку,  $V/c \rightarrow 0$ , перетворення СТВ для швидкостей (5.29) мають вигляд класичних перетворень Галілея (5.2). В іншому граничному випадку,  $V \rightarrow c$ , формула (5.29) забезпечує граничний характер швидкості світла  $c$ . Отже, швидкість, згідно з перетвореннями Лоренца, завжди не перевищує швидкості світла. Тут слід підкреслити, що цей результат не означає, що в СТВ ніякі швидкості не перевищують  $c$ . СТВ стверджує лише, що з надсвітловими швидкостями неможливо передати інформацію. Так, наприклад, фазова швидкість хвилі (але не група), швидкість світлового «зайчика» можуть бути як завгодно більше за  $c$ .

## §5.3. Механіка СТВ

### §5.3.1. Геометрія 4-простору

Отримавши перетворення Лоренца, ми пересвідчилися у тому, що світ, який нас оточує, має в дійсності чотири виміри ( $\mathbf{r}, ct$ ), а не три. Щоправда, відмінності трьохвимірної геометрії від чотирьохвимірної стають суттєвими лише при швидкостях, які можна порівнювати зі швидкістю світла. Проте нас турбує зараз лише принципова сторона цього питання.

А навіщо таку геометрію будувати? Причин, принаймні, дві. Перша — ця геометрія є об'єктивно існуючою, ми в цьому 4-просторі живемо, хоча до цього часу це не усвідомлювали. Є й друга причина. Звичайно, можна було б просто користуватись перетвореннями Лоренца і безпосередньо показати, що рівняння Максвелла відносно цих перетворень інваріантні. Але це далеко не найкращий вихід, бо крім рівнянь Максвелла є інші рівняння — Шредінгера, Дірака та ін. А якщо нам потрібно записати деякі рівняння так, щоб вони гарантовано були б лоренц-інваріантні?

Очевидно, треба йти шляхом, який вибирали при побудові векторного числення. Справа в тому, що векторна форма запису є спосіб зображення векторних величин незалежно від перетворення системи координат (зсуву, поворота тощо). Наприклад, вирази

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

не залежать від перетворень системи координат (на відміну від покоординатної форми запису).

Для трьохвимірного випадку ми побудували цілу низку понять, що можуть входити в ліву та праву частини рівності.

ВЕЛИЧИНА	ЗОБРАЖЕННЯ
Скаляр	$\phi$
Вектор	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
Скалярний добуток	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
Векторний добуток	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
Гradient	$\text{grad} \phi$
Дивергенція	$\text{div} \mathbf{A}$
Оператор Лапласа	$\Delta \phi$
Ротор	$\text{rot} \mathbf{A}$
...	...

Оскільки всі ці величини при повороті системи координат змінюються однаковою чиною, то в цілому рівняння не змінюються і від простих перетворень координат фізичний результат не залежить. Аналогічним чином введемо систему понять для 4-простору. Тоді, якщо показати, що деяке рівняння містить лише об'єкти чотирьохвимірного простору, то воно

гарантовано буде лоренц-інваріантним. Крім того, маючи відповідний набір чотирьохвимірних об'єктів, ми зможемо будувати нові рівняння, що будуть лоренц-інваріантними.

Звертаємо увагу, що на відміну від евклідової геометрії у чотирьохвимірному просторі-часі мірою довжини є інтервал,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Нагадаємо, що в евклідовому 4-просторі такою мірою є

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$

де  $w$  — четверта координата. Відмінність очевидна, але ці дві геометрії мають багато спільного.

Введемо низку правил та означень, якими будемо користуватись, не виконуюючи докладних обґрунтувань.

1. Сукупність координат події будемо вважати компонентами чотирьохвимірного радіус-вектора (вектор у чотирьохвимірному просторі) та позначати

$$x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z, \quad x^4 \equiv ct.$$

Часто також використовують позначення  $x^i = (x, y, z, ct)$ , або  $x^i = (\mathbf{r}, ct)$ .

2. Квадрат довжини цього вектора, як ми вже бачили, дорівнює:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = \text{inv.}$$

Ця величина не змінюється при довільних поворотах чотирьохвимірної системи координат. Зокрема такими поворотами є й перетворення Лоренца. Не потребує спеціального доведення той факт, що координатна частина інтервалу не змінюється при звичайних трьохвимірних поворотах навколо початку координат.

3. Зрозуміло, що 4-вектором може бути не лише сукупність координат деякої події. З геометричного погляду сукупність чотирьох чисел, що при довільних поворотах системи координат (включаючи і перетворення Лоренца) змінюється так само як і  $x^i$ , називають *чотирьохвимірним вектором* (*4-вектором*) і позначають  $A^i = (\mathbf{A}, A^4)$ . Закон перетворення має

вигляд:

$$\begin{aligned} A'^1 &= \frac{A^1 - \frac{V}{c}A^4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & A'^2 &= A^2, \\ A'^3 &= A^3, & A'^4 &= \frac{A^4 - \frac{V}{c}A^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Квадрат довжини довільного 4-вектора, очевидно, є величиною, що не змінюється при переходах (та поворотах) від однієї системи координат до іншої,

$$(A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 - (A^4)^2 = \text{inv.}$$

4. Для зручності запису вводять два типи величин: з індексами зверху  $A^i$  (*контраваріантні*) та з індексами внизу  $A_i$  (*коваріантні*).

Визначимо зв'язок між коваріантними та контраваріантними компонентами 4-вектора наступним правилом:

$$A_1 = A^1, \quad A_2 = A^2, \quad A_3 = A^3, \quad A_4 = -A^4. \quad (5.32)$$

Отже діє правило: підняття або опускання просторових індексів не змінює знак компоненти, а переміщення часового індексу змінює знак на протилежний. Перехід від контра- до коваріантних компонент вектора можна подати в такому вигляді:

$$A^i = (\mathbf{A}, \phi) \quad \Longrightarrow \quad A_i = (\mathbf{A}, -\phi). \quad (5.33)$$

Використовуючи ці позначення квадрат 4-вектора набуває форми:

$$A^i A_i = A_i A^i \equiv \sum_{i=1}^4 A^i A_i = A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 + A^4 A_4. \quad (5.34)$$

У цих та аналогічних виразах прийнято знак суми не писати, а мати на увазі, що якщо індекс повторюється двічі (один



раз вниз і один раз вгору), то за ним необхідно взяти суму від 1 до 4. Такі індекси звать німими.

Для ортогональних некоскутних координат різниці між ко- та контраваріантними величинами немає. Для координат коскутних різниці полягає в тому, що коваріантні компоненти утворюються при проектуванні точки шляхом опущення перпендикуляра, а контраваріантні — шляхом паралельного переносу (див. рис. 5.3).

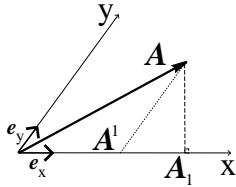


Рис. 5.3.

Використовуючи ко- та контраваріантні позначення, можемо записати основну властивість 4-вектора (5.31) у вигляді

$$A'^i = \alpha_k^i A^k, \quad \text{або} \quad A'_i = \alpha_i^k A_k. \quad (5.35)$$

Тобто, якщо при поворотах системи координат (включаючи і лоренцеві), деяка сукупність чотирьох величин перетворюється вищезазначеним чином, то вона має право називатись вектором чотирьохвимірного простору. Вираз для матриці  $\alpha_i^k$  легко записати безпосередньо з перетворень Лоренца:

$$\alpha_i^k = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

5. Аналогічно до трьохвимірного випадку вводять поняття скалярного добутку:

$$\begin{aligned} A^i B_i &= A_i B^i \equiv \sum_{i=1}^4 A^i B_i = A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 + A^4 B_4 = \\ &= A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 + A_4 B^4. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Взагалі, у парі німих індексів верхній та нижній індекс можемо змінювати місцями. Введений таким чином скалярний добуток є скаляр і не змінюється при довільних поворотах системи координат.

6. Квадрат 4-вектора може бути додатним, від'ємним та дорівнювати нулеві. Відповідно до цього будемо називати 4-вектори просторовоподібними, часоподібними або нульовими.

7. Просторові компоненти 4-вектора утворюють звичайний 3-вектор  $\mathbf{A}$ . Відносно трьохвимірного простору компонента  $A^4$  є скаляр. Квадрат 4-вектора часто позначають таким чином:

$$A^i A_i = \mathbf{A}^2 - (A^4)^2.$$

8. Аналогічно до трьохвимірного випадку 4-тензором другого рангу називають сукупність 16 величин, які при перетвореннях координат перетворюються на добуток двох 4-векторів:

$$T^{ik} = \alpha_i^j \alpha_m^k T^{lm}. \quad (5.38)$$

9. Компоненти 4-тензора другого рангу можуть бути зображені у вигляді контраваріантному  $T^{ik}$ , коваріантному  $T_{ik}$  або змішаному  $T_k^i$ . При цьому діє загальне правило: підняття або опускання просторових індексів не змінює знак компоненти, а переміщення часового індексу змінює знак на протилежний:

$$T^{11} = T_{11}, \quad T^{22} = T_{22}, \quad T^{12} = T_{12}, \quad T^{14} = -T_{14}, \quad T^{44} = T_{44}.$$

10. Компоненти  $T^{ik}$   $i, k = 1, 2, 3$  утворюють звичайний трьохвимірний тензор. Компоненти  $T^{i4}$  та  $T^{4i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) утворюють 3-вектори. Компонента  $T^{44}$  відносно трьохвимірного простору є скаляр.

11. Тензор  $T^{ik}$  називаємо симетричним, якщо  $T^{ik} = T^{ki}$ , та антисиметричним, якщо  $T^{ik} = -T^{ki}$ . В антисиметричного тензора всі діагональні компоненти нулеві (покажіть самостійно).

12. Найважливіше правило, яким постійно користуються при обчисленнях: у всякій тензорній (зокрема і векторній) рівності вирази в обох частинах повинні містити однакові й однаково розташовані вільні індекси (до німих індексів це, звичайно, не відноситься). Вільні індекси можемо переміщувати вгору або вниз, але обов'язково одночасно у всіх части-

нах рівності. Прирівнювати ко- та контраваріантні величини не можна.

13. Один з простіших тензорів другого рангу — це так званий *метричний тензор*

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Переходячи до іншої інерціальної системи координат за правилом (5.32), переконаємося, що цей тензор не змінний, тобто він є інваріант відносно перетворень Лоренца. За допомогою метричного тензора зв'язок між ко- та контраваріантними компонентами 4-векторів набуває вигляду

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k. \quad (5.40)$$

Очевидно, що

$$g_i^k = \delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

### §5.3.2. Диференціальні операції

Зупинимось на основних диференціальних операціях чотирьохвимірною тензорного аналізу.

1. *4-градієнт* деякого скаляра  $\phi(x^1, x^2, x^3, x^4)$  має бути 4-вектором:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \left( \nabla \phi, \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (5.42)$$

Для того, щоб визначити, який це вектор — ко- чи контраваріантний, обчислимо повний диференціал скаляра  $\phi$ :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i.$$

Очевидно, що диференціал скаляра має бути також скаляром: добуток, тут записаний, має такий самий вигляд? як і (5.34). Оскільки диференціали контраваріантних величин є все одно контраваріантними величинами, а результатом множення є скаляр (величина, що не змінюється при переході від однієї системи координат до іншої), то необхідно відмітити, що інші співмножники (похідні) є величини коваріантні.

Отже, при диференціюванні за контраваріантною змінною утворюється коваріантна величина і навпаки, при диференціюванні за коваріантною змінною — контраваріантна.

Таким чином, величина  $\partial\phi/\partial x^i$  є коваріантний градієнт.

Відповідно контраваріантний оператор градієнта має вигляд

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \left( \nabla\phi, -\frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right).$$

Часто вводячи ко- та контраваріантні величини кажуть, що контраваріантний — це такий вектор, який перетворюється як компоненти вектора події, а коваріантний — це вектор, який перетворюється як компоненти градієнта 4-вектора за контраваріантними змінними.

2. *4-дивергенція* деякого 4-вектора  $\mathbf{A}^i$  має бути скаляром, тобто інваріантом відносно перетворень Лоренца:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial A^4}{\partial t}. \quad (5.43)$$

3. *4-ротор* деякого 4-вектора  $\mathbf{A}^i$  є антисиметричним тензором другого рангу:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial x^i}. \quad (5.44)$$

4. *Оператор д'Аламбера* в чотирьохвимірних позначеннях має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square. \quad (5.45)$$

### §5.3.3. 4-швидкість

У трьохвимірному просторі швидкість  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$  не є 4-вектор.

Природно ввести 4-швидкість як похідну від 4-радіус-вектора події за власним часом:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad (5.46)$$

тому що і чисельник, і знаменник є 4-об'єктами. Користуючись цим означенням можемо обчислити його компоненти. У виразі (5.46) перейдемо від диференціювання за власним часом до диференціювання за часом лабораторної системи координат, урахувавши (5.19):

$$u^i = \gamma \frac{dx^i}{dt}. \quad (5.47)$$

Розглянемо окремо просторову частину 4-швидкості та окремо часову. Для довільної просторової компоненти (візьмемо як приклад перше, а останні обчислюються аналогічно):

$$u^1 = \gamma \frac{dx^1}{dt} = \gamma v_x, \quad u^2 = \gamma v_y, \quad u^3 = \gamma v_z. \quad (5.48)$$

Часова компонента, очевидно:

$$u^4 = \gamma \frac{dx^4}{dt} = \gamma \frac{dct}{dt} = \gamma c.$$

Тому повністю 4-вектор швидкості дорівнює:

$$\mathbf{u}^i = (\gamma \mathbf{v}, \gamma c). \quad (5.49)$$

Для цього 4-вектора (і тільки для нього) перевіримо, що квадрат його є інваріант перетворення і також перевіримо, що з цього означення випливають співвідношення (5.27), (5.28), які ми одержували, безпосередньо користуючись перетвореннями Лоренца.

Інваріантність квадрата швидкості отримуємо майже автоматично:

$$u_i u^i = \gamma^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \gamma^2 c^2 = \frac{v^2 - c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -c^2. \quad (5.50)$$

Як і належить кожному 4-вектору,  $u^i$  при переході до іншої системи координат перетворюється згідно з (5.31), тому маємо:

$$u'^1 = \gamma(u^1 - \beta u^4), \quad u'^2 = u^2, \quad u'^3 = u^3, \quad u'^4 = \gamma(u^4 - \beta u^1), \quad (5.51)$$

маючи при цьому на увазі, що  $u'^i = (\gamma'v'_x, \gamma'v'_y, \gamma'v'_z, \gamma'c)$  і також  $u^i = (\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, \gamma c)$ . Підставляючи значення компонент у (5.51) маємо:

$$\begin{aligned} \gamma'v'^x &= \gamma(\gamma v^x - \gamma\beta c) = \gamma^2(v^x - V), \quad \gamma'v'^y = \gamma v^y, \\ \gamma'v'^z &= \gamma v^z \quad \gamma'c = \gamma(\gamma c - \gamma\beta v_x) = \gamma^2 c \left(1 - \frac{v^x \cdot V}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

З останньої рівності маємо:  $\gamma' = \gamma^2 c (1 - v^x \cdot V/c^2)$ . Підставляючи цей результат у (5.52), одержуємо:

$$\begin{aligned} \gamma^2 \left(1 - \frac{v^x \cdot V}{c^2}\right) v'_x &= \gamma^2(v^x - V), \quad \gamma^2 \left(1 - \frac{v^x \cdot V}{c^2}\right) v'_y = \gamma v^y, \\ \gamma^2 \left(1 - \frac{v^x \cdot V}{c^2}\right) v'_z &= \gamma v^z. \end{aligned}$$

Очевидно, що цей результат збігається з (5.30). Таким чином введений нами 4-вектор «перевірку витримав».

#### §5.3.4. 4-прискорення

Цілком аналогічно до того, як було введено 4-швидкість, вводять 4-прискорення:

$$w^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{du^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{du^i}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{dx^i}{dt} \right). \quad (5.53)$$

Диферинціюючи співвідношення (5.50) для квадрата 4-швидкості, матимемо

$$u_i w^i = 0, \quad (5.54)$$

тобто вектори 4-швидкості та 4-прискорення взаємно ортогональні.

Розглянемо окремо просторову та часову частини 4-прискорення  $w^i = (\mathbf{w}, w^4)$ .

$$\mathbf{w} = \gamma \frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \gamma (\dot{\gamma} \mathbf{v} + \gamma \dot{\mathbf{v}}). \quad (5.55)$$

Обчислимо похідну  $\dot{\gamma}$  окремо:

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{2c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{d}{dt} (v^2).$$

Похідна від квадрата швидкості  $\frac{d}{dt}(v^2) = 2(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})$ , тому, продовжуючи обчислення, маємо

$$\dot{\gamma} = \frac{\gamma^3}{c^2} (\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}}).$$

Подальші обчислення в (5.55) ніяких ускладнень не викликають. Отже, просторові компоненти 4-прискорення:

$$\mathbf{w} = \frac{\gamma^4 (\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}})}{c^2} \mathbf{v} + \gamma^2 \dot{\mathbf{v}}. \quad (5.56a)$$

Обчислимо часову компоненту, враховуючи значення  $\dot{\gamma}$ :

$$w^4 = \gamma \frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{dx^4}{dt} \right) = \gamma c \frac{d}{dt} (\gamma) = \frac{\gamma^4}{c} (\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}}). \quad (5.56b)$$

Таким чином, вектор 4-прискорення записуємо у вигляді

$$w^i = \left( \frac{\gamma^4 (\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}})}{c^2} \mathbf{v} + \gamma^2 \dot{\mathbf{v}}, \frac{\gamma^4}{c} (\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}}) \right). \quad (5.57)$$

### §5.3.5. Функції Лагранжа та Гамільтона в СТВ

Якщо 4-швидкість вже визначено, то 4-імпульс треба визначити як

$$p^i = m u^i. \quad (5.58)$$

Так його й визначають, але визначення імпульсу згідно з (5.58) суперечить означенню функції Лагранжа (2.11), яким ми користувались у класичній механіці. Справді, для вільної матеріальної точки функція Лагранжа має вигляд (2.11):

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2}. \quad (5.59)$$

Кожна компонента узагальненого імпульсу обчислюється згідно з означенням як  $p_i = \partial L / \partial \dot{v}_i$ . Якщо обчислити, наприклад, компоненту  $p_x$  за цією формулою, то одержимо  $p_x = mv_x$ , що не збігається з (5.58),  $p_x = mv_x / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Причина в тому, що слід перевизначити функцію Лагранжа.

Механіку релятивістських частинок зручно будувати, виходячи з *принципу найменшої дії*, добре відомого з класичної (нерелятивістської) механіки: **реалізується такий рух, для якого інтеграл дії  $S$  набуває мінімального значення.**

Визначимо дію  $S$  для вільної матеріальної частинки. Очевидно, що значення дії не повинно залежати від вибору системи координат, тобто має бути лоренц-інваріантним. Однак для вільної частинки єдиним можливим інваріантом є інтервал. Отже,

$$dS \sim ds = icd\tau = ic dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

де враховано зв'язок (5.17), (5.19) між власним часом  $d\tau$  та інтервалом  $ds$ . Таким чином,

$$S = \alpha \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (5.60)$$



$\alpha$  — деяка, поки не визначена, стала. Як відомо, дія  $S$  пов'язана з функцією Лагранжа співвідношенням  $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$ . Тому функція Лагранжа вільної частинки має вигляд

$$\mathcal{L} = \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5.61)$$

Для визначення сталої  $\alpha$  скористаємось граничним нерелятивістським випадком,  $v/c \rightarrow 0$ :

$$\mathcal{L} = \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \alpha - \frac{\alpha v^2}{2c^2}.$$

Перший доданок є сталим, тобто не впливає на рух і може бути відкинутим. Другий має переходити на класичний вираз (5.59), звідки  $\alpha = -mc^2$ . Враховуючи також можливі потенціальні взаємодії, запишемо остаточно функцію Лагранжа релятивістської частинки маси  $m$ , що рухається із швидкістю  $v$  у потенціалі  $U$ :

$$\mathcal{L} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(r). \quad (5.62)$$

Зроблене означення зобов'язує нас перевизначити відповідним чином енергію частинки та функцію Гамільтона, оскільки ці величини з функцією Лагранжа нерозривно пов'язані.

Справді, енергія матеріальної точки є:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - \mathcal{L} &= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + U(r) = \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( \frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + U(r) = \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + U(r). \end{aligned} \quad (5.63)$$

При обчисленні було враховано, що просторові компоненти 4-імпульсу дорівнюють  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ . Крім того, при малих швидкостях цей вираз переходить в  $\mathcal{E} \approx \frac{mv^2}{2} + U(r) + mc^2$ .

Вираз для функції Гамільтона можемо отримати, якщо запишемо енергію через узагальнені координати та узагальнені імпульси:

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + U(r), \quad (5.64)$$

що для малих швидкостей переходить у

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} + U(r).$$

Перший доданок хоча й великий, але постійний (і не впливає на рівняння руху), а другий є добре відоме нерелятивістське значення енергії.

Отже, з усіма необхідними перевизначеннями ми ввели 4-імпульс:

$$p^i = (\gamma m \mathbf{v}, \gamma m c) \quad (5.65)$$

Відмітимо також ще одне співвідношення, яке можливо буде використовуватись у квантовій механіці та оптиці.

Просторові компоненти 4-імпульсу пов'язані з просторовими компонентами швидкості як

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v},$$

з іншого боку множник  $m\gamma$  можемо, використовуючи (5.63) при  $U(r) = 0$ , записати як

$$m\gamma = \frac{\mathcal{E}}{c^2}$$

і тому

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \mathbf{v}. \quad (5.66)$$

Отже, вираз для 4-імпульсу можемо переписати у вигляді

$$p^i = \left( \mathbf{p}, \frac{\mathcal{E}}{c} \right). \quad (5.67)$$

### §5.3.6. Коваріантне рівняння руху

Рівняння Ньютона (а також рівняння Лагранжа) не інваріантні відносно перетворень Лоренца і тому не можуть адекватно описувати рух із швидкостями порівняними зі швидкістю світла. Сформулюємо рівняння руху, яке б було інваріантним відносно перетворень Лоренца, тобто описувало рух із швидкістю, порівняною зі швидкістю світла, а при малих швидкостях переходило б у рівняння руху Ньютона.

Введемо поняття 4-сили  $K^i = (\mathbf{K}, K^4)$  як

$$K^i = mw^i. \quad (5.68)$$

Аналогічно до 4-прискорення, 4-сила ортогональна до 4-швидкості, див. (5.54)

$$u_i K^i = 0. \quad (5.69)$$

Просторові компоненти пов'язані з трьохвимірним вектором сил елементарним співвідношенням:

$$\mathbf{K} = m\mathbf{w} = \gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.70a)$$

Підставляючи цей вираз у (5.69), знаходимо рівняння для  $K^4$ :

$$u_i K^i = \frac{(\mathbf{v}\mathbf{F})}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{cK^4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0,$$

звідки легко визначити часову компоненту 4-сили

$$K^4 = \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{v}\mathbf{F})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.70b)$$

Отже, компоненти 4-сили (вона має назву 4-сили Мінковського) згідно з (5.70) мають вигляд

$$K^i = \left( \gamma \mathbf{F}, \frac{\gamma}{c} (\mathbf{v}\mathbf{F}) \right). \quad (5.71)$$

Релятивістське рівняння руху набуває форми

$$\frac{dp^i}{dt} = K^i. \quad (5.72)$$

Просторові компоненти цього рівняння становлять релятивістське співвідношення між прискоренням та силою, що в граничному випадку малих швидкостей перетворюється на рівняння Ньютона. Часова компонента, з огляду на (5.67), набуває вигляду

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\mathbf{v}\mathbf{F}). \quad (5.73)$$

Тобто швидкість зміни енергії частинки дорівнює потужності сил, що діють на неї.

### §5.3.7. 4-хвильовий вектор та ефект Доплера

Шлях, яким було введено 4-вектори, не єдиний. Зараз ми введемо 4-вектори іншим чином, а поряд з цим дамо пояснення важливого фізичного ефекту — оптичного ефекту Доплера.

Розглянемо деяку *плоску хвилю*<sup>1</sup>. Просторово-часова залежність поля визначається експонентою

$$\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

За таким законом поширюються досить часто хвилі оптичного діапазону, радіохвилі, телевізійні сигнали. Мається на увазі, що вся залежність від часу та просторових змінних міститься в експоненті, а значення полів визначаються, якщо її домножити на постійний вектор ( $\mathbf{E}_0$  або  $\mathbf{H}_0$ ).

Розглянемо умови, за яких значення полів є постійними. Очевидно, що поле має постійне значення тоді, коли фаза коливання  $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$  рівна константі. Розглянемо плоску хвилю в деякий момент часу  $t_0$ . Умова постійності поля набуває вигляду

$$\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t_0 = \text{const}, \quad (5.74)$$

<sup>1</sup>Більш докладно про плоскі хвилі дивіться в §6.1.1.

що є рівняння площини, перпендикулярної до вектора  $\mathbf{k}$ . Тобто можемо уявити собі поширення такої хвилі наступним чином. Постійне значення поля в деякий момент часу  $t_0$  зосереджене на площині (5.74). При збільшенні  $t$  константа в правій частині рівняння (5.74) збільшується і площина, на якій поле незмінне, «рухається» перпендикулярно до напрямку вектора  $\mathbf{k}$  з фазовою швидкістю  $\omega/k$ . Інше постійне значення поля знаходиться на паралельній площині й рухається аналогічним чином. Тому цю модель хвилі й називають плоскою.

Фаза  $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$  є скаляр і тому не залежить від системи відліку, в якій її вимірювати. Вона є інваріант перетворення:

$$k_x x + k_y y + k_z z - \frac{\omega}{c} ct = \text{const.} \quad (5.75)$$

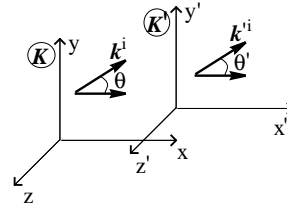


Рис. 5.4.

Легко бачити, що вираз (5.75) є скалярний добуток двох 4-векторів, як його визначали раніше (5.37). Чотири множники  $x, y, z, -ct$  є коваріантними координатами 4-вектора, після множення на інші чотири множники  $k_x, k_y, k_z, \omega/c$  утворюється величина, що не залежить від системи відліку, отже маємо право назвати її *хвильовим 4-вектором* і позначити  $k^i = (k_x, k_y, k_z, \omega/c)$ .

Як і належить 4-вектору, при переході до рухомої системи координат він перетворюється згідно з (5.9а). Нехай у системі  $K'$  є джерело (рухається разом з  $K'$ ) електромагнітної плоскої хвилі. Нехай також компоненти хвильового 4-вектора в системі  $K$  дорівнюють

$$k^i = \left( k_x, k_y, k_z, \frac{\omega}{c} \right), \quad (5.76)$$

а в системі  $K'$  відповідно

$$k'^i = \left( k'_x, k'_y, k'_z, \frac{\omega'}{c} \right). \quad (5.77)$$

Оскільки квадрат 4-вектора є інваріант перетворення, то

$$\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \mathbf{k}'^2 - \frac{\omega'^2}{c^2} = 0.$$

Цей квадрат дорівнює нулеві, оскільки йдеться про поширення світла зі швидкістю  $c$ , а тому інтервал — нульовий.

Нехай кут між віссю  $x$  та вектором  $\mathbf{k}$  дорівнює  $\theta$  (див. рис. 5.4). Відповідно між віссю  $x'$  та вектором  $\mathbf{k}'$  — кут  $\theta'$ . Тоді хвильові 4-вектори в системах  $K$  та  $K'$  запишемо у вигляді

$$k^i = \left( \frac{\omega}{c} \cos \theta, \frac{\omega}{c} \sin \theta, 0, \frac{\omega}{c} \right), \quad (5.78a)$$

$$k'^i = \left( \frac{\omega'}{c} \cos \theta', \frac{\omega'}{c} \sin \theta', 0, \frac{\omega'}{c} \right). \quad (5.78b)$$

У цих виразах враховано, що хвильовий вектор відповідним поворотом системи координат можна розташувати в площині  $XOY$ .

Запишемо перетворення Лоренца (5.31) для переходу від системи координат  $K$  до  $K'$  для вектора  $k'^i$ :

$$k'_x = \frac{k_x - \frac{v}{c} \cdot \frac{\omega}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z, \quad \frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} \cdot k_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Перепишемо четверте рівняння для  $\omega'$  у вигляді

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}, \quad (5.79)$$

де враховано (5.78a) і (5.78b). Це є абсолютно точна формула для ефекту Доплера в оптиці. Розглянемо три випадки:

1.  $\theta = 0$ . Він має місце, якщо рухома система координат «доганяє» систему  $K$ . Тоді співвідношення (5.79) спрощується до

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}} = \omega' \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}. \quad (5.80a)$$

У граничному випадку  $V \ll c$  ця формула збігається з результатами класичної теорії,  $\omega \approx \omega'(1 + V/c)$ . Джерело наближається до спостерігача і той сприймає збільшене значення частоти.

2.  $\theta = \pi$ . Такий випадок має місце, якщо рухома система координат віддаляється від системи  $K$ . В цьому випадку співвідношення (5.79) спрощується до:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c}} = \omega' \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}. \quad (5.80b)$$

Спостерігач буде фіксувати зменшене значення частоти. При  $V \ll c$  маємо формулу, що збігається з класичною  $\omega \approx \omega'(1 - V/c)$ .

3.  $\theta = \pi/2$ . Такий випадок може мати місце, коли система  $K'$ , пролітаючи повз  $K$ , випромінює електромагнітну хвилю в той момент, коли відстань між системами не змінюється (точно по перпендикуляру). Тоді має місце так званий *поперечний ефект Доплера* з частотою

$$\omega = \omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5.80c)$$

Цей ефект не має класичного пояснення, оскільки є цілком релятивістським. Він пов'язаний із тим, що час у цих двох системах координат «іде по-різному» (зверніть увагу на множник  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ). Цей ефект квадратичний.

У наближенні  $V \ll c$  формула (5.80с) набуває вигляду  $\omega \approx \omega'(1 - V^2/c^2)$ . Це дуже малі величини, тому експериментально його було досліджено лише в 1938 р. (Айвс на пучкові швидких атомів водню).

З ефектом Доплера тісно пов'язані деякі сучасні фізичні уявлення та моделі, про які необхідно розповісти.

### §5.3.8. Червоний зсув

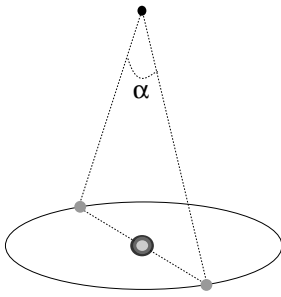


Рис. 5.5.

Нагадаємо, як у астрономії вимірюють відстані до зірок. Оскільки діаметр земної орбіти становить приблизно 300 млн км, то вимірюючи кут між площиною земної орбіти та напрямом на зірку з інтервалом у півроку, можемо з простого прямокутного трикутника визначити катет (відстань до зірки) за відомим кутом і другим катетом<sup>1</sup>.

Проте зазначеним способом можна виміряти лише відстані не більші ніж 300 світлових років<sup>2</sup>. Але ж відомо, що Всесвіт — весь матеріальний світ, що нас оточує, досяжний для спостережень — має набагато більші розміри, 10 млрд світлових років (вік Всесвіту — 10-20 млрд років). Самий термін «розмір Всесвіту» потребує уточнення (див. нижче).

Принципово інша можливість вимірювання відстаней з'явилась з 1929 р. Як виявилось, Всесвіт «розширюється», тобто Галактики «розбігаються» одна від одної. Цей факт був встановлений експериментально Хабблом (1929) за зміщенням положення спектральних ліній хімічних елементів у спектрах далеких зірок. Якщо спрямувати спектральний прилад на віддалену зірку, весь спектр як ціле буде зсунуто в бік більших довжин хвиль (у бік інфрачервоного діапазону). Причому величина цього зсуву тим більша, чим далі від нас знаходиться зірка. Оскільки «зсув» відбувається в бік збільшення довжин хвиль, то явище має назву *червоний зсув*. Якщо відстань до галактики позначити через  $R$ , а радіальну

<sup>1</sup>Кут між прямими, що з'єднують зірку та Землю і зірку та Сонце має спеціальну назву — *паралакс*. З цим кутом пов'язана загальноживана в астрономії одиниця виміру довжини — *парсек* (відстань, якій відповідає паралакс у одну секунду). Нескладні обчислення дозволяють знайти цю величину:

$$1'' = \frac{2\pi}{360 \cdot 360}, \quad 1 \text{ парсек} \approx \frac{1.5 \cdot 10^8 \text{ км}}{2\pi} (3.6)^2 \cdot 10^5 = 3.094 \cdot 10^{13} \text{ км.}$$

<sup>2</sup>Шлях, який світло проходить за рік. Світловий рік наближено дорівнює  $9.46 \cdot 10^{16}$  км.



компоненту швидкості її віддалення  $dR/dt$ , то закон, встановлений Хабблом, матиме вигляд

$$\frac{dR}{dt} = H \cdot R, \quad \text{де} \quad (5.81)$$

$$H \approx (50 - 100) \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} \approx (1.6 - 3.2) \cdot 10^{-18} \frac{1}{\text{с}}.$$

Величина  $H$  називається *сталюю Хаббла*. Вимірявши величину зсуву в одиницях довжини хвилі, неважко перейти до частотного зсуву. Яка саме частота випромінюється, відомо з лабораторних експериментів, вимірюване значення частоти також відоме, тому згідно з (5.80с) можливо обчислити швидкість «віддалення» зірки. А далі відповідно до формули (5.81) знайти відстань до неї.

Експерименти, виконані Хабблом, дозволили зробити вибір між двома моделями Всесвіту, що були відомі на той час. У 1915 р. Ейнштейн остаточно сформулював рівняння загальної теорії відносності. Практично відразу він знайшов розв'язок цих рівнянь, який існує лише при додатковому включенні в рівняння так званої космологічної сталої, що визначається середньою густиною речовини Всесвіту. Цей розв'язок тепер називають *стаціонарною моделлю Всесвіту*. Згідно з цим розв'язком Всесвіт мав бути в середньому стаціонарний, незмінний з постійним значенням «розміру». У 1922 р. Фрідман отримав розв'язок тих самих рівнянь для випадку нульового значення космологічної сталої, який тепер називають *нестационарною моделлю Всесвіту*. Відповідно до цього розв'язку близько 10-20 млрд років тому Всесвіт утворився з надзвичайно малого об'єму завдяки початковому вибуху і в наш час процес розширення продовжується. Через багато мільярдів років він зміниться на зворотний. Експериментальні дослідження Хаббла дозволили визначити космологічну сталу. За сучасними космологічними даними вона або нульова, або надзвичайно мала (менша за  $10^{-51} \text{см}^{-2}$ ). Отже, дослідження Хаббла підтвердили модель нестационарного Всесвіту.

Щодо поняття «розмір Всесвіту» слід зробити декілька коментарів. Одразу ж звернемо увагу на те, що йдеться про на-

стільки незвичні для нас масштаби, що не маємо ніяких підстав переносити наші повсякденні уявлення на цей діапазон (як не маємо права переносити результати макроскопічних спостережень на певні явища мікросвіту). Зокрема, як виявилось, наші уявлення про однорідний, ізотропний простір справедливі лише в межах звичних для нас відстаней та об'ємів. Постулати про паралельні прямі, суму кутів трикутника, евклідову геометрію тощо, треба сприймати як моделі, що добре працюють, для відносно малих просторових об'ємів, як кажуть, локально евклідові. А для розмірів, набагато більших за звичні, треба змінювати свої уявлення. Виявляється, простір Всесвіту «кривий», якщо мати на увазі досить великі відстані. Можна навіть обчислити кривизну нашого трьохвимірнього простору, як це свого часу зробив Ріман — побудував функцію, яка є кривизною трьохвимірнього простору. Звичайно, зрозуміти, що трьохвимірний простір кривий, досить важко. Ми добре розуміємо, що деяка поверхня може бути кривою і розуміємо, що таке радіус кривизни цієї поверхні. Виявляється, що кривою може бути не лише поверхня, але й простір. Це знаходить своє відображення в тому, що в кривому просторі сума кутів трикутника не дорівнює  $180^\circ$ . Правда, для того, щоб це виявити, треба брати досить великий трикутник<sup>1</sup>.

Яке поняття у нас з вами асоціюється з прямою лінією? Найкраще, напевно, світловий промінь. Та якщо спрямувати промінь у деякому напрямку і почекати досить довго (10 млрд років), то він до нас повернеться, але з іншого боку, бо його поширення відбувається прямолінійно (за нашими уявленнями) лише для відносно малих об'ємів (для них якраз і можемо вважати геометрію локально евклідовою).

Коли намагаються пояснити ці поняття, то вдаються до такого прикладу. Уявімо собі сферу досить великих розмірів і нехай на поверхні цієї сфери мешкають двовимірні істоти —

---

<sup>1</sup>Майже двісті років тому це питання цікавило ще Гаусса (1777-1855). Він навіть виконав вимірювання суми кутів трикутника, утвореного трьома гірськими вершинами (Брокен-Високий — Гаген — Інзельсберг). Проте в межах похибки експерименту він отримав результат у  $180^\circ$ . Справа в тому, що вибраний ним трикутник був досить малим. Результати своїх досліджень він не друкував — їх знайшли та надрукували вже після його смерті.

вони розуміють тільки координатні осі (а ми відповідно лише три). Що таке третя координатна вісь, вони не розуміють. Якщо на своїй сфері вони малюють невеличкий трикутник, то сума кутів такого трикутника дорівнює  $180^\circ$  — їх геометрія локально евклідова. Але якщо вони намалюють досить великий трикутник (розміри сторін порівняні з радіусом сфери), то сума кутів такого трикутника виявиться більшою за  $180^\circ$ . Їм важко зрозуміти в чому справа, промінь який вони випромінюють у одному напрямку повертається до них з іншого боку (нехай у них і світло також не буде мати третьої координати). Проте нам з вами все очевидно — їх світ кривий, оскільки сфера має скінченний радіус. Щоправда, цю аналогію не варто механічно переносити на трьохвимірний простір, але є над чим подумати.

Наведений приклад допомагає якось пережити (але не зрозуміти), чому наш Всесвіт має скінченні розміри, але до межі його дійти неможливо.

### Гравітаційний червоний зсув

Історично склалось так, що термін «червоний зсув» використовують також для схожого явища. Зміщення спектральних ліній у червоний бік може відбуватись також і під впливом гравітаційного поля матеріальних тіл. Один із висновків загальної теорії відносності полягає в тому, що годинники в полі тіл різної маси йдуть по-різному. Так, наприклад, годинник на поверхні Сонця повинен іти повільніше ніж на поверхні Землі. Загальна теорія відносності каже про сповільнення годинника в гравітаційному полі. Поблизу поверхні Землі різниця висот двох годинників в 1 м приводить до різниці показань цих годинників приблизно на  $10^{-16}$  с. Нижній годинник іде повільніше. Така мала величина значно ускладнювала безпосередні виміри в земних умовах. Проте до 60-х років цей ефект спостерігали в спектрах Сонця та інших масивних зірок. Необхідні для вимірів надточні годинники були створені в 60-х роках. З цього часу цей ефект можна спостерігати в лабораторних умовах<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>У 1960 р. Р.Паунд і Г.Рібка спостерігали гравітаційний червоний зсув у земних умовах. Наявність надточного годинника, заснованого на ефекті

## §5.4. Електродинаміка СТВ

### §5.4.1. Рівняння для потенціалів у коваріантній формі

#### 4-вектор струму

Розглянемо закон збереження заряду в диференціальній формі. Нагадаємо, що це рівняння є лоренц-інваріантним, оскільки воно — наслідок рівнянь Максвелла<sup>2</sup>. Записавши його у вигляді

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial(c\rho)}{\partial t} = 0, \quad (5.82)$$

бачимо, що в (5.82) диференціювання йде за контраваріантними змінними (результуюча величина — коваріантна), тому вводячи до розгляду контраваріантний вектор

$$j^i = (j_x, j_y, j_z, c\rho) = (\mathbf{j}, \rho c) = \rho \frac{dx^i}{dt}, \quad (5.83)$$

можемо написати (5.82) у вигляді скалярного добутку двох 4-векторів (адже при множенні цих векторів утворюється величина, що не залежить від системи спостереження — інваріант перетворення).

Таким чином, у коваріантній формі закон збереження заряду набуває вигляду

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0. \quad (5.84)$$

Тобто 4-дівергенція 4-вектора струму дорівнює нулеві. Користуючись загальним правилом (5.31) перетворення 4-векторів одержимо

$$j'_x = \frac{j_x - v\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z, \quad \rho' = \frac{\rho - \frac{v}{c^2}j_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5.85)$$

Месбауера, дозволила спостерігати ефект при різниці по висоті лише у 20 м.

<sup>2</sup>Лоренц-інваріантність рівнянь Максвелла ми ще не показали, але скоро покажемо. Поки що спираємось на цей результат як на добре відомий.

Нехай у системі координат  $K'$  заряди були нерухомі,  $\mathbf{j}' = 0$ . Згідно з формулами перетворення (5.85) у лабораторній системі координат

$$\mathbf{j} = \frac{\rho' \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

У граничному випадку  $V \ll c$  маємо класичний результат  $\mathbf{j} = \rho' \mathbf{v}$ .

#### 4-вектор потенціал

Розглянутий приклад для 4-струму можна розповсюдити на 4-потенціал. Пригадаємо лоренцеву калібровку (2.5с) і запишемо її також покоординатно:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

що, очевидно, цілком аналогічно до попереднього випадку. Тому можемо побудувати ще один 4-вектор  $A^i = (\mathbf{A}, \phi)$ , так званий 4-вектор потенціал. Його просторова частина є векторний потенціал, а часова — скалярний. Лоренцева калібровка у коваріантному вигляді має досить компактний вигляд:

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0, \quad (5.86)$$

тобто знов нульове значення 4-дивергенція. Перетворення Лоренца для  $A^i$  мають вигляд

$$\begin{aligned} A'_x &= \frac{A_x - \frac{v}{c} \phi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & A'_y &= A_y, \\ A'_z &= A_z, & \phi' &= \frac{\phi - \frac{v}{c} A_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Побудуємо тепер рівняння для потенціалів (2.10) у коваріантній формі. Завдяки тому, що оператор д'Аламбера є лоренц-інваріантним, див. (5.45), можемо відразу переписати рівняння д'Аламбера (2.10) як

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} \phi &= -\frac{4\pi}{c} (c\rho).\end{aligned}$$

Використовуючи релятивістські позначення  $A^i = (\mathbf{A}, \phi)$  і  $j^i = (\mathbf{j}, c\rho)$ , маємо остаточно

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j^i. \quad (5.88)$$

Формула (5.88) — це рівняння д'Аламбера для 4-вектора потенціалу.

### §5.4.2. Тензор електромагнітного поля

Тільки що ми показали, що векторний потенціал  $\mathbf{A}$  та скалярний потенціал  $\phi$  утворюють 4-вектор. Для обчислення компонент магнітної індукції  $\mathbf{B}$ , треба визначити ротор від  $\mathbf{A}$ . Нагадаємо, що аналогом ротора в СТВ є тензор. Позначивши 4-ротор як  $F^{ik}$ , запишемо згідно з (5.44), що

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}, \quad (5.89)$$

тому цей тензор антисиметричний:  $F^{ik} = -F^{ki}$  (і відповідно всі діагональні елементи дорівнюють нулеві:  $F^{ii} = 0$ ). Обчис-

лимо його компоненти:

$$\begin{aligned} F^{12} &= \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z; \\ F^{13} &= \frac{\partial A^3}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_3} = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = -B_y; \\ F^{14} &= \frac{\partial A^4}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_4} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = -E_x. \end{aligned}$$

Аналогічним чином обчислюється решта компонент.

Тензор  $F^{ik}$ , який називають *тензором електромагнітного поля*, має вигляд

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.90a)$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x \\ -B_z & 0 & B_x & E_y \\ B_y & -B_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.90b)$$

Вираз (5.90b) є коваріантна форма запису тензора електромагнітного поля.

Звернемо увагу на різну симетрію «електричної» та «магнітної» частини тензора електромагнітного поля: компоненти вектора  $\mathbf{E}$  утворюються вектор-стовпчик та вектор-рядок у складі тензора електромагнітного поля. У той же час компоненти  $\mathbf{B}$  розташовані в  $F^{ik}$  у тензорній формі так, якби вони не утворювали вектор.

Причина полягає в тому, що електричне поле — справжній (*полярний*) вектор, а магнітне — *псевдовектор* (*аксіальний*).

Взагалі, до полярних векторів відносять такі векторні величини, що змінюють знак при інверсії декартових осей координат. Таку властивість мають, очевидно, швидкість, прискорення, імпульс, електричне поле (адже  $\mathbf{E} \sim \mathbf{r}/r^3$ ) і деякі інші. Але легко бачити, що такі векторні величини, як момент імпульсу, момент сили та взагалі ті, що пропорційні

векторним добуткам, не змінюють знак при інверсії координат, оскільки у векторному добутку двох полярних векторів при інверсії кожний співмножник змінить знак, а добуток у цілому знак не змінить. Отже, такою простою та природною властивістю названі величини не наділені. Їх називають псевдовекторами, або аксіальними векторами. До таких звичайно належать і магнітне поле  $\mathbf{B} \sim [\mathbf{j} \times \mathbf{r}]/r^3$ , магнітний момент і деякі інші величини.

Для пояснення їх матричної природи наведемо невеличкий суто математичний приклад. Нехай потрібно наведену нижче матрицю помножити справа на вектор-стовпчик. Зробити це не важко і результат запишемо одразу:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (5.91)$$

Результат множення такої спеціальної матриці на вектор-стовпчик дуже схожий на векторний добуток двох векторів:  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  та  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ . Проте, першим співмножником є наведений псевдовектор.

Таким чином, виявилось, що електричне та магнітне поля є єдина, нероздільна субстанція. Вони є компоненти однієї й тієї самої величини — тензора електромагнітного поля (5.90). Магнітне поле є антисиметричний тензор другого рангу в трьохвимірному просторі, а електричне поле — трьохвимірний вектор. Отже, теорія відносності допомогла виявити математичну природу магнітного поля.

### §5.4.3. Коваріантний вигляд рівнянь Максвелла

Досить висока симетрія тензора електромагнітного поля зумовлює зв'язок між його компонентами:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \quad (5.92)$$



Дійсно, переписавши цей вираз у позначеннях 4-вектор потенціалу, тобто використовуючи (5.89), матимемо:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l} \right) + \left( \frac{\partial^2 A_l}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^l \partial x^i} \right) + \\ & + \left( \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 A_l}{\partial x^i \partial x^k} \right) = 0, \end{aligned}$$

де враховано, що в мішаних похідних можна змінити порядок диференціювання.

Для знаходження нетривіальних диференціальних співвідношень з (5.92) слід для трьох індексів  $i, k, l$  перебрати всі можливі сполуки з чотирьох чисел по три. Таких нетривіальних рівнянь чотири:

i	k	l
1	2	3
1	2	4
1	3	4
2	3	4

$$\frac{\partial F^{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^3} = 0, \quad (\operatorname{div} \mathbf{B} = 0)$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial F^{43}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{24}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^4} = 0 \\ \frac{\partial x^2}{\partial F^{34}} + \frac{\partial x^3}{\partial F^{41}} + \frac{\partial x^4}{\partial F^{31}} = 0 \\ \frac{\partial x^1}{\partial F^{42}} + \frac{\partial x^3}{\partial F^{14}} + \frac{\partial x^4}{\partial F^{12}} = 0 \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x^2} + \frac{\partial x^4}{\partial x^4} = 0 \end{array} \right|, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0).$$

Отже рівняння (5.92) — записана в чотирьохвимірних позначеннях перша пара рівнянь Максвелла.

Для знаходження другої пари рівнянь скористаємось рівнянням д'Аламбера в чотирьохвимірних позначеннях, (5.88). Підставляючи явний вираз для 4-вектор потенціалу через тензор електромагнітного поля, матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial A^k}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} \right\} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = - \frac{4\pi}{c} j^i, \end{aligned}$$

де враховано, що  $\partial A^k / \partial x^k = 0$  (лоренцева калібровка). Отже,

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i. \quad (5.93)$$

Распишемо це співвідношення в трьохвимірному вигляді:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{14}}{\partial x^4} = \frac{4\pi}{c} j^1 \\ \frac{\partial F^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{24}}{\partial x^4} = \frac{4\pi}{c} j^2 \\ \frac{\partial F^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{33}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{34}}{\partial x^4} = \frac{4\pi}{c} j^3 \end{array} \right., \quad \left( \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right)$$

$$\frac{\partial F^{41}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{42}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{43}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{44}}{\partial x^4} = \frac{4\pi}{c} j^4, \quad (\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho).$$

Тобто отримали другу пару рівнянь Максвелла.

Повна система рівнянь Максвелла—Лоренца в коваріантній формі набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} &= \frac{4\pi}{c} j^i, \\ \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} &= 0. \end{aligned} \quad (5.94)$$

#### §5.4.4. Перетворення Лоренца для поля

Завдяки тому, що складові поля є компоненти 4-тензора, то закон перетворення полів при переході від однієї системи координат до іншої можемо отримати лише як закон перетворення компонент тензора (5.38):

$$F^{\mu\nu} = \alpha_i^\mu \alpha_k^\nu F^{ik}.$$

Оскільки кожен тензор другого рангу  $F^{ik}$  може бути зображений як зовнішній добуток двох векторів  $F^{ik} = G^i H^k$

[13, с. 326], то закон перетворення деякої компоненти тензора можемо отримати, перетворивши кожен співмножник та потім перемноживши їх.

Випишемо у два стовпчики закони перетворення компонент векторів  $G^i$  і  $H^k$  і утворимо всі можливі добутки цих величин.

$$\begin{aligned} G'^1 &= \gamma(G^1 - \beta G^4) & H'^1 &= \gamma(H^1 - \beta H^4) \\ G'^2 &= G^2 & H'^2 &= H^2 \\ G'^3 &= G^3 & H'^3 &= H^3 \\ G'^4 &= \gamma(G^4 - \beta G^1) & H'^4 &= \gamma(H^4 - \beta H^1). \end{aligned}$$

Врахуємо також, що тензор електромагнітного поля є антисиметричним.

Оскільки координати  $x^2$  і  $x^3$  не змінюються, залишаться не змінною також компонента  $F^{23}$  (тобто  $B'_x = B_x$ ). Для компоненти  $F^{12}$  перетворення має вигляд

$$\begin{aligned} F'^{12} &= G'^1 H'^2 = \gamma(G^1 - \beta G^4) H^2 = \gamma(F^{12} - \beta F^{42}), \\ &\text{або} \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y). \end{aligned}$$

Цілком аналогічно для  $F^{13}$

$$F'^{13} = \gamma(F^{13} - \beta F^{43}), \quad \text{або} \quad -B'_y = \gamma(-B_y - \beta E_z).$$

Легко побачити, що компонента тензора електромагнітного поля  $F^{14}$  не змінюється при перетвореннях Лоренца (тобто  $E'_x = E_x$ ). Дійсно, для неї маємо таку низку рівностей:

$$\begin{aligned} F'^{14} &= G'^1 H'^4 = \gamma^2(G^1 - \beta G^4)(H^4 - \beta H^1) = \\ &= \gamma^2(G^1 H^4 - \beta G^4 H^4 - \beta G^1 H^1 + \beta^2 G^4 H^1) = \\ &= \gamma^2(F^{14} + \beta^2 F^{41}) = \gamma^2(1 - \beta^2)F^{14} = F^{14}. \end{aligned}$$

Розпишемо аналогічно решту компонент:

$$\begin{aligned} F'^{24} &= G'^2 H'^4 = \gamma G^2 (H^4 - \beta H^1) = \gamma (F^{24} - \beta F^{21}), \\ &\text{або} \quad -E'_y = \gamma (-E_y + \beta B_z), \\ F'^{34} &= G'^3 H'^4 = \gamma G^3 (H^4 - \beta H^1) = \gamma (F^{34} - \beta F^{31}), \\ &\text{або} \quad -E'_z = \gamma (-E_z + \beta B_y). \end{aligned}$$

Перетворення тривимірних компонент неважко записати в досить компактному вигляді, якщо розкласти поле на поздовжні та поперечні до напрямку руху складові:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}, & \mathbf{E}_{\parallel} &= (E_x, 0, 0), & \mathbf{E}_{\perp} &= (0, E_y, E_z) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp}, & \mathbf{B}_{\parallel} &= (B_x, 0, 0), & \mathbf{B}_{\perp} &= (0, B_y, B_z). \end{aligned} \quad (5.95)$$

Позначимо  $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$  і враховуємо, що

$$\begin{aligned} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_y V B_z + \mathbf{e}_z V B_y \\ [\mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_y V E_z + \mathbf{e}_z V E_y. \end{aligned}$$

Тоді формули для перетворень полів можна подати у формі:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (5.96a)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (5.96b)$$

Формули для оберненого переходу, як завжди, отримуємо, помінявши знак у швидкості та виконавши взаємну заміну

штрихованих і нештрихованих змінних:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Досить часто ці формули використовують у лінійному наближенні за малим параметром  $V/c \ll 1$ . Запишемо ці формули у вигляді

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{E}]. \quad (5.97)$$

Отже, якщо в рухомій системі координат магнітне поле відсутнє,  $\mathbf{H}' = 0$ , то між електричним та магнітним полями існує співвідношення

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{E}]. \quad (5.98)$$

Тобто заряд, що рухається зі швидкістю  $\mathbf{V}$ , утворює магнітне поле (5.98), що збігається з добре відомим магнітостатичним результатом (1.30).

Наприкінці цього розділу вкажимо, що з векторів  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{B}$  можна побудувати інваріантні величини відносно переходів до інших інерціальних систем координат. Для побудови інваріантів розглянемо комплексний вектор

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}.$$

Використовуючи формули перетворення полів (5.96), легко показати, що формули перетворення для цього вектора мають вигляд

$$F_x = F'_x, \quad F_y = F'_y \cos i\psi - F'_z \sin i\psi, \quad F_z = F'_z \cos i\psi + F'_y \sin i\psi,$$

де  $\text{th } \psi = V/c$ . Бачимо, що перетворення Лоренца для вектора  $\mathbf{F}$  еквівалентне повороту на уявний кут у площині  $Y0Z$ . Єдиним інваріантом відносно такого повороту є квадрат вектора:

$$\mathbf{F}^2 = E^2 - B^2 + 2i(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}).$$

Відокремлюючи дійсну та уявну частини, маємо остаточно, що *інваріантами електромагнітного поля* є комбінації:

$$E^2 - B^2 = \text{inv}, \quad (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = \text{inv}. \quad (5.99)$$

Так, наприклад, якщо в деякій системі відліку електричне та магнітне поле взаємно ортогональні, то ця властивість буде зберігатися для будь-якої системи відліку.

## Глава 6

# Випромінювання електромагнітних хвиль

Сучасна класична фізика виділяє лише три фізичні ефекти, що приводять до випромінювання електромагнітних хвиль елементарними частинками<sup>1</sup>.

1. *Гальмівне випромінювання* має місце тоді, коли заряджена частинка рухається з прискоренням (уповільненням) незалежно від того, знаходиться вона в деякому середовищі чи у вакуумі. За цією ознакою його легко відрізнити від двох інших типів випромінювання. Достатньо лише перейти до границі  $m \rightarrow 0$  ( $m$  — маса частинки). Цей граничний перехід жодним чином не впливає на черенковське чи перехідне випромінювання, тоді як гальмівне зникає.

2. *Черенковське випромінювання* виникає, якщо заряджена частинка рухається зі швидкістю більшою ніж фазова швидкість світла в даному середовищі. У рідинах та твердих тілах необхідні умови для збудження черенковського випромінювання електронами починають виконуватись при енергіях порядку  $10^5 eV$ , а для протонів (маса у 2000 разів більша) — при енергіях  $\sim 10^8 eV$ . Цей тип випромінювання добре знайомий співробітникам ядерних станцій. Воно виглядає як яскраво-голубе випромінювання води, що використовують для охолодження реактора.

3. При рівномірному русі зарядженої частинки в неоднорідному середовищі (наприклад, якщо вона перетинає межу розподілу двох середовищ з різними показниками заломлення) виникає *перехідне випромінювання*. Теоретичні та експериментальні дослідження показали, що випромінювання виникає по обидва боки від межі розподілу. Коли частинка (ра-

---

<sup>1</sup>Випромінювання атомів та молекул має суто квантову природу і не може бути пояснене на основі класичної фізики.

зом зі своїм полем) переходить у інше середовище, то поле її змінюється, що приводить до випромінювання електромагнітних хвиль. У тих випадках, коли відрізнити два останні типи випромінювання буває складно, треба взяти до уваги, що для перехідного випромінювання умова  $v > c/n$  не є необхідною, воно може спостерігатись також і при  $v < c/n$ , тоді, як умова  $v > c/n$  для черенковського випромінювання є необхідною. Звернемо увагу на те, що якщо для гальмівного випромінювання наявність середовища не є обов'язковою, то черенковське та перехідне випромінювання можуть спостерігатись лише за наявності суцільного середовища.

## §6.1. Електромагнітні хвилі

Електромагнітне поле довільної системи визначається розв'язками рівнянь Максвелла, або еквівалентним до них рівнянь д'Аламбера (2.10). При відсутності зарядів потенціали електромагнітного поля задовольняють однорідні хвильові рівняння

$$\begin{aligned} \square\phi &= 0, \\ \square\mathbf{A} &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ці рівняння, як ми побачимо нижче, мають нетривіальні розв'язки. Отже, електромагнітне поле може існувати при відсутності зарядів і струмів. Поля, що існують при відсутності зарядів, називають *електромагнітними хвилями*.

### §6.1.1. Модель плоскої хвилі

Розглянемо окремий випадок електромагнітних хвиль, коли всі компоненти поля залежать лише від однієї координати  $x$ . Такі хвилі мають назву *плоских*.

Нехай  $u$  — будь-яка компонента векторного потенціалу чи скалярний потенціал. Згідно з (6.1), функція  $u(x, t)$  задовольняє одновимірне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (6.2)$$



Для знаходження розв'язків цього рівняння зручно перейти до нових змінних

$$\begin{aligned} \xi &= x - ct, & \eta &= x + ct, \\ \text{або} \quad x &= \frac{1}{2}(\eta + \xi), & t &= \frac{1}{2c}(\eta - \xi). \end{aligned}$$

Заміна змінних у диференціальних виразах набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Отже, в нових змінних маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

звідки  $\partial u / \partial \eta = F(\eta)$ . Інтегруючи ще раз за змінною  $\eta$ , знаходимо, що

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta), \quad \text{або} \quad u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (6.3)$$

Вигляд функцій  $f$  і  $g$  не визначається з розв'язку рівняння (6.2); він має визначатись з початкових умов.

Обговоримо зміст цих розв'язків. Нехай  $g \equiv 0$ . Тоді

$$u(x, t) = f(x - ct). \quad (6.4)$$

Цей розв'язок описує хвилю, що біжить уздовж напрямку зростання  $x$  із швидкістю  $c$ , завдяки тому, що поле не змінюється для координат  $x$  та моментів часу  $t$ , пов'язаних співвідношенням

$$x - ct = \text{const.}$$

Це є рівняння *хвильового фронту* плоскої хвилі. Очевидно, що інший розв'язок,  $u(x, t) = g(x + ct)$ , є хвиля, що біжить у протилежному напрямку.

Обчислимо вирази для електричного та магнітного полів у плоскій хвилі, що біжить вправо,  $u = u(x - ct)$ . Випишемо

рівняння Максвелла для випадку вільного електромагнітного поля (2.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

У плоскій хвилі усі компоненти поля залежать лише від аргументу  $\xi = x - ct$ . Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \nabla = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (6.5)$$

де  $\mathbf{n}$  — одиничний вектор у напрямку поширення хвилі ( $x$ ). Для будь-якої векторної величини  $\mathbf{f}$  можемо обчислити дивергенцію і ротор у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{f} &= \nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{f} &= \nabla \times \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial \xi} [\mathbf{n} \times \mathbf{f}]. \end{aligned}$$

Відмітимо також, що «правила диференціювання» (6.5) дозволяють виразити просторову залежність поля в плоскій хвилі через часову: координатне диференціювання в (6.5) може бути замінено на часове

$$\nabla = -\frac{\mathbf{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (6.6)$$

Система рівнянь Максвелла набуває елементарного вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) &= 0, & \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{n} \times \mathbf{E} - \mathbf{B}) &= 0, & \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{n} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) &= 0. \end{aligned}$$

Отже, між електричним і магнітним полем існує простий алгебраїчний зв'язок

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]. \quad (6.7)$$

Електричне і магнітне поле плоскої хвилі ортогональні до напрямку поширення хвилі. На цій підставі електромагнітні хвилі називають *поперечними*. Потік енергії в плоскій хвилі згідно з (2.47) визначається вектором Умова — Пойнтінга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = cW\mathbf{n}, \quad W = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi}, \quad (6.8)$$

де  $W$  — густина енергії поля.

Звернемо також увагу на простий зв'язок між магнітним полем і векторним потенціалом. Користуючись «правилом диференціювання» (6.6), маємо

$$\mathbf{B} = \frac{[\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}]}{c}. \quad (6.9)$$

### §6.1.2. Сферичні хвилі

Знайдемо розв'язок хвильового рівняння (6.1) у вигляді так званих *сферичних хвиль*. Так називають вільні електромагнітні хвилі, в яких усі компоненти поля залежать лише від відстані до певної точки ( $i$ , звичайно, часу); тобто задача має сферичну симетрію. Така ситуація реалізується при випромінюванні точковими джерелами. Отже, шукатиме розв'язок у вигляді  $u = u(r, t)$ , що перетворює рівняння (6.1) до вигляду

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (6.10)$$

Стандартною заміною  $u = \chi(r, t)/r$  воно зводиться до ефективного одновимірного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Його розв'язок — плоскі хвилі вигляду (6.3),

$$\begin{aligned} \chi(r, t) &= f(r - ct) + g(r + ct), \\ &\text{звідки} \\ u(r, t) &= \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Перший доданок відповідає сферичній хвилі, що біжить від центра зі швидкістю  $c$ . Другий доданок описує хвилю, що була випромінена на нескінченності й біжить до центра.

## §6.2. Потенціали спізнення

Повернемось тепер до загальної постановки електродинамічної задачі. У системі існують заряди з густиною  $\rho(\mathbf{r}, t)$  і струми  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ . Потрібно визначити електромагнітне поле, що створюється такою системою. Як було зазначено вище, замість прямого обчислювання полів, простіше буває спочатку обчислити потенціали. Отже, знайдемо загальний рзв'язок рівнянь д'Аламбера (2.10).

Розглянемо розв'язок у вигляді сферичної хвилі (6.11), що біжить «від центра». Перепишемо розв'язок для скалярного потенціалу у вигляді

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\psi(t - r/c)}{r}.$$

На підставі цього виразу можемо побудувати розв'язок у вигляді хвилі, що поширюється не з початку координат, а з точки  $\mathbf{r}'$ :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\psi\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Очевидним узагальненням є суперпозиція сферичних хвиль:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{r}'} \frac{\psi' \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \\ \phi(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\psi \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Перший з цих виразів відповідає дискретному набору хвиль, центри яких розташовані в точках  $\mathbf{r}'$ , другий — неперервному набору (у функції  $\psi$  з'явився ще один аргумент, завдяки тому, що для різних хвиль вибір функції  $\psi$  може бути різним).

Зазначимо, що ці хвилі будуть розв'язком рівнянь д'Аламбера в усьому просторі, крім точки  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , тому що знаменник обертається на нуль. Однак, якщо в цих точках знаходяться заряди, така розбіжність не несе суперечностей (нагадаємо, що потенціал точкового заряду  $\phi \sim q/r$  так саме розбігається в точці розташування).

Для того, щоб визначити явний вигляд функції  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , нагадаємо, якщо б заряд був нерухомий, розв'язок відповідної електростатичної задачі згідно (1.25) мав би вигляд:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.\tag{6.13}$$

У цьому виразі навмисне відмічено час у правій та лівій частинах рівності, хоча для статичних задач це не потрібно, адже зрозуміло, що значення потенціалу в точці спостереження в момент  $t$  пов'язане зі значенням заряду елемента  $dV'$  у той самий момент.

Просте порівняння (6.12) і (6.13) дозволяє зробити висновок, що функція  $\psi$  у виразі для сферичної хвилі (6.12) несе зміст густини зарядів. Отже, розв'язок рівнянь д'Аламбера має вигляд

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.\tag{6.14a}$$

Тоді цілком аналогічно можемо записати розв'язок для векторного потенціалу:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (6.14b)$$

Розв'язки електродинамічної задачі у вигляді (6.14) мають назву *потенціалів спізнення*. Вигляд часового аргумента в цих виразах свідчить про те, що поле в точці  $\mathbf{r}$  у момент часу  $t$  визначається станом джерел у попередній момент часу:

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \quad (6.15)$$

Запізнення в цих формулах відповідає принципу причинності: рух зарядів (причина) передує появі поля (наслідок) на час  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ , необхідний для передачі електромагнітної хвилі з  $\mathbf{r}'$  у  $\mathbf{r}$ .

Цікаво, що рівнянням (2.7) та (2.9) будуть задовольняти також вирази (6.14a) та (6.14b), якщо замість знака мінус (спізнення) поставити знак плюс (випередження). Відповідно до цього потенціали мають назву *потенціалів випередження*:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Відмітимо, що надати фізичний зміст потенціалам випередження не вдається, оскільки в цьому випадку не виконується принцип причинності.

### §6.3. Випромінювання точкового заряду

Обчислимо електромагнітне поле точкового заряду, що рухається вздовж траєкторії  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$  (див. рис.6.1). Задачу

було вперше розв'язано А. Льєнаром (1898) і Е. Віхертом (1900). Цей точний розв'язок має назву *потенціали Льєнара — Віхерта*.

### §6.3.1. Потенціали Льєнара — Віхерта

Нехай  $\mathbf{r}_0(t)$  описує траєкторію частинки, вектор  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0$  — її швидкість. Позначивши повний заряд частинки  $q$ , залишимо густини заряду і струму як функції координат і часу у вигляді

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)). \end{aligned} \quad (6.17)$$

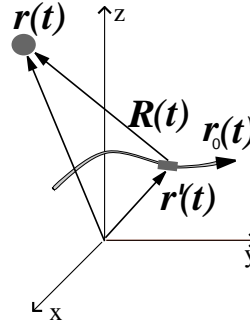


Рис. 6.1.

Запишемо загальний розв'язок рівнянь д'Аламбера у вигляді потенціалів спізнання (6.14)

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \\ t^*(\mathbf{r}') &= t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Використовуючи властивість  $\delta$ -функцій (1.11), перепишемо (6.18) у вигляді

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{r}, t) &= \int_V dV' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\rho(\mathbf{r}', t^*) \delta(\tau - t^*(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\
&= q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V dV' \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(\tau - t^*(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \quad (6.19) \\
&= q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\delta(\tau - t^*(\mathbf{r}_0))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\delta\left(\tau - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.
\end{aligned}$$

Інтегрування в останній формулі виконується з використанням властивостей  $\delta$ -функцій (1.16), яку перепишемо у вигляді

$$\delta(F(\tau)) = \sum_{t': F(t')=0} \frac{\delta(\tau - t')}{|F'(t')|}. \quad (1.16')$$

У нашому випадку

$$F(\tau) = \tau - t + \frac{R}{c}, \quad \mathbf{R}(\tau) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau). \quad (6.20)$$

Нулі цієї функції визначають значення  $t'$  як розв'язків наступного рівняння:

$$R(t') = c(t - t'). \quad (6.21)$$

Обчислимо похідну  $F'(t')$ :

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \tau}$$



Диференціюючи ліву та праву частину тотожності  $R^2 = r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 + r_0^2$ , матимемо

$$2R \frac{\partial R}{\partial \tau} = -2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 + 2\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 = -2\mathbf{R} \cdot \mathbf{v},$$

звідки

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \tau} \right|_{t'} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R}.$$

У результаті похідна  $F'(t')$  набуває вигляду

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = 1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{cR},$$

і для потенціалу (6.19) маємо

$$\phi(\mathbf{r}, t) = q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{R} \cdot \frac{\delta(\tau - t')}{\left|1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{cR}\right|} = \left. \frac{q}{R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}} \right|_{t'}.$$

Цілоком аналогічно обчислюється векторний потенціал.

Остаточно потенціали Льєнара — Віхерта запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \left. \frac{q}{\left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} \right|_{t'}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \left. \frac{q\mathbf{v}}{c \left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} \right|_{t'}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Потенціали (6.23) зручно також переписати у вигляді

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{s}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{v}}{cs}, \quad (6.24)$$

де введено позначення

$$s = R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}. \quad (6.25)$$

Необхідно підкреслити, що зовнішня простота потенціалів (6.23) оманлива. Справа в тому, що всі величини в лівих частинах рівностей беруться в момент часу  $t$ , а в правих частинах тих самих рівностей — у момент  $t'$ , що визначається з рівняння (6.21). Для того, щоб записати потенціали у звичайному вигляді, необхідно функціональну залежність  $t'(t)$  підставити в праві частини (6.23). Такий розрахунок технічно складно виконати навіть для досить простих випадків.

### §6.3.2. Поле точкового заряду

Для обчислення полів точкового заряду за формулами (2.3)

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.3')$$

слід диференціювати за точкою спостереження  $\mathbf{r}$  у момент часу  $t$ , однак вирази для потенціалів (6.23) залежать явним чином лише від  $t'$ .

У зв'язку з цим при диференціюванні за часовими та просторовими змінними у формулах (2.3') необхідно враховувати залежність  $t'$  від  $t$  (як похідну від складної функції). Обчислимо перш за все значення похідних  $\partial t' / \partial t$  та  $\text{grad } t'$ . Для цього продиференціюємо рівність (6.21) за  $t$ :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t},$$

де для похідної  $\partial R / \partial t'$  враховано вираз (6.22). Отже, можемо записати похідну у вигляді

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{s}. \quad (6.26a)$$

Цілком аналогічно, обчислюючи градієнт від виразу  $R(t') = c(t - t')$ , матимемо

$$\begin{aligned} \text{grad } t' &= -\frac{1}{c} \text{grad } R(t') = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial R}{\partial t'} \text{grad } t' + \frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \\ &= \frac{1}{c} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} \cdot \text{grad } t' \right). \end{aligned}$$

Остаточно матимемо

$$\text{grad } t' = -\frac{\mathbf{R}}{cs}. \quad (6.26b)$$

Таким чином, ми знайшли правила диференціювання у виразах (2.3'):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{s} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \text{grad}_t = \text{grad}_{t'} - \frac{\mathbf{R}}{cs} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (6.27)$$

В останньому виразі за  $\text{grad}_t$  позначено градієнт у деякій точці простору в момент часу  $t$ .

Перейдемо тепер до обчислювання полів. Використовуючи правило диференціювання (6.27), для градієнта скалярного потенціалу маємо

$$\text{grad } \phi = -\frac{q}{s^2} \text{grad}_{t'} s + \frac{q\mathbf{R}}{cs^3} \frac{\partial s}{\partial t'}.$$

Диференціювання явного виразу для  $s$  приводить до таких формул (6.25)

$$\text{grad}_{t'} s = \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \frac{\partial s}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} + \frac{v^2}{c}.$$

Враховуючи ці співвідношення, можемо записати вираз для градієнта  $\phi$  у вигляді:

$$\text{grad } \phi = -\frac{q}{s^2} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) - \frac{q\mathbf{R}}{cs^3} \left( \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} + \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} - \frac{v^2}{c} \right).$$

Обчислимо також похідну  $\partial \mathbf{A} / \partial t$ :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{qR}{cs} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{\mathbf{v}}{s} \right) = \frac{qR}{cs^3} \left( s\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v} \left( \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} + \frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} - \frac{v^2}{c} \right) \right).$$

Далі, користуючись виразом (2.3'), після нескладних перетворень обчислюємо вираз для електричного поля:

$$\mathbf{E} = \frac{q(1 - v^2/c^2)}{s^3} \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) + \frac{q}{c^2 s^3} \left[ \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right]. \quad (6.28)$$

При обчисленні (6.28) враховано очевидне співвідношення

$$\left[ \mathbf{R} \times \left[ \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right] = \left( \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - R s \dot{\mathbf{v}}.$$

Відповідні перетворення приводять до

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} [\mathbf{R} \times \mathbf{E}]. \quad (6.29)$$

Ці вирази є точні значення полів, які створюються при русі однієї частинки у вакуумі, якщо її швидкість змінюється довільно. Простий аналіз цих виразів дозволить зробити три важливі висновки для цього випадку:

1. При рівномірному прямолінійному русі зарядженої частинки другий доданок у (6.28) дорівнює нулеві. Саме він, як ми побачимо далі, обумовлює гальмівне випромінювання, тому дорівнюють нулеві поля і енергія випромінювання<sup>1</sup>.

2. Хоча перший доданок (6.28) при  $\dot{\mathbf{v}} = 0$  не зникає, однак (як буде показано нижче) внеску в поле випромінювання він не дає.

3. Для частинки, що рухається з поздовжнім (змінюється величина швидкості) або поперечним (змінюється напрям швидкості) прискоренням, буде спостерігатись гальмівне випромінювання обумовлене другим доданком у (6.28).

Власне кажучи, перше з цих тверджень є очевидним. Для того, щоб довести два інші твердження, необхідно пригадати, що мають на увазі, коли кажуть, що джерело випромінює енергію. Наприклад, який зміст вкладається у вираз: «точкове джерело випромінює щосекунди 10 джоулів енергії»? Очевидно, мається на увазі, що при нехтуванні втратами на поглинання повна енергія, яка проходить щосекунди крізь сферу довільного радіуса  $R$  (з центром у точковому джерелі), точно дорівнює 10 джоулям. Справді, оскільки при віддаленні від джерела потік енергії (кількість енергії за одиницю часу через одиницю площі) змінюється як  $1/R^2$ , а площа сфери зростає пропорційно  $R^2$ , то добуток цих величин не залежить від радіуса  $R$ . Маючи на увазі ці міркування, будемо

<sup>1</sup>Цей висновок, очевидно, не залежить від того, знаходиться частинка у вакуумі чи в суцільному середовищі.

вважати, що джерело випромінює енергію, якщо через сферу довільного радіуса щосекунди проходить незмінна кількість енергії.

Як уже було відзначено, електричне (а тому, очевидно, і магнітне) поле в (6.28) складається з двох доданків, суттєво різних за своєю природою. Перший доданок залежить лише від швидкості частинки і на великій відстані від системи змінюється як  $1/R^2$  (це досить легко побачити в нерелятивістському наближенні  $v \ll c$ ). Тобто, у хвильовій зоні напруженості електричного та магнітного полів пропорційні  $1/R^2$ . Це означає, що абсолютна величина вектора Умова — Пойнтінга буде пропорційна  $1/R^4$ . Але згідно з означенням абсолютна величина цього вектора дорівнює кількості енергії, яка щосекунди проходить через одиницю поверхні (потік енергії). Помноживши його на елемент поверхні  $R^2 d\Omega$  та проінтегрувавши за повним тілесним кутом  $\Omega = 4\pi$ , одержимо кількість енергії, яка щосекунди проходить через сферу радіуса  $R$ . Узявши до уваги наведені оцінки для полів, неважко збагнути, що ця величина буде пропорційна до  $1/R^2$ . Тобто, чим більшого радіуса сферу ми візьмемо, тим меншим буде загальне значення енергії, яка через неї пройшла. Це суперечить загальноприйнятому уявленню про випромінювання, тому необхідно зробити висновок, що перший доданок у формулі (6.28) внеску в поле випромінювання не дає. Більше того, якщо записати перший доданок у наближенні малих швидкостей руху, то в ньому неважко впізнати кулонове поле частинки.

Для другого доданку (6.28) напруженості електричного та магнітного полів у хвильовій зоні змінюються як  $1/R$ , тому абсолютна величина вектора Умова — Пойнтінга пропорційна  $1/R^2$ . Після інтегрування за повним тілесним кутом одержимо значення енергії, яка щосекунди перетинає поверхню радіуса  $R$ , пропорційне  $1/R^2$ . Тому для сфери довільного радіуса ця величина буде сталою: кількість енергії, яка щосекунди випромінюється джерелом, проходить через поверхню довільного радіуса  $R$ .

Зроблені нами висновки стосуються випадку, коли  $\varepsilon = \mu = 1$ . Ситуація змінюється, якщо частинка рухається в суцільному середовищі. Як буде видно з подальшого аналізу, навіть

при  $\mathbf{v} = \text{const}$  частинка може випромінювати електромагнітну хвилю.

## §6.4. Випромінювання нерелятивістських частинок

### §6.4.1. Потенціали Герца

Потенціали спізнення у вигляді (6.14) описують розв'язок електродинамічної задачі при відомих розподілах густини зарядів  $\rho$  і струмів  $\mathbf{j}$ . Цілком аналогічний розв'язок можна побудувати в тому випадку, коли залежність електричного  $\mathbf{P}$  (або магнітного  $\mathbf{M}$ ) моментів від часу та координат відома. Звернемо увагу, що розв'язок, про який ітиме мова, можна знайти лише у разі, коли ні  $\mathbf{P}$ , ні  $\mathbf{M}$  не залежать від напруженостей (або індукцій) полів. Звичайно, можна отримати результат традиційним шляхом — обчислити за відомими  $\mathbf{P}$  та  $\mathbf{M}$  значення  $\rho_{\text{bound}}$  і  $\mathbf{j}_{\text{bound}}$  згідно з формулами (2.32), і підставивши в праві частини (2.10) отримати відповідь у вигляді потенціалів спізнення (6.14). Розглянемо окремо два випадки:

1.  $\mathbf{P} \neq 0$ ,  $\mathbf{M} = 0$  ( $\rho_{\text{bound}} = -\text{div}\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{j}_{\text{bound}} = \partial\mathbf{P}/\partial t$ ).

Визначимо *електричний вектор Герца*  $\mathbf{\Pi}_e$  за допомогою рівностей:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t}, \quad \phi = -\text{div}\mathbf{\Pi}_e \quad (6.30)$$

Підставимо (6.30) у (2.7) та (2.9). Досить прості перетворення приводять нас до векторного рівняння:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Delta \mathbf{\Pi}_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} + 4\pi \mathbf{P} \right\} = 0.$$

Перепишемо *рівняння Герца* в канонічному вигляді

$$\square \mathbf{\Pi}_e = -4\pi \mathbf{P}. \quad (6.31)$$

Розв'язок цього рівняння записуємо у повній відповідності до (6.14):

$$\mathbf{\Pi}_e(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\mathbf{P}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (6.32)$$

Таким чином, коли залежність електричного дипольного моменту від  $t$  та  $\mathbf{r}$  задана, то після обчислення інтеграла (6.32) знаходимо векторний та скалярний потенціали відповідно до (6.30), а потім значення полів за формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{grad}(\text{div}\mathbf{\Pi}_e) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2}, \\ \mathbf{B} &= \text{rot}\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t}\right). \end{aligned} \quad (6.33)$$

2. У другому випадку  $\mathbf{P} = 0$ ,  $\mathbf{M} \neq 0$  ( $\rho_{\text{bound}} = 0$ ,  $\mathbf{j}_{\text{bound}} = c \text{rot}\mathbf{M}$ ).

Магнітний вектор Герца  $\mathbf{\Pi}_m$  визначимо таким чином:

$$\mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{\Pi}_m, \quad \phi = 0. \quad (6.34)$$

Підставимо (6.34) у (2.7) та (2.9). Рівняння, аналогічне (6.31), матиме вигляд:

$$\text{rot} \left\{ \Delta \mathbf{\Pi}_m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_m}{\partial t^2} + 4\pi \mathbf{M} \right\} = 0,$$

звідки бачимо, що магнітний вектор Герца задовольняє наступне рівняння Герца

$$\square \mathbf{\Pi}_m = -4\pi \mathbf{M}. \quad (6.35)$$

Розв'язок цього рівняння, з огляду на (6.14b), записується досить просто:

$$\mathbf{\Pi}_m(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\mathbf{M}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (6.36)$$

Таким чином, відповідно до попереднього випадку при заданному значенні магнітного дипольного моменту після обчислення інтеграла (6.36) знаходимо векторний та скалярний потенціали відповідно до (6.34), а потім значення полів за формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \Pi_e), \\ \mathbf{B} &= \text{rot rot } \Pi_m. \end{aligned} \quad (6.37)$$

В обох випадках лоренцева калібровка (2.5с) тотожно задовольняється. Наприклад, у першому випадку

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{div} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \text{div} \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} \equiv 0. \quad (6.38)$$

#### §6.4.2. Електромагнітне поле на великих відстанях

На великих відстанях від випромінювача вирази для полів значно спрощуються. Розглянемо, наприклад, вирази для потенціалів Герца:

$$\begin{aligned} \Pi_e(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\mathbf{P} \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} \right) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \\ \Pi_m(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\mathbf{M} \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} \right) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned}$$

Оберемо початок координат усередині системи. Нехай система має характерний розмір  $a$ . На великих відстанях від системи,  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'| \sim a$ , можемо наближено записати:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$



тобто  $\mathbf{n}$  — одиничний вектор у точку спостереження. У знаменниках формул для потенціалів виразом  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$  безумовно можна знехтувати, тому що йдеться про його відносне значення в порівнянні з  $r$ . У чисельнику, однак, цей вираз указує на спізнення в розподілі зарядів. Отже, слід порівнювати вираз  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')/c$  з характерним часом системи (див. нижче). Таким чином, потенціали поля на далеких відстанях набувають вигляду

$$\begin{aligned}\Pi_e(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{r} \int_V \mathbf{P} \left( \mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) dV', \\ \Pi_m(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{r} \int_V \mathbf{M} \left( \mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) dV'.\end{aligned}\tag{6.39}$$

Крім того, вважатиме, що відстань до спостерігача також значно більше за довжину хвилі випромінювача. Таке наближення має назву *хвильової зони*, тому що поле за цих умов можна розглядати як плоску хвилю. Наближення хвильової зони дозволяє значно спростити подальший аналіз — обчислення полів за відомими потенціалами.

Так, наприклад, у випадку електричного випромінювача ( $\mathbf{M} = 0$ ) для обчислення полів за відомим електричним вектором Герца слід скористатись формулами (6.33). Однак, у наближенні плоскої хвилі можливо координатне диференціювання замінити часовим за правилом (6.6), тобто

$$\text{rot} \Pi_e = -\frac{1}{c} \left[ \mathbf{n} \times \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} \right].$$

Тоді магнітне поле обчислюється за формулою

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \Pi_e) = -\frac{1}{c^2} \left[ \mathbf{n} \times \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2} \right].\tag{6.40a}$$

Для знаходження електричного поля найпростіше скористатися стандартним для плоскої хвилі виразом (6.7)

$$\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}].\tag{6.40b}$$

Слід зазначити, що формули (6.39) визначають потенціали поля на далеких відстанях при заданій поляризації та намагніченості середовища. Якщо за умовою задачі відомо розподіл вільних струмів, то зручніше скористатися виразом для векторного потенціала (6.14b). На далеких відстанях, аналогічно до (6.39), можемо записати

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{r} \int_V \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) dV'. \quad (6.41)$$

Для практичних застосувань важливим є питання про розподіл інтенсивності випромінювання. Обчислимо потік енергії в елемент тілесного кута  $d\Omega$ . Очевидно, що він дорівнює енергії, яка проходить за одиницю часу крізь поверхню  $r^2 d\Omega$ . Згадавши, що потік енергії в плоскій хвилі має вигляд (6.8), запишемо інтенсивність випромінювання у вигляді

$$dI = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} r^2 d\Omega = \frac{cB^2 r^2}{4\pi} d\Omega,$$

звідки

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi} \mathbf{B}^2. \quad (6.42)$$

Отримаємо також формули для спектрального розкладу випромінювання. Розкладемо поле  $\mathbf{B}$  на монохроматичні хвилі:

$$\mathbf{B}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{B}_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (6.43a)$$

Амплітуда хвилі  $\mathbf{B}_\omega$  визначається за допомогою оберненого перетворення Фур'є як

$$\mathbf{B}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{B}(t) e^{i\omega t} dt. \quad (6.43b)$$

Повна енергія, що випромінюється системою в кут  $d\Omega$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dI}{d\Omega} dt = \int_0^{\infty} \frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\Omega} d\omega, \quad (6.44)$$

де введено так звану *спектральну густину енергії випромінювання*  $\mathcal{E}_\omega$ . Для її обчислення скористаємось відомим інтегральним співвідношенням між квадратом функції та квадратом її Фур'є-образа (теорема Стеклова) [10]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_0^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{\pi}. \quad (6.45)$$

Згідно з (6.42) інтенсивність випромінювання в елемент телесного кута визначається квадратом напруженості магнітного поля  $\mathbf{B}$ . Отже, згідно з (6.44), (6.45) для знаходження спектральної густини енергії випромінювання в елемент телесного кута можна скористатися тією самою формулою (6.42), в якій, однак, слід замінити квадрат поля на квадрат модуля його компоненти Фур'є, а результат поділити на  $\pi$ ,

$$\frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi^2} |\mathbf{B}_\omega|^2. \quad (6.46)$$

### §6.4.3. Дипольне випромінювання

У попередньому розділі було зазначено, що в потенціалах (6.39) останній доданок  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')/c$  має важливу роль і знехтувати їм так просто не можна. Та все ж існують ситуації, коли він не впливає на поле випромінювання. Для цього необхідно, щоб цей доданок, який за порядком є  $a/c$ , був значно менший за характерний час перерозподілу зарядів, тобто за період випромінюваної хвилі  $T$ , звідки

$$a \ll cT = \lambda, \quad \text{або} \quad v \sim \frac{a}{T} \ll c.$$

Отже, ця умова означає, що заряди мають бути нерелятивістськими.

Вважаємо, що цю умову виконано. Тоді потенціали (6.39) обчислюються елементарно:

$$\begin{aligned}\Pi_e(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{r} \int_V \mathbf{P} \left( \mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' = \frac{\mathbf{d}}{r} \Big|_{t-r/c}, \\ \Pi_m(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{r} \int_V \mathbf{M} \left( \mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' = \frac{\boldsymbol{\mu}}{r} \Big|_{t-r/c}.\end{aligned}\quad (6.47)$$

При обчисленні інтегралів враховано, що електричний дипольний момент системи  $\mathbf{d}$  пов'язаний з вектором поляризації співвідношенням  $\mathbf{d} = \int \mathbf{P} dV$  і, аналогічно, магнітний дипольний момент  $\boldsymbol{\mu} = \int \mathbf{M} dV$ . Як бачимо, потенціали поля електромагнітної хвилі визначаються згідно з (6.47) значеннями дипольних моментів системи. Таке випромінювання має назву *дипольного* для електричної системи і *магніто-дипольного* для магнітної.

Напруженості полів обчислюються за формулами (6.40). Так, наприклад, у випадку електричних диполей маємо:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \left[ \mathbf{n} \times \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2} \right] = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]}{c^2 r}, \quad \mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}]. \quad (6.48)$$

Наближення	Пояснення
$a \ll r$	Поле на далеких відстанях
$\lambda \ll r$	Хвильова зона
$a \ll \lambda$	Дипольне наближення

Звернемо увагу ще раз, що випромінюють тільки заряди, що рухаються з прискоренням (прискорення дипольного моменту відповідає прискоренню частинок,  $\ddot{\mathbf{r}} = \sum q\ddot{\mathbf{r}}$ ).

Нагадаємо ще раз, при аналізі дипольного випромінювання було зроблено декілька наближень (див. табл.). Якщо зібрати всі наближення до купи, то можна зробити висновок, що дипольне наближення має місце, коли виконується умова:

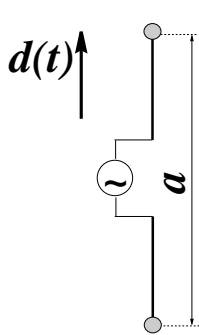
$$a \ll \lambda \ll r. \quad (6.49)$$

Обчислимо також кутовий розподіл інтенсивності випромінювання. Підставляючи явний вираз (6.48) для поля в формулу (6.42), отримаємо

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3}. \quad (6.50)$$

Після інтегрування за повному телесним кутом знайдемо повну інтенсивність дипольного випромінювання

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2. \quad (6.51)$$



Слід звернути увагу, що для замкненої система однакових частинок дипольне випромінювання відсутнє. Дійсно, у цьому разі прискорення повного дипольного моменту

$$\ddot{\mathbf{d}}_{\Sigma} = \sum q \ddot{\mathbf{d}} = \frac{q}{m} \sum m \ddot{\mathbf{r}} = \frac{q}{m} \mathbf{F}_{\Sigma} = 0.$$

Простішим випромінювачем є так званий *вібратор Герца* — металева *антена* у вигляді штири з потовщеннями на кінцях і розривом посередині для підключення (див. рис. 6.2). Дипольний момент вібратора Герца змінює своє абсолютне значення за гармонічним законом

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_0 \cos(i\omega t). \quad (6.52)$$

Для того, щоб вібратор випромінював дипольно, необхідно, щоб його розміри були менше за довжину випромінюваної хвилі:

$$a \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Позначивши кут між вібратором і напрямом на спостерігача як  $\theta$ , запишемо кутовий розподіл і повну інтенсивність

випромінювання у вигляді

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{d_0^2 \omega^4}{4\pi c^3} \cos^2 \omega t \sin^2 \theta,$$

$$I = \frac{2d_0^2 \omega^4}{3c^3} \cos^2 \omega t.$$

Усреднюючи ці залежності за період коливань вібратора маємо

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle = \frac{d_0^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \theta,$$

$$\langle I \rangle = \frac{d_0^2 \omega^4}{3c^3}.$$

Ці формули описують *діаграму направленості* розглянутої штирової антени, тобто кутовий розподіл інтенсивності випромінювання (див. рис. 6.3):

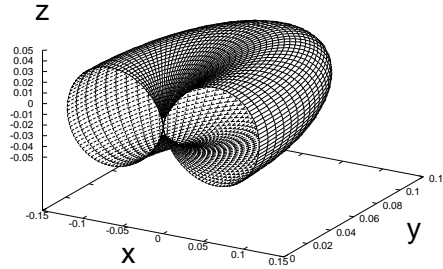


Рис. 6.3.

$$\frac{\langle dI/d\Omega \rangle}{\langle I \rangle} = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta. \quad (6.53)$$

## §6.5. Випромінювання Вавилова — Черенкова

### §6.5.1. Передісторія відкриття

У 1888 р. Хевісайд якісно розглянув рух точкового джерела в діелектрику зі швидкістю, більшою ніж швидкість світла в середовищі. Міркування, головним чином якісного характеру, привели його до таких висновків (треба нагадати, що електрон було відкрито лише в 1897 р. Дж.Дж.Томсоном).

- Оскільки  $v > c/n$ , то перед частинкою поля бути не може.

- Оскільки сферична хвиля при русі частинки поширюється зі швидкістю  $c/n$ , то геометричне місце точок усіх фронтів є конус з вершиною в точковому джерелі, а кут при вершині

$$\sin \alpha = c/(nv).$$

У 1901 р. Кельвін указав на те, що електрон, який летить у вакуумі з надсвітловою швидкістю, повинен створювати електромагнітну хвилю, аналогічну хвилям Маха в повітрі.

У 1904 р. А.Зомерфельд обчислив силу гальмування, що має діяти на електрон, який рухається з надсвітловою швидкістю у вакуумі. Згідно з розрахунками електрон мав би випромінювати електромагнітну хвилю, оскільки гальмувався б власним полем. Незважаючи на те, що вибрана постановка задачі викликає заперечення, на неї досить часто посиляються, оскільки результати розрахунку цілком відповідають реальній фізичній картині після заміни  $c \rightarrow c/n$ .

Як уже зазначалось, експериментальне відкриття черенковського випромінювання було зроблено в 1934 р. При вивченні випромінювання люмінесцентних розчинів під дією пучка швидких частинок Черенков спостерігав випромінювання, що докорінно відрізнялось від люмінісценції, оскільки мало неперервний спектр, гостру направленість уперед та не залежало від атомного номера рідини.

У 1937 р. І.Е.Тамм та І.М.Франк надрукували роботу, в якій дали теоретичне пояснення цього явища та кількісний розрахунок характеристик випромінювання.

У 1958 р. І.Е.Тамму, І.М.Франку і П.А.Черенкову було присуджено Нобелівську премію з фізики.

### §6.5.2. Утворення поверхні хвильового фронту

На основі уявлень геометричної оптики досить легко з'ясувати основні риси цього явища та пояснити утворення поверхні хвильового фронту. Нехай електрон рухається рівномірно вздовж осі  $x$  у суцільному середовищі. Позначимо швидкість світла в середовищі через  $c/n$ , а швидкість частинки — через  $v$ . При своєму русі електрон взаємодіє з атомами середовища, внаслідок чого частина його енергії може передава-

тися атомам. Тобто кожна точка траєкторії є джерелом електромагнітної хвилі. Проте не слід забувати, що випромінювання світла відбувається з кожної точки траєкторії з певним запізненням. Так, наприклад, для двох точок траєкторії, які знаходяться на відстані  $d$ , величина запізнення визначається часом  $\tau = d/v$ . Для того, щоб усі хвилі, які виходять з цих послідовних положень джерела, підсилювались унаслідок взаємної інтерференції необхідно, щоб різниця фаз між ними дорівнювала нулеві при довільному значенні  $d$ . З рис. 6.4 бачимо, що таке підсилення матиме місце тоді, коли

$$\frac{d \cos \theta}{c/n} = \frac{d}{v}. \quad (6.54)$$

Дійсно, фронт хвилі, яка поширюється з точки  $0$ , досягає положення  $AA'$  за час  $0A'/c = (dn/c) \cos \theta$ , а електрон досягає положення  $A$  за час  $d/v$ .

Якщо ці проміжки часу рівні між собою, то хвилі, випромінені з точок  $0$  та  $A$ , будуть знаходитись у фазі незалежно від величини  $d$ . Таким чином, ми одержали умову черенковського випромінювання

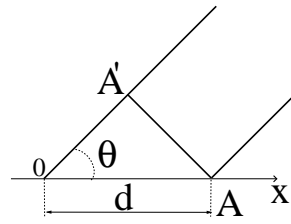


Рис. 6.4.

$$\cos \theta = \frac{c/n}{v}, \quad (6.55)$$

з якої легко бачити, що дійсне значення кута  $\theta$  може мати лише тоді, коли  $v > c/n$ . У протилежному випадку  $v < c/n$  неможливо знайти дійсне значення кута  $\theta$ , для якого мало б місце підсилення (тобто черенковського випромінювання не існує).

Ця властивість є загальна для хвиль довільної природи. Так, у акустиці випромінювання джерела, що рухається зі швидкістю, більшою за швидкість звуку, відомо досить давно (хвилі Маха); те саме можемо сказати про різні типи хвиль, що поширюються на поверхні рідини. При русі снаряда або



літака з надзвуковою швидкістю утворюється конусоподібна хвиля («конус Маха»), яка, власне, і є аналогом світлового конусу, який утворює при своєму русі електрон<sup>1</sup>. Утворюється вона як і в оптичному випадку, в результаті інтерференції хвиль, випромінених при русі тіла в суцільному середовищі. Майже кожному доводилось не один раз спостерігати, як човен, що рухається по поверхні спокійної води (зі швидкістю більшою ніж швидкість поширення хвиль по поверхні води), утворює за собою конус хвиль, кут при вершині якого залежить від співвідношення швидкості човна та швидкості поверхневих хвиль.

### §6.5.3. Потенціали поля випромінювання

Розглянемо заряджену частинку, що рухається рівномірно та прямолінійно зі швидкістю  $v > c/n$  у суцільному середовищі. Частинка своїм полем взаємодіє з багатьма атомами середовища і збуджує в ньому таким чином електромагнітну хвилю. Оскільки процес випромінювання носить колективний характер (швидка частинка взаємодіє одночасно з багатьма частинками середовища), то маємо право користуватись макроскопічними характеристиками середовища, такими як діелектрична проникність  $\epsilon$  та магнітна проникність  $\mu^2$ . Аналіз виразів (6.23) для потенціалів виконаємо спочатку для випадку  $\epsilon = \mu = 1$  ( $n = \sqrt{\epsilon\mu} = 1$ ). З цього розрахунку буде видно, що при русі зі швидкістю  $v < c$  електромагнітне поле знаходиться перед частинкою і поза нею, отже, не утворює фронт черенковської хвилі. Виявляється, що потенціали (6.23) описують кулонове поле частинки, спостережуване з

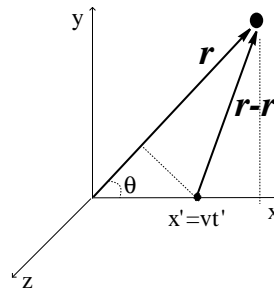


Рис. 6.5.

<sup>1</sup>Аналогія між оптикою та акустикою або гідромеханікою є відносною через те, що відповідні рівняння руху суцільного середовища є нелінійними.

<sup>2</sup>З огляду на загальність результатів у багатьох формулах присутня магнітна проникність  $\mu$ . Проте не слід забувати, що за винятком ферромагнетиків усі інші матеріали мають значення  $\mu$  досить близьке до одиниці.

рухомої системи координат.

Аналіз руху частинки в суцільному середовищі легко повторюється після заміни  $c \rightarrow c/n$ .

Для того, щоб виразити  $t'$  через  $t$ , скористаємося тією обставиною, що світло з точки  $(vt', 0, 0)$  доходить до точки спостереження за час  $t - t'$ , а відстань між цими точками можемо знайти як корінь квадратний із суми квадратів різниць однієї системи координат (див. рис. 6.5):

$$c(t - t') = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}.$$

Далі, підносячи ліву та праву частини рівності до квадрата та збираючи коефіцієнти при степенях  $t'$  одержуємо квадратне рівняння

$$(c^2 - v^2)t'^2 - 2(c^2t - xv)t' + c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

що має розв'язок

$$\begin{aligned} t' &= \gamma^2 \left( t - \frac{xv}{c^2} \right) \pm \frac{\gamma^2}{2} \sqrt{4 \left( t - \frac{xv}{c^2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{t^2 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}{\gamma^2}} \\ &= \gamma^2 \left[ t - \frac{xv}{c^2} \pm \frac{1}{c} \sqrt{(x - vt)^2 + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (y^2 + z^2)} \right], \end{aligned} \quad (6.56)$$

де використано позначення  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

Вибір знака перед коренем визначається очевидною умовою  $t - t' > 0$ , що уособлює принцип причинності — жоден наслідок не може передувати причині. Обчислимо  $t - t' > 0$ :

$$t - t' = \frac{v\gamma^2}{c^2}(x - vt) \mp \frac{\gamma^2}{c} \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \gamma^{-2})(y^2 + z^2)}. \quad (6.57)$$

Умова  $t - t' > 0$  повинна мати місце незалежно від точки простору, в якій ми спостерігаємо поле. Вона має виконуватись для осі  $x$  ( $y = z = 0$ ). Розглянемо окремо два випадки:

точка спостереження знаходиться перед частинкою  $x > vt$  і позаду неї  $x < vt$ :

$$\begin{aligned} 1. \quad t - t'_{1,2} &= \frac{\gamma^2}{c}(x - vt) \left( \frac{v}{c} \mp 1 \right), \\ 2. \quad t - t'_{1,2} &= t - t'_{1,2} = \frac{\gamma^2}{c}(x - vt) \left( \frac{v}{c} \pm 1 \right). \end{aligned} \quad (6.58)$$

В обох випадках знаменник цих виразів додатний. У першому  $(x - vt) > 0$ , тому в других дужках маємо вибрати знак плюс (нижній). У другому  $-(x - vt) < 0$ , тому в других дужках вибираємо знак мінус (нижній). Таким чином, виявляється, що в (6.56) перед коренем повинні вибрати нижній знак (мінус). Тобто незалежно від того, де знаходиться точка спостереження — перед частинкою чи позаду неї — у формулі (6.56) необхідно залишити нижній знак (мінус). Врахуємо це і перепишемо (6.56) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} t' \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) &= t - \frac{xv}{c^2} - \\ &- \sqrt{\left( t - \frac{xv}{c^2} \right)^2 - \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left( t^2 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2} \right)}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Вираз, який отримали, дозволяє легко записати явний вигляд скалярного (векторного) потенціалу для досліджуваного випадку. Звернімо увагу на знаменник формули (6.23). Безпосередньо з рис. 6.5 видно, що

$$\begin{aligned} r' - \frac{\mathbf{v} \mathbf{r}'}{c} &= c(t - t') - \frac{1}{c} v r' \cos \beta = c(t - t') - \frac{1}{c} v r' \frac{(x - vt')}{r'} \\ &= c(t - t') - \frac{v}{c}(x - vt') = c \left\{ t - \frac{xv}{c^2} - \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) t' \right\}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Вираз у фігурних дужках у (6.60) дорівнює кореню квадратному, який входить у (6.59). Тому маємо

$$r' - \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}'}{c} = c\sqrt{\left(t - \frac{xv}{c^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(t^2 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}\right)} \quad (6.61)$$

Підставляючи це значення у вираз для потенціалу і виконуючи нескладні перетворення, дістанемо:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{q}{\sqrt{\frac{(x - vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2}}. \quad (6.62)$$

Цей вираз є кулоновим потенціалом зарядженої частинки, спостережуваним із рухомої системи координат. Він, природно, збігається з результатом, який дає спеціальна теорія відносності [9].

Виконаний аналіз дозволяє досить легко перейти до розгляду випадку, коли частинка рухається в середовищі, оскільки для цього достатньо виконати в усіх формулах заміни  $c \rightarrow c/n$ . Зокрема, рівняння (6.56) після заміни  $c \rightarrow c/n$  набуває вигляду:

$$t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}n^2 \pm \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}n^2\right)(y^2 + z^2)}}{1 - \frac{v^2}{c^2}n^2}, \quad (6.63)$$

а також відповідне співвідношення (6.57) переходить у

$$t - t' = \frac{\frac{v}{c^2}(x - vt)n^2 \mp \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}n^2\right)(y^2 + z^2)}}{1 - \frac{v^2}{c^2}n^2}.$$

Тепер необхідно окремо розглядати випадок, коли частинка рухається зі швидкістю  $v < c/n$  і швидкістю  $v > c/n$ .

1.  $v < c/n$ . Для виконання принципу причинності повинно бути  $t - t' > 0$ . Верхній рядок наступної формули відповідає точці спостереження, яка знаходиться перед частинкою ( $x > vt$ ), а нижній — позаду неї ( $x < vt$ ):

$$t - t'_{1,2} = \frac{\frac{n}{c}(x - vt) \left( \frac{v}{c}n \mp 1 \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}n^2} \quad (6.64)$$

$$t - t'_{1,2} = \frac{\frac{n}{c}(x - vt) \left( \frac{v}{c}n \pm 1 \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}n^2}. \quad (6.65)$$

З огляду на те, що знаменник у обох випадках більше нуля, повинні в обох випадках вибрати нижній знак (плюс для (6.64) і мінус для (6.65)). Аналогічно до попереднього випадку одержимо скалярний потенціал у вигляді

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}n^2}} \cdot \frac{q}{\sqrt{\frac{(x - vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}n^2} + y^2 + z^2}}. \quad (6.66)$$

2.  $v > c/n$ . Співвідношення (6.64), (6.65) у цьому випадку мають такий самий вигляд, як і в попередньому, але знаменник кожного з цих дробів від'ємний. Тому елементарний аналіз знаків показує, що ніяким вибором знаків забезпечити виконання принципу причинності при  $x > vt$  неможливо. Це означає, що поля перед частинкою немає. А при  $x < vt$ , тобто позаду частинки, маємо право вибирати довільний знак. Це означає, що позаду частинки існують дві точки випромінювання (а не одна), які дають внесок у точку спостереження. Справа в тому, що випущене частинкою випромінювання рухається повільніше від самої частинки, тому, пройшовши деяку відстань, частинка випромінює наступну порцію електромагнітного поля, яке приходить у точку спостереження одночасно з уже надісланим.

#### §6.5.4. Спектральний склад випромінювання

Зробимо кількісний розрахунок, щоб обчислити розподіл енергії випромінювання за частотою та підрахувати втрати енергії [9, 18].

При розв'язанні задачі ми будемо користуватись деякими очевидними спрощеннями, які зручно перелічити заздалегідь:

1. Будемо вважати, що заряджена частинка рухається рівномірно і прямолінійно. Насправді, оскільки частинка втрачає енергію на випромінювання, швидкість її зменшується, але відповідні чисельні розрахунки всідчать про те, що втрати енергії на випромінювання є досить малими порівняно з кінетичною енергією самої частинки [9]. Зазначимо також, що втрати енергії на черенковське випромінювання набагато менші за всі інші види, так званих, «іонізаційних» втрат.

2. Очевидно, що задача має аксиальну симетрію відносно осі, яка збігається з напрямком руху частинки (вісь  $x$ ). Тому точку спостереження маємо право розташувати в площині  $XOY$ .

3. Розрахунок значень полів та енергії будемо проводити для дальньої зони, тому що відстані, на яких звичайно знаходяться вимірювальні прилади, набагато перевищують усі характерні розміри задачі (довжину хвилі, довжину траєкторії тощо.).

4. У дальній зоні утворюване частинкою випромінювання є звичайною поперечною хвилею (ТЕМ-хвиля), тому напрямок розповсюдження хвилі ( $\mathbf{k}$ ), вектори електричного ( $\mathbf{E}$ ) та магнітного ( $\mathbf{H}$ ) полів утворюють ортогональну трійку векторів.

5. Крім того, у дальній зоні поля електромагнітної хвилі залежать від координат та часу як

$$\exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (6.67)$$

де  $\omega$  — частота хвилі,  $\mathbf{k}$  — хвильовий вектор,  $\mathbf{r}$  — радіус-вектор.

Нехай заряд  $e$  рухається зі швидкістю  $\mathbf{v}$  уздовж осі  $x$ . Створювана ним густина струму

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}\delta(x - vt)\delta(y)\delta(z).$$

Вважаємо, що частинка проходить в середовищі досить великий шлях  $L \ll r$ . Векторний потенціал випромінювання в дальній зоні з урахуванням показників  $\varepsilon$ ,  $\mu$ , аналогічно до (6.41) має форму

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu}{r} \int_V \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', t - n \frac{r}{c} + n \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} \right) dV'. \quad (6.68)$$

Підставивши вираз для густини струму в (6.68) одержимо:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu e \mathbf{v}}{c r} \int_{-L/2}^{L/2} \delta \left( x' - vt + \frac{vn}{c} r - \frac{vn}{c} x' \cos \theta \right) dx', \quad (6.69)$$

де  $\theta$  позначає кут між напрямом руха частинки і напрямом на спостерігача  $\theta$  (див. рис. 6.5).

Для визначення спектрального складу випромінювання необхідно скористатись фур'є-перетворенням усіх полів та потенціалів електромагнітного поля.

Застосувавши перетворення (6.43) до (6.69), матимемо:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\omega &= \frac{e \mu \mathbf{v}}{cr} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-L}^L dx' \delta \left( x' - vt + \frac{vn}{c} r - \frac{vn}{c} x' \cos \theta \right) e^{i\omega t} = \\ &= \frac{e \mu \mathbf{v}}{cv} \frac{e^{i\frac{\omega}{c} nr}}{r} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i \left( \frac{\omega}{v} - \frac{\omega}{c} n \cos \theta \right) x'} dx'. \end{aligned}$$

Згідно означення абсолютна величина хвильового вектора  $k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$ . Користуючись цим, зручно переписати вираз для фур'є-компоненти векторного потенціалу в такому

вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\omega &= \frac{e\mu\mathbf{v}}{cv} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\left(\frac{\omega}{v} - k \cos \theta\right)x'} dx' \\ &= \frac{e\mu\mathbf{v}}{cv} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{2 \sin [(\omega/v - k \cos \theta)L/2]}{(\omega/v - k \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Звернімо увагу, що множник  $e^{ikr}/r$  перед інтегралом є не що інше, як сферична хвиля, що поширюється від частинки. У цьому немає нічого дивного, оскільки джерело випромінювання в даному випадку є точковим. Звертаємо також увагу на таке. При інтегруванні (6.70) в граничному випадку  $k \rightarrow \infty$  отримуємо  $\delta(\omega/v - k \cos \theta)$ , яка вказує на те, що випромінювання буде зосереджене в нескінченно вузькому конусі з кутом при вершині, який задовольняє умову  $\cos \theta = c\mu/v$ . Як ми побачимо далі, такий результат одержано через те, що ми обчислюємо випромінювання частинки, яка пройшла нескінченно довгий шлях.

Визначимо спектральний склад енергії випромінювання. Користуючись формулою (6.46) можемо записати вираз для кутового розподілу спектральної густини енергії випромінювання:

$$\frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi^2} |\mathbf{B}_\omega|^2 \cdot \frac{ck}{\omega\epsilon\mu^2}. \quad (6.71)$$

Останній множник в цьому виразі з'явився завдяки середовищу [9]. В плоскій хвилі компоненти поля зв'язані з векторним потенціалом співвідношенням

$$\mathbf{B} = i[\mathbf{k} \times \mathbf{A}], \quad |\mathbf{B}_\omega|^2 = k^2 |\mathbf{A}_\omega|^2 \sin^2 \theta.$$

Підставляючи явний вираз для  $\mathbf{A}_\omega$  з (6.70), матимемо

$$\frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\Omega} = \frac{\omega^2 e^2}{4\pi^2 c^3} \mu \sqrt{\epsilon\mu} \cdot \frac{4 \sin^2 [(\omega/v - k \cos \theta)L/2]}{(\omega/v - k \cos \theta)^2}. \quad (6.72)$$



Знайдемо спектральну густину енергію, що випромінюється в повний тілесний кут  $4\pi$ . Скориставшись граничним переходом (1.12)

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2(\alpha x)}{\alpha x^2} = \delta(x),$$

після інтегрування за тілесним кутом  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ , запишемо вираз для спектральної густини енергії випромінювання у вигляді:

$$\mathcal{E}_\omega = \frac{\omega e^2 \mu L}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{k^2 v^2} \right). \quad (6.73)$$

Повна енергія випромінювання

$$\mathcal{E} = \int_{\beta n > 1} \beta n > 1 d\omega \mathcal{E}_\omega = \frac{L e^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \mu(\omega) \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)} \right) \omega d\omega. \quad (6.74)$$

Нерівність на нижній межі інтегралу (6.74) означає, що інтегрування по частоті треба виконувати лише для тих значень  $\omega$ , для яких швидкість частинки більша ніж швидкість світла в середовищі.

Формула (6.74) визначає повні енергетичні втрати частинки на черенковське випромінювання. Для випадку немагнітного середовища ( $\mu = 1$ ) втрати енергії на одиницю шляху рівні:

$$\frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right) \omega d\omega. \quad (6.75)$$

Ця формула є добре відомий класичний результат, що був одержаний І.Е.Таммом і І.М.Франком.

## §6.6. Випромінювання низки електричних диполів

У цьому розділі висвітлюється досить цікаве питання: «Чи можна спостерігати черенковське випромінювання у вакуумі?» На перший погляд, воно викликає подив, оскільки скрізь

у попередньому викладі стверджувалось, що необхідною умовою випромінювання є рух зарядженої частинки зі швидкістю більшою ніж фазова швидкість світла в речовині<sup>1</sup>. Для суцільного середовища ця умова легко виконується, оскільки фазова швидкість світла в середовищі менша ніж  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с. Проте ясно, що саме з такою швидкістю світло поширюється у вакуумі й рухатись швидше за нього ніяке матеріальне тіло не може. Це положення сумнівів не викликає, оскільки воно випливає зі спеціальної теорії відносності та надійно підтверджується експериментальними даними. Але сам факт існування швидкостей більших за  $c$  не повинен викликати заперечення. Достатньо нагадати такі приклади, як фазова швидкість світла в середовищі з показником заломлення меншим за одиницю або фазова швидкість електромагнітної хвилі у хвилеводі. Більше того, навіть групова швидкість світла може бути більшою від швидкості світла в області аномальної дисперсії. Це не приводить до суперечності, оскільки поняття групової швидкості має точний зміст лише за відсутності поглинання та розпливання сигналу. Не важко показати, що в області аномальної дисперсії швидкість основної частини сигналу менша ніж  $c$ , а швидкість переднього фронту строго дорівнює  $c$ .

Насправді прикладів руху зі швидкістю більшою ніж  $c$  можна навести багато (у подальшому викладі ми розглянемо ще декілька). Важливо зразу відмітити дві обставини:

- В усіх цих випадках не порушується принцип причинності, оскільки з надсвітловою швидкістю рухається не окрема частинка, а деякий «об'єкт».
- Надсвітлова швидкість руху є не уявною, а цілком реальною, треба лише пам'ятати, що це не є рух якогось матеріального тіла.

Продемонструємо підтвердження висловлених положень на прикладі випромінювання низки електричних диполів, розташованих уздовз однієї прямої [4]. Випромінювання такої

---

<sup>1</sup>Матеріал цього розділу базується головним чином на роботах [5, 6]

системи називається «гольчатим»<sup>1</sup>. Будемо вважати, що розміри диполів малі порівняно з довжиною випромінюваної хвилі. Вважатимемо також, що вздовж прямої збуджено хвилю поляризації:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_0 \cdot \delta(y)\delta(z) \exp(-i\omega t + ikx). \quad (6.76)$$

Скористаємось формулою (6.39) для потенціалів Герца на великих відстанях (відстань до спостерігача  $r$  набагато перевищує розмір системи  $L$ ):

$$\Pi_e(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \int_V \mathbf{P} \left( \mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) dV'.$$

Позначивши кут між напрямом низки диполей і напрямом на спостерігача  $\theta$ , з урахуванням (6.76), маємо

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \mathbf{P}_0 \cdot \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}r - i\omega t\right)}{r} \cdot \int_{-L/2}^{L/2} dx' \exp\left[i\left(k - \frac{\omega}{c} \cos \theta\right)x'\right] \\ &= \mathbf{P}_0 \cdot \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}r - i\omega t\right)}{r} \cdot \frac{\sin\left[\left(k - \frac{\omega}{c} \cos \theta\right)L/2\right]}{\left[k - \frac{\omega}{c} \cos \theta\right]}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Пригадуючи, який вигляд має графік функції  $\sin x/x$ , легко накреслити діаграму направленості випромінювання дипольної низки (див. рис. 6.6). Це буде досить «гостре» випромінювання з максимумом у напрямі черенковського кута

$$\cos \theta = \frac{c}{v_{\text{ph}}}, \quad v_{\text{ph}} = \omega/k. \quad (6.78)$$

В граничному випадку  $L \rightarrow \infty$  (нескінчена низка диполів), маємо

$$\Pi_e = 2\pi \mathbf{P}_0 \cdot \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}r - i\omega t\right)}{r} \cdot \delta\left(k - \frac{\omega}{c} \cos \theta\right), \quad (6.79)$$

<sup>1</sup>У російськомовній літературі — «игольчатое излучение».

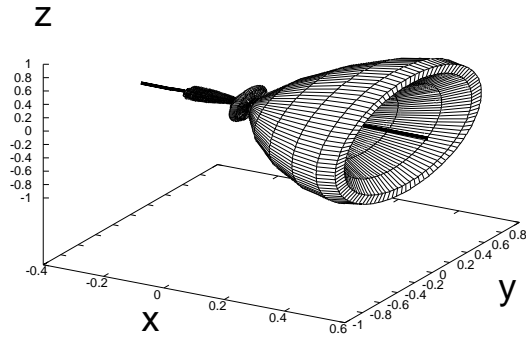


Рис. 6.6.

де використано зображення  $\delta$ -функції (1.12):

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\alpha x)}{x}.$$

Звертаємо увагу на те, що множник  $\exp(i\frac{\omega}{c}r)/r$  є звичайною сферичною хвилею, що поширюється від точкового джерела (частинки). З (6.79) легко бачити, що випромінювання зосереджене в нескінченно тонкому конусі з кутом  $\theta$  при вершині, що задовольняє умову черенковського випромінювання (6.78), з якої випливає, що нескінченна низка диполів буде випромінювати лише в тому випадку, якщо збуджена хвиля рухається з фазовою швидкістю  $v_{ph} > c$ . У протилежному випадку  $v_{ph} < c$  випромінювання відсутнє.

### §6.6.1. Випромінювання дипольної площини

Розглянемо досить цікавий випадок випромінювання нескінченної площини магнітних чи електричних диполів. Щоб наочно уявити собі, з чим маємо справу, пригадаймо безмежне

пшеничне поле. За спокійної погоди всі стебла стоять нерухомо та вертикально. Коли піднімається вітер, то по цьому безмежному полю починають рухатись своєрідні «хвилі» — окремі колоски відхиляються в різні боки від вертикального положення. Ототожнимо окремий колосок з електричним або магнітним дипольним моментом. У стані спокою всі моменти орієнтовані перпендикулярно до площини. Якщо, наприклад<sup>1</sup>, прикласти змінне електричне (або магнітне) поле, то по «полю диполів» будуть рухатись дипольні хвилі.

Вважатимемо, що нам вдалось «збудити» на площині двовимірну плоску хвилю магнітних диполів:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}_0 \cdot \delta(z) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (6.80)$$

Для розглядуваного випадку вектори  $\mathbf{k}$  та  $\mathbf{r}$  є «плоскими» (розташовані в площині  $XOY$ ).

Не викликає сумніву, що в кожному з цих випадків хвильовий рух диполів збудить у оточуючому просторі електромагнітну хвилю. Цікаво, що можна знайти точний (а не наближений) розв'язок цієї задачі. Для цього доведеться повернутись до точного розв'язку електродинамічної задачі у вигляді магнітного вектора Герца (6.36):

$$\mathbf{\Pi}_m(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Розвернемо систему координат таким чином, щоб напрям поширення хвилі  $\mathbf{k}$  збігався з віссю  $x$ . Тоді  $\mathbf{k}\mathbf{r} = kx$ .

Врахуємо також, що у формулі (6.36) значення аргументів магнітного моменту необхідно змінити таким чином:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{M}_0 \cdot \delta(z) \exp\left(-i\omega t + \frac{i\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + ikx'\right) \quad (6.81)$$

<sup>1</sup>Нас не цікавить, як саме збуджувались ці хвилі. Важливо лише яку вони мають залежність від часу та просторових координат

Підставляючи (6.81) у вираз для  $\Pi_m$ , одержимо

$$\Pi_m = \mathbf{M}_0(t, x) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\exp\left(\frac{i\omega}{c}\sqrt{r^2 + z^2} + ik(x' - x)\right)}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}},$$

де введено позначення  $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$  і

$$\mathbf{M}_0(t, x) = \mathbf{M}_0 \exp(-i\omega t + ikx).$$

Буде зручно скористатись полярними координатами  $x' - x = r \cos \varphi$ ,  $y' - y = r \sin \varphi$ . Тоді

$$\begin{aligned} \Pi_m &= \mathbf{M}_0(t, x) \int_0^{\infty} r dr \frac{\exp\left(\frac{i\omega}{c}\sqrt{r^2 + z^2}\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \varphi} d\varphi \\ &= 2\pi \mathbf{M}_0(t, x) \int_0^{\infty} J_0(kr) \frac{\exp\left(\frac{i\omega}{c}\sqrt{r^2 + z^2}\right) r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \end{aligned} \quad (6.82)$$

де  $J_0$  — функція Бесселя нульового порядку дійсного аргументу. У формулі (6.82) використано добре відоме інтегральне зображення функцій Бесселя:

$$J_0(z) = \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \varphi} d\varphi.$$

Для інтеграла (6.82) зручно перейти від експоненціальної форми запису до синусів та косинусів, використавши формулу Ейлера:

$$\begin{aligned} \Pi_m &= 2\pi \mathbf{M}_0(t, x) \int_0^{\infty} J_0(kr) \frac{\cos\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{r^2 + z^2}\right) r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ &\quad + 2\pi i \mathbf{M}_0(t, x) \int_0^{\infty} J_0(kr) \frac{\sin\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{r^2 + z^2}\right) r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Кожен з інтегралів у (6.83) обчислюється точно (а не наближено). Скориставшись формулами (6.737) [7, с. 775], матимемо

$$\int_0^{\infty} J_0(kr) \frac{\cos\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{r^2+z^2}\right) r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= \begin{cases} -\sqrt{\frac{\pi z}{2}} \cdot \frac{N_{-\frac{1}{2}}\left(|z|\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k^2}\right)}{\sqrt[4]{\frac{\omega^2}{c^2}-k^2}}, & \left|\frac{\omega}{c}\right| > k, \\ \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \cdot \frac{K_{\frac{1}{2}}\left(|z|\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\right)}{\sqrt[4]{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}}, & \left|\frac{\omega}{c}\right| < k. \end{cases} \quad (6.84a)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(kr) \frac{\sin\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{r^2+z^2}\right) r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi z}{2}} \cdot \frac{J_{-\frac{1}{2}}\left(|z|\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k^2}\right)}{\sqrt[4]{\frac{\omega^2}{c^2}-k^2}}, & \left|\frac{\omega}{c}\right| > k, \\ 0, & \left|\frac{\omega}{c}\right| < k. \end{cases} \quad (6.84b)$$

Функції Бесселя половинного аргументу виражаються через елементарні функції [7, с. 981] таким чином:

$$N_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x), \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x),$$

$$K_{\pm\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x), .$$

Тут  $N_{-\frac{1}{2}}(x)$  та  $K_{\pm\frac{1}{2}}(x)$  — функції Неймана та Макдональда напівцілого індексу. Враховуючи ці рівності в (6.84), а також повертаючись до експоненціальної форми запису, матимемо:

$$\mathbf{P}_m = 2\pi \mathbf{M}_0(t, x) \begin{cases} \frac{\exp\left(i|z|\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\right)}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}}, & \left|\frac{\omega}{c}\right| > k, \\ \frac{\exp\left(-|z|\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}, & \left|\frac{\omega}{c}\right| < k. \end{cases} \quad (6.85)$$

Використовуючи (6.85), неважко обчислити напруженності електричного та магнітного полів. Для того, щоб спростити запис, скористаємось позначенням

$$q = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}, & \left|\frac{\omega}{c}\right| > k, \\ i\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, & \left|\frac{\omega}{c}\right| < k. \end{cases} \quad (6.86)$$

У такому разі значення полів записуються в досить простому вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{e}_y \cdot \frac{2\pi i \mathbf{M}_0 \omega k^2}{cq} \exp(-i\omega t + ikx + iq|z|), \\ \mathbf{H} &= \{\mp q \mathbf{e}_x + k \mathbf{e}_z\} \frac{2\pi i \mathbf{M}_0 k}{cq} \exp(-i\omega t + ikx + iq|z|), \end{aligned} \quad (6.87)$$

де  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  — орти декартової системи координат, знаки « $\mp$ » відносяться до випадків  $z > 0$  та  $z < 0$  відповідно.

Також досить простим є вираз для вектора Умова — Пойнтінга:

$$\mathbf{S} = \frac{\pi \omega M_0^2 k^2}{q^2 c^2} \{\pm q \mathbf{e}_z + k \mathbf{e}_1\}, \quad (6.88)$$



де верхній знак (плюс) треба брати над площиною, а нижній (мінус) – під нею.

Таким чином, якщо фазова швидкість хвилі, збудженої на поверхні, перевищує швидкість світла, то є поле випромінювання (черенковське). Якщо швидкість збурених хвиль менша світлової, то випромінювання відсутнє — поле експоненціально спадає за межами площини.

## Література

- [1] Алексеев А.И. Сборник задач по электродинамике. — М., 1977.
- [2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, В 2т. — М., 1965—1966. — Т.1 — 1965; Т.2 — 1966.
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М., 1988.
- [4] Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. — М., 1955.
- [5] Гинзбург В.Л.//ЖЭТФ. — 1972. — Т. 62 — С. 173.
- [6] Болотовский Б.М., Гинзбург В.Л.//УФН. — 1972. — Т. 106 — С. 577.
- [7] Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1962.
- [8] Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
- [9] Жмудський О.О. Випромінювання Вавилова—Черенкова. — К., 1999.
- [10] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. — М., 1988. — Т.2.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. — М., 1992. — Т.8.
- [12] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М., 1987.
- [13] Метью Дж., Уокер Р. Математические методы физики. — М., 1972.
- [14] Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т.1. — М., 1958.
- [15] Орир Дж. Физика. — М. 1969.
- [16] Сивухин Д.В. Общий курс физики. — М., 1975. — Т.1.
- [17] Сивухин Д.В. Общий курс физики. — М., 1977. — Т.3.
- [18] Сугаков В.Й. Електродинаміка. — К., 1964.
- [19] Тамм И.Е. Основы теории электричества. — М., 1966.
- [20] Туров Е.А. Материальные уравнения электродинамики. — М., 1963.
- [21] Физический энциклопедический словарь. М., 1984.
- [22] Физическая энциклопедия. В 5 т. — М., 1988—1998. — Т.1 — 1988; Т.2 — 1990; Т.3 — 1992; Т.4 — 1994; Т.5 — 1998.

# Показчик

- антена, 189
- вектор
  - аксіальний, 159
  - Герца
  - — електричний, 182
  - — магнітний, 183
  - контраваріантний, 136
  - коваріантний, 136
  - полярний, 159
  - Умова-Пойнтінга, 52
- вібратор Герца, 189
- випромінювання
  - гальмівне, 167
  - дипольне, 188
  - магніто-дипольне, 188
  - перехідне, 167
  - черенковське, 167
- власний час, 128
- гіромагнітне відношення, 97
- діаграма направленості, 190
- диполь
  - електричний, 92
  - магнітний, 21
  - магнітний, 96
- дисперсія
  - просторова, 41
  - часова, 41
- домени, 101, 114
- доменна стінка, 114
  - товщина, 115
- досліди
  - Айвса, 152
  - Ампера, 23
  - Гейлера, 13
  - Барнетта, 98
  - Біо і Савара, 23
  - Ейнштейна і де Гааза, 98
  - Кавендиша, 18, 66
  - Майкельсона і Морлі, 119
  - Паунда — Ребка, 155
  - Плімптона та Лафонта, 18
  - Фарадея, 27
  - Хаббла, 152
- енергія
  - електромагнітного поля, 52
  - обмінної взаємодії, 101, 108
- ефект
  - Ааронова-Бома, 38
  - Доплера, 150
- ефір, 116, 118
- задача
  - Діріхле, 54
  - Неймана, 55
- закон
  - Біо-Савара-Лапласа, 22
  - електромагнітної індукції Фарадея, 28
  - збереження енергії електромагнітного поля, 53
  - збереження заряду, 13
  - Кулона, 18
- заряд, 13

- вільний, 32
- зв'язаний
  - струм, 43
  - заряд, 43
- інтервал, 122
  - нульовий, 127
  - просторовоподібний, 127
  - світлоподібний, 127
  - часоподібний, 127
- інваріанти електромагнітного поля, 166
- калібровка
  - аксіальна, 33
  - гамільтонова, 33
  - кулонова, 27, 33
  - лоренцева, 33
- квадруполь, 92
- конденсатор Роговського, 89
- ларморова прецесія, 107
- лоренцеве скорочення, 131
- магнетик
  - легкооплощинний, 112
  - легкоосний, 112
- магнетон, 98
  - Бора, 98
  - ядерний, 98
- метод електростатичних зображень, 74
- метрика простору-часу, 122
- модель Всесвіту
  - нестационарна, 153
  - стаціонарна, 153
- намагніченість, 43
- паралакс, 152
- парсек, 152
- перетворення
  - Галілея, 117
  - градієнтне (калібрувальне), 27, 33
  - Лоренца, 123
- поляризація, 43
- потенціал
  - векторний, 26, 32
  - випередження, 174
  - скалярний, 20, 32
  - спізнення, 174
- потенціали Льєнара — Віхерта, 175
- правило
  - Ленца, 28
- принцип
  - відносності Галілея, 116
  - відносності Ейнштейна, 120
  - найменшої дії, 144
  - суперпозиції електростатичних полів, 18
- рівняння
  - Герца, 182, 183
  - д'Аламбера, 35
  - Ландау — Лівшиця, 106
  - Лапласа
    - для векторного потенціалу, 27
    - для скалярного потенціалу, 21
  - Максвелла — Лоренца, 31
  - Максвелла для суцільного середовища, 39

- неперервності, 14
  - Пуассона
  - для векторного потенціалу, 27
  - для скалярного потенціалу, 21
  - хвильове, 35
- сила
- електрорушійна, 28
  - зображення, 74
  - Лоренца, 22
- спектральна густина енергії випромінювання, 187
- спеціальна теорія відносності (СТВ), 116
- спін, 99
- стала
- неоднорідного обміну, 109
  - Планка, 99
  - тонкої структури, 100
  - Хаббла, 153
- тензор
- метричний, 139
  - електромагнітного поля, 159
- теорема
- Фробеніуса, 125
  - Умова-Пойнтінга, 53
- феромагнетик, 101
- одноосний, 112
- формула Макдональда, 73
- функція
- Гамільтона, 36
  - Лагранжа, 35
  - відгуку, 40
- хвильова зона, 185
- хвильовий фронт, 169
- хвиля
- електромагнітна, 168
  - — плоска, 148, 168
  - — сферична, 171
  - спінова, 112
- частота ларморова, 107
- червоний зсув, 152
- чотирьохвимірний вектор, 135
- хвильовий, 149

Навчальне видання

**Жмудський Олександр Олександрович  
Шека Денис Дмитрович**

## **Основи електродинаміки. Частина I**

Навчальний посібник для студентів природничих  
факультетів

Редактор В.Р. Філь

*Оригінал-макет виготовлено авторами за допомогою видавничої  
системи  $\text{\LaTeX}2\epsilon$  з використанням шрифтів Computer Modern*

Редакційно-видавничий центр «Київський університет»  
03017, Київ, бульв. Т. Шевченка, 14, кімн. 43, тел: 221-32-22.  
Підписано до друку                      Формат                      Вид. №  
Друк офсетний. Наклад                      Умовн. друк. арк.  
Надруковано у «Поліграфцентрі Київського університету ім. Тараса Шевченка»  
03017, Київ, бульв. Т. Шевченка, 14, тел: 224-01-05.