Алгебра подій (самостійна робота)

Вивчаємо операції над підмножинами деякої непорожньої множини, яку позначатимемо X. Вона вибирається довільно, але в ході міркувань не повинна змінюватись (інакше можуть виникати логічні парадокси). Її ще називають універсальною, однак це не властивість, а роль.

Нагадати позначення перетину, об'єднання, доповнення, теоретико-множинної різниці $A \setminus B$, також ввести операцію $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \equiv A \setminus B \cup B \setminus A$, результат якої називається симетричною різницею. Дати логічну і геометричну інтерпетації. Виписати випливаючі безпосередньо з означення властивості операції $\triangle$:

$$A \triangle B = B \triangle A, \quad A \triangle A = \varnothing, \quad A \triangle A^c = X, \quad A \triangle \varnothing = A, \quad A \triangle X = A^c.$$

Пояснити взаємно однозначний зв'язок між скінченномісними теоретико-множинними операціями і таблицями істинності.

1

Довести за допомогою таблиці істинності закон асоціативності $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Ця задача дозволяє писати $A \triangle B \triangle C$ без дужок.

2

Довести еквівалентність

$$A \triangle B = C \triangle D \Longleftrightarrow B \triangle C = A \triangle D$$

`Розв'язання.` $A \triangle B = C \triangle D \Longrightarrow A \triangle B \triangle C = D$ і далі зрозуміло.

3

Двоє гравців по черзі стріляють у ціль. Виразити кожну з подій

$$A_i = \{i\text{-й гравець влучив перший}\}, \quad i = 1,\ 2,$$

через події

$$A_{ij} = \{i\text{-й гравець влучив у своїй } j\text{-й спробі}\}.$$

`Відповідь:`

$$A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} \left(A_{1j}^c \cap A_{2j}^c \right) \right) \cap A_{1n}, \quad A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} \left(A_{1j}^c \cap A_{2j}^c \right) \right) \cap A_{1n}^c \cap A_{2n}.$$

Пояснити тільки, що перетин порожньої сукупності підмножин деякої множини є, за означенням, сама ця множина (подібно до того, як добуток порожньої сукупності співмножників покладається рівним одиниці).

* * *

Вводимо поняття індикатора множини: $\chi_A(x) = \left[\begin{array}{l} 1,\ x \in A, \\ 0,\ x \in X \setminus A. \end{array} \right.$
(Мені більше до вподоби позначення I_A, але я пишу так, як у задачнику). Виписати з короткими коментарями замість доведень (а що тут доводити?) тотожності

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B = \chi_A \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B.$$

Крім того, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$, і ця рівність – окремий випадок формули включень-виключень. Справді, при фіксованому x функція $\chi_A(x)$ аргументу A адитивна.

4

Довести тотожність $\chi_{A\triangle B} = |\chi_A - \chi_B|$.

5

Довести тотожність $A \cap (B\triangle C) = (A \cap B)\triangle(A \cap C)$.
`Вказівка.` Скористатись результатом попередньої задачі.

6

Пов'яжемо з кожною послідовністю $(A_n, n \in \mathbb{N})$ множин (подій) такі дві множини (події): A^* складається з тих елементів універсальної множини, які належать безлічі з множин A_n; A_* складається з тих елементів універсальної множини, які належать зрештою всім A_n (тобто всім A_n, крім, можливо, скінченного числа їх). У термінах подій: наста́ння A^* означає настання безлічі з подій A_n; настання A_* рівносильне настанню всіх A_n, крім, можливо, скінченного числа їх.

Задача: виразити A^* і A_* через $A_n, n \in \mathbb{N}$, а χ_{A^*} і χ_{A_*} – через $\chi_{A_n}, n \in \mathbb{N}$.

`Відповідь.`

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\chi_{A^*} = \inf_{n\geqslant 1} \sup_{k\geqslant n} \chi_{A_k}, \quad \chi_{A_*} = \sup_{n\geqslant 1} \inf_{k\geqslant n} \chi_{A_k}.$$

Останні дві рівності можна записати ще у вигляді

$$\chi_{A^*} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{A_n}, \quad \chi_{A_*} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \chi_{A_n}.$$

Це дає підставу назвати множини A^* і A_* відповідно *верхньою і нижньою границями послідовності* (A_n) і перепозначити на $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n$ і $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n$ відповідно.

* * *

Нагадати означення декартового добутку множин A_1 і A_2 :

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2\}.$$

Якщо ми хочемо розглядати декартове множення разом із іншими теоретико-множинними операціями, то повинні задати дві універсальні множини, X_1 і X_2 (які можуть і співпадати), і з них утворити ще й третю – $X_1 \times X_2$.

7

Виразити індикатор декартового добутку через індикатори співмножників і порівняти одержаний вираз із виразом індикатора перетину множин.

`Відповідь:` $\chi_{A_1\times A_2}(x_1, x_2) = \chi_{A_1}(x_1)\chi_{A_2}(x_2)$, тоді як для перетину раніше було знайдено $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$. В обох виразах стоїть добуток функцій, тільки в другому він звичайний, поточковий, а в першому – тензорний (кожний співмножник входить зі своїм власним аргументом).

8

Довести тотожність $A_1 \times A_2 \cap B_1 \times B_2 = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$.
`Вказівка.` Скористатись результатом попередньої задачі.

Додому. Довести співвідношення: $A^c\triangle B^c = A\triangle B$, $(A\triangle B)^c = A^c\triangle B = A\triangle B^c$, $(A \cup B)\triangle(C \cup D) \subset (A\triangle C) \cup (B\triangle D)$.