

СТАТИСТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
В РАДИОФИЗИКЕ

Г. А. Пономарев
В. Н. Пономарева
В. П. Якубов

**Томский орден Октябрьской Революции и ордена Трудового
Красного Знамени государственный университет
им. В.В.Куйбышева**

Г.А.Пономарев, В.Н.Пономарева, В.П.Якубов

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАДИОФИЗИКЕ

Практикум

с применением диалого-вычислительных комплексов

**Издательство Томского университета
Томск - 1989**

УДК 621.37.1:519.21

Пономарев Г.А., Пономарева В.Н., Якубов В.П. Статистические методы в радиофизике: Практикум о применением диалого-вычислительных комплексов. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989. -235 с. - 40 к. 1000 экз. 2302020100).

Применение диалого- вычислительных комплексов (ДВК) на практических занятиях по курсу "Статистическая радиофизика" предоставляет широкие возможности для имитационного моделирования процессов, оперативной обработки больших массивов данных, для выявления статистических закономерностей и их наглядного отображения в форме таблиц и графиков. В учебном пособии обобщен опыт проведения такого практикума на радиофизическом факультете Томского университета. Оно содержит в краткой конспективной форме сведения об основных статистических методах анализа флуктуационных процессов, методах обработки результатов измерений, тексты задач, необходимые пояснения и задания по комплексным, обобщающим работам с применением ДВК.

Для преподавателей и студентов радиофизических и радиотехнических специальностей, а также может быть полезным аспирантам и инженерам как краткое справочное руководство по применению статистических методов.

Рецензент - доктор физико-математических наук

А.Ф. Терпугов

2302020100

II _____ 44 - 89

177(012)-89

© Издательство Томского университета, 1989

1. ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальное исследование случайных процессов, как правило, связано с выполнением большого объема измерений и требует сложной статистической обработки данных. Это создает значительные трудности в формировании у студентов практических навыков статистических исследований. Введение на практических занятиях работ с применением диалого-вычислительных комплексов (ДВК) открывает широкие возможности для имитационного моделирования реальных процессов, оперативной обработки больших массивов данных, для выявления статистических закономерностей и их наглядного отображения в форме таблиц и графиков. В учебном пособии обобщен опыт постановки и проведения по курсу "Статистическая радиофизика" практикума, основой которого является математическое моделирование процессов и численный эксперимент на ЭВМ. В учебном плане практикуму предшествует курс по программированию, решению прикладных задач на ЭВМ, а также соответствующая вычислительная практика. Пособие содержит в краткой конспективной форме справочный материал по статистическим методам анализа флуктуационных процессов, методам обработки результатов радиофизических измерений, тексты задач, необходимые пояснения и комплексные задания по работам исследовательского характера с применением ДВК. Каждая работа предваряется двумя-тремя занятиями по решению задач, цель которых - познакомиться с методами исследования и сформировать необходимые навыки практического применения теоретических знаний. Задания по работам, формы отчетов и приведенные в пособии базовые программы на языке Бейсик представляют примеры возможных вариантов, перечень и содержание которых при желании можно сделать более разнообразными. В оглавлении разделы, содержащие постановку и описание работ с применением ДВК, отмечены звездочками. Для более глубокого знакомства со статистическими методами и особенностями случайных процессов можно в качестве основной литературы рекомендовать [1-9, 11-13]. Ссылки на дополнительную литературу даются в тексте по ходу изложения материала.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

2.1. Понятие случайного процесса

Реальные физические процессы всегда подвержены случайным возмущениям. Природа их различна: турбулентные неоднородности среды вызывают случайные изменения рефракции к рассеяние распространяющихся в ней волн, что порождает флуктуации интенсивности и фазы волны в месте приема; в радиотехнических устройствах тепловое движение микрочастиц / молекул, ионов, электронов /, случайные вариации плотности электронных потоков порождают так называемые тепловые и дробовые шумы, которые искажают полезный сигнал, ухудшают чувствительность приборов и точность измерений.

Когда влияние случайных возмущений мало, временной ход процесса устойчиво воспроизводится при повторных испытаниях и может быть достаточно точно описан детерминированной функцией времени, скажем,

$$y = S(t) \quad , \quad t \in (0, T) \quad , \quad (2.1)$$

где T — время наблюдения.

Но если влияние случайных возмущений значительно, то, проявляясь различным образом при повторных испытаниях, они делают непохожими регистрируемые реализации процесса, так что результатом \mathcal{N} испытаний оказывается не одна, а \mathcal{N} функций

$$y = \xi_k(t) \quad , \quad t \in (0, T) \quad k = 1, 2, \dots, \mathcal{N} \quad (2.2)$$

Было бы неправильно при описании процесса отдать предпочтение какой-либо из них. Влияние случайных возмущений можно предоставить в полной мере, располагая не одной реализацией, а достаточно большим их числом, строго говоря, всеми возможными реализациями процесса. Таким образом, приходим к следующему понятию случайного процесса.

Определение. Случайный процесс $\xi(t), t \in (0, T)$ определяется множеством всех возможных реализаций $\{\xi_k(t)\}$, получаемых при различных

исходах испытаний.

Множество всех возможных реализаций случайного процесса называется ансамблем реализаций и представляет собой бесконечное / во многих случаях несчетное / множество функций.

Рассмотрим значения процесса $\xi(t)$ в фиксированный момент времени t_1 . Очевидно, оно является случайной величиной, множество возможных значений которой есть $\{\xi_k(t_1)\}$. Это множество / или эту случайную величину / называют сечением процесса в момент времени t_1 .

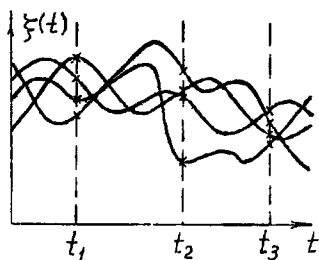


Рис 2 1

На рис. 2.1 представлена выборка из четырех реализаций некоторого случайного процесса и указаны их значения, принадлежащие сечениям в моменты времени t_1, t_2 и t_3 .

С этой точки зрения случайный процесс можно рассматривать как однопараметрическое семейство случайных величин, параметром для которого является время t .

Аналогичным образом вводится более общее понятие случайной функции одной или нескольких переменных, которым совсем не обязательно придавать какую-либо определенную интерпретацию, хотя в приложениях речь идет большей частью о случайных функциях времени и пространственных координат.

Для случайных процессов принята следующая классификация:

- а/ если множество значений $\xi(t)$ непрерывно, то говорят о случайном процессе общего типа;
- б/ если множество значений $\xi(t)$ дискретно, то случайный процесс называется дискретным;
- в/ в свою очередь, дискретным может оказаться множество значений переменной t ; в этом случае говорят о случайной последовательности общего типа, если множество значений $\xi(t)$ непрерывно;
- г/ если как множество значений t , так и множество значений $\xi(t)$ дискретны, то случайная последовательность называется дискретной.

На рис. 2.2 показаны примеры реализаций случайного процесса общего типа / кривая а /, дискретного случайного процесса / ломаная линия б /, случайной последовательности общего типа / последовательность точек в / и дискретной случайной последовательности / последовательность точек г /. Для наглядности уравнения реализации б, в, г получены соответствующим преобразованием реализации а: квантованием значений ξ , регистрацией значений ξ в заданные дискретные моменты времени, совместным применением этих двух преобразований.

Случайный процесс общего типа будем называть непрерывным случайным процессом, если с вероятностью, равной единице, все его реализации непрерывны.

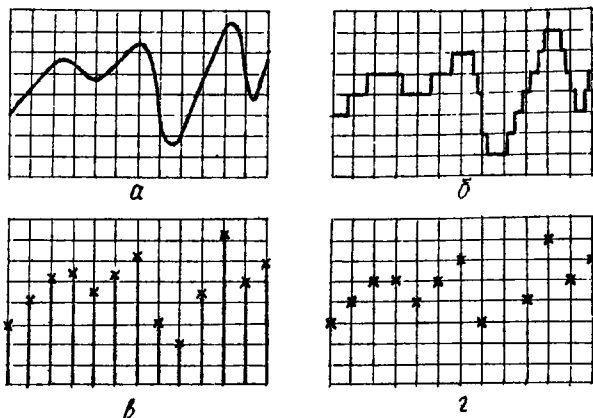


Рис. 2.2

2.2. Функции распределения

Когда процесс $\xi(t)$ является случайным, вместо математического описания (2.1) или (2.2) отдельных его реализаций используется вероятностное описание всего ансамбля в целом. Первым шагом в построении такого описания можно считать задание вероятностного распределения значений процесса в любом его сечении, затем - статистической зависимости значений в двух произвольных сечениях, в трех сечениях и так далее. Следуя этой схеме, определим соответствующие распределения вероятности.

Пусть $\xi(t)$ принимает только действительные значения. Выделим из \mathcal{N} реализаций

$$\left\{ \xi_k(t) \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, \mathcal{N},$$

те n реализаций, значения которых в момент времени t не превышают некоторого числа ξ . Их относительное число n/\mathcal{N} при неограниченном увеличении числа испытаний будет стремиться к некото-

рому постоянному пределу, равному вероятности того, что $\xi(t) \leq \xi$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} = P(\xi(t) < \xi)$$

Эта вероятность зависит как от уровня ξ так и от выбора момента времени t и называется одномерной функцией распределения случайного процесса

$$F(\xi; t) = P(\xi(t) < \xi)$$

Очевидно, что разность двух значений функции распределения

$$F(\xi + \Delta\xi; t) - F(\xi; t)$$

определяет вероятность того, что значение $\xi(t)$ окажется в интервале $(\xi, \xi + \Delta\xi)$. Если $F(\xi; t)$ при фиксированном значении t непрерывна и дифференцируема в точке ξ , то при $\Delta\xi$ стремящемся к нулю, можно записать

$$\begin{aligned} P(\xi < \xi(t) < \xi + \Delta\xi) &= F(\xi + \Delta\xi, t) - F(\xi; t) = \\ &= f(\xi; t) \Delta\xi + O(\Delta\xi), \end{aligned}$$

где

$$f(\xi; t) = \frac{\partial F(\xi; t)}{\partial \xi}$$

называется плотностью одномерного распределения или одномерной плотностью вероятности.

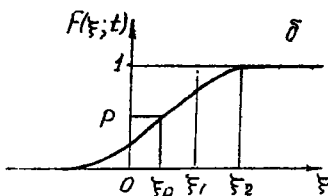
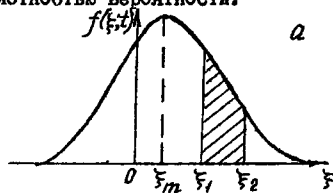


рис. 2.3

Функция распределения представляется интегралом от плотности

$$F(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\xi} f(\xi'; t) d\xi'$$

поэтому ее называют также интегральной функцией распределения / интегральным законом /, а плотность вероятности - дифференциальной функцией распределения / дифференциальным законом /.

На рис. 2.3, как пример показаны графики дифференциального / кривая а / и соответствующего ин-

тегрального / кривая σ / распределений, Точка максимума плотности вероятности ξ_m называется модой распределения. Если плотность вероятности имеет один максимум, то она называется унимодальной, при этом мода ξ_m случайного значения $\xi(t)$ является его наиболее вероятным значением. Распределения, имеющие две и более мод, называются соответственно двумодальными и многомодальными.

Вероятность того, что значение $\xi(t)$ окажется в интервале (ξ_1, ξ_2) , очевидно, равна интегралу

$$P(\xi_1 \leq \xi(t) \leq \xi_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi, t) d\xi$$

и по графику дифференциального закона определяется как площадь, ограниченная в этом интервале кривой $f(\xi, t)$ и осью абсцисс, а по графику интегрального закона — как разность значений $F(\xi_2)$ и $F(\xi_1)$.

Одномерные законы распределения часто характеризуют квантилями. Квантиль порядка ρ одномерного распределения есть такое значение ξ_ρ случайной величины ξ для которого

$$P(\xi < \xi_\rho) = F(\xi_\rho) = \rho$$

Например, на рис. 2.3, б, вероятности ρ по графику интегрального закона соответствует значение ξ_ρ . Следовательно, ξ_ρ есть квантиль порядка ρ распределения вероятности: с вероятностью ρ случайное значение $\xi(t)$ не превышает число ξ_ρ . Квантиль порядка $1/2$ называется медианой. Случайное значение $\xi(t)$ с одинаковой вероятностью может оказаться как меньше, так и больше медианы $\xi_{1/2}$.

Функции $F(\xi; t)$ и $f(\xi; t)$ полностью определяют сечение случайного процесса $\xi(t)$ в любой произвольный момент времени t , но не дают ответа на вопрос, как будут распределены значения $\xi(t_2)$ в момент времени t_2 если в момент t_1 значение $\xi(t_1)$ уже известно, или о том, какова статистическая связь между значениями процесса в двух различных сечениях. Необходимо вероятностное описание совместности двух сечений.

Рассмотрим вновь \mathcal{N} реализаций случайного процесса $\xi(t)$. Выделим из них те \mathcal{N}_2 реализации, значения которых в момент t_1 не превышали числа ξ_1 а в момент t_2 были меньше числа ξ_2 . Относительная доля $\mathcal{N}_2/\mathcal{N}$ таких реализаций при неограниченном увеличении \mathcal{N} определит вероятность совместного выполнения условий

$$\xi(t_1) < \xi_1, \quad \text{и} \quad \xi(t_2) < \xi_2 :$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_2}{N} = P(\xi(t_2) < \xi_2, \xi(t_1) < \xi_1)$$

или же определяет двумерную функцию распределения

$$F(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = P(\xi(t_1) < \xi_1, \xi(t_2) < \xi_2) \quad (2.3)$$

При условии, что $F(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)$ при выбранных значениях t_1 и t_2 обладает свойствами непрерывности и дифференцируемости как функция переменных ξ_1 и ξ_2 , можно определить плотность двумерного распределения / двумерную плотность вероятности /

$$f(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \quad (2.4)$$

и плотность условного распределения

$$f(\xi_2; t_2 / \xi_1; t_1) = \frac{f(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)}{f(\xi_1, t_1)}, \quad (2.5)$$

которые дают ответ на поставленный вопрос.

Напомним, что выражение (2.5) является следствием теоремы умножения законов распределения, по которой плотность двумерного распределения значений, относящихся к разным моментам времени t_1 и t_2 то есть к разным сечениям случайного процесса, равна плотности распределения одного из значений, умноженной на условную плотность распределения другого значения

$$f(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = f(\xi_2; t_2 / \xi_1, t_1) f(\xi_1; t_1)$$

Если $\xi(t_2)$ и $\xi(t_1)$ статистически независимы, то

$$f(\xi_2; t_2 / \xi_1; t_1) = f(\xi_2; t_2),$$

и двумерная плотность оказывается равной произведению двух одномерных плотностей

$$f(\xi_2, \xi_1; t_2, t_1) = f(\xi_2, t_2) f(\xi_1, t_1)$$

Как и в предыдущем случае, функция распределения равна интегралу от плотности вероятности, но теперь уже по двум переменным

$$F(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\xi_1} d\xi' \int_{-\infty}^{\xi_2} d\xi'' f(\xi', \xi''; t_1, t_2),$$

также для этих двух функций используются названия интегрального и дифференциального законов.

Интегральная функция условного распределения определяется интегрированием дифференциального условного закона

$$F(\xi_2; t_2 / \xi_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\xi_2} f(\xi''; t_2 / \xi_1, t_1) d\xi''$$

Подобным же образом можно построить n -мерные функции распределения случайного процесса

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(\xi(t_1) < \xi_1; \xi(t_2) < \xi_2, \dots, \xi(t_n) < \xi_n)$$

и n -мерные плотности вероятности

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n),$$

описывающие статистическую связь между значениями $\xi(t)$ в n произвольных моментах времени. По мере увеличения n последовательность этих характеристик будет давать все более подробное описание случайного процесса. Совокупность всех конечномерных распределений полностью определяет случайную функцию $\xi(t)$.

Способ, каким были построены конечномерные распределения, показывает, что их совокупность не может быть произвольной, а должна удовлетворять следующим очевидным условиям, которые мы сформулируем для функций плотности вероятности:

$$1. \quad f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \geq 0 \quad (2.6)$$

для всех $\xi_k \in (-\infty, \infty)$, $t_k \in (-\infty, \infty)$, $k = 1, 2, \dots, n$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = 1 \quad (2.7)$$

- условие нормировки.

$$3. \quad f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ f(\xi_{p_1}, \xi_{p_2}, \dots, \xi_{p_n}; t_{p_1}, t_{p_2}, \dots, t_{p_n}), \quad (2.8)$$

где p_1, p_2, \dots, p_n - любая перестановка индексов $1, 2, \dots, n$, - условие симметрии относительно всех пар переменных ξ_p, t_p

$$4. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \quad (2.9)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}; t_1, t_2, \dots, t_{n+m}) d\xi_{n+1} d\xi_{n+2} \dots d\xi_{n+m}$$

- условие согласованности.

Последние два условия показывают, что если известна n -мерная плотность вероятности, то интегрирование ее по "лишним" переменным позволяет получить все m -мерные плотности для $m < n$

2.3. Статистическое усреднение. Моментные функции.

Многомерные плотности распределения вероятностей являются наиболее полными характеристиками случайных процессов. Вместе с тем для решения многих практических задач достаточно рассмотрения более простых характеристик: среднего значения, дисперсии, корреляционных функций. Их применение по возможности без непосредственного обращения к законам распределения уже предоставляет широкие возможности для расчетов в прикладных исследованиях.

Наиболее простой, но вместе с тем важной характеристикой случайного процесса является среднее значение по ансамблю реализаций. Его вычисление можно провести, взяв для начала конечную выборку, содержащую \mathcal{N} реализаций, и рассчитав по ней выборочное среднее

$$\langle \xi(t) \rangle_{\mathcal{N}} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{K=1}^{\mathcal{N}} \xi_K(t)$$

Увеличивая затем объем выборки \mathcal{N} , получим последовательность выборочных средних $\langle \xi(t) \rangle_{\mathcal{N}}$, сходящуюся при $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ к среднему значению по ансамблю реализаций

$$\langle \xi(t) \rangle = \lim_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{K=1}^{\mathcal{N}} \xi_K(t),$$

которое будет уже неслучайной функцией времени t

Условимся в дальнейшем угловые скобки $\langle \rangle$ всегда использовать для обозначения операции статистического усреднения, то есть усреднения по ансамблю реализаций.

Среднее значение процесса является, таким образом, вполне регулярной характеристикой, некоторой средней функцией, около которой различным образом флуктуируют конкретные реализации случайного процесса. На рис. 2.4 показаны несколько реализаций процесса / тонкие линии / и среднее значение / жирная линия /.

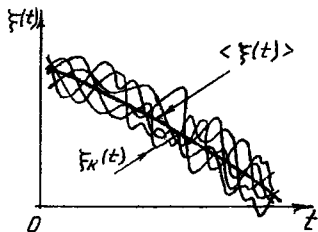


Рис. 2.4

Плотность вероятности $f(\xi, t)$ позволяет иначе вычислить среднее значение. Поскольку вероятность $f(\xi, t)d\xi$ можно рассматривать как относительную частоту повторяемости значения ξ в заданном сечении, то среднее для этого сечения значение можно вычислить как интеграл

$$\langle \xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi; t) d\xi$$

Случайный процесс часто удобно представлять в виде суммы регулярной составляющей $\langle \xi(t) \rangle$ и флуктуационной добавки $\delta \xi(t) = \xi(t) - \langle \xi(t) \rangle$ среднее значение которой, очевидно, равно нулю

$$\xi(t) = \langle \xi(t) \rangle + \delta \xi(t) \quad , \quad \langle \delta \xi(t) \rangle = 0$$

В таком представлении различные реализации случайного процесса отличаются лишь флуктуациями, регулярные же компоненты для всех реализаций совпадают. В качестве характеристики флуктуаций, определяющей рассеяние возможных реализаций случайного процесса относительно среднего значения, часто принимают среднеквадратическое отклонение, определяемое как корень квадратный из среднего квадрата флуктуаций

$$\sigma_{\xi}(t) = \sqrt{\langle \delta \xi^2(t) \rangle} = \sqrt{\langle [\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle]^2 \rangle}$$

Для расчетов более удобна дисперсия флуктуаций / дисперсия случайного процесса /, равная квадрату среднеквадратического отклонения

$$\sigma_{\xi}^2(t) = \langle \delta \xi^2(t) \rangle = \langle \xi^2(t) \rangle - \langle \xi(t) \rangle^2$$

и характеризующая рассеяние в квадратичной мере.

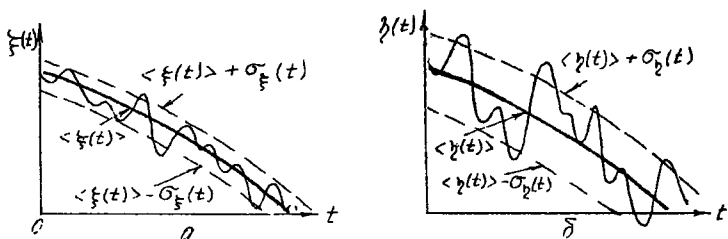


Рис 2.5

На рис. 2.5 изображены тонкими линиями графики реализаций двух процессов $\xi(t)$ (рис.2.5а) и $\zeta(t)$ (рис.2.5б), средние значения которых равны, а дисперсии различны

$$\sigma_{\xi}^2(t) < \sigma_{\zeta}^2(t)$$

Жирные линии представляют средние значения $\langle \xi(t) \rangle = \langle \zeta(t) \rangle$, пунктирные линии - значения $\langle \xi(t) \rangle \pm \sigma_{\xi}(t)$ и $\langle \zeta(t) \rangle \pm \sigma_{\zeta}(t)$, то есть дают наглядное представление о мере рассеяния реализаций.

Среднее значение и дисперсия случайного процесса относятся к моментным функциям одномерного распределения. Их определение аналогично определению моментов случайной величины. Начальными моментными функциями принято называть средние по ансамблю реализаций значения целых степеней случайного процесса, при этом степень определяет порядок моментной функции

$$m_n(t) = \langle \xi^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n f(\xi, t) d\xi$$

Среднее значение процесса - это начальная моментная функция первого порядка

$$m_1(t) = \langle \xi(t) \rangle$$

Центральные моментные функции определяются как средние значения целых степеней разности

$$[\xi(t) - m_1(t)] = \delta \xi(t),$$

описывающей флуктуации процесса относительно среднего значения

$$M_n(t) = \langle \delta \xi^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi - m, (t)]^n f(\xi; t) d\xi$$

Другими словами, это моменты центрированного случайного процесса $\delta \xi(t)$ имеющего при любом значении t среднее значение, равное нулю.

Очевидно, дисперсия является центральной моментной функцией второго порядка

$$M_2(t) = \sigma^2(t)$$

Одномерные моментные функции являются характеристиками одного сечения. Совместными характеристиками двух и большего числа сечений, учитывающими их статистические связи, являются многомерные моментные функции. Моментная функция

$$m_{ij\dots q}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle \xi^i(t_1) \xi^j(t_2) \dots \xi^q(t_n) \rangle$$

зависящая от n несопадающих аргументов t_1, t_2, \dots, t_n , называется n -мерной начальной моментной функцией порядка $i+j+\dots+q$. Наряду с начальными часто используются многомерные центральные моментные функции

$$M_{ij\dots q}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle \delta \xi^i(t_1) \delta \xi^j(t_2) \dots \delta \xi^q(t_n) \rangle$$

или моменты центрированного случайного процесса.

При уменьшении временных интервалов между моментами t_1, t_2, \dots, t_n статистические связи между сечениями уоливаются, и в предельном случае $t_1 = t_2 = \dots = t_n$ многомерная моментная функция порядка $i+j+\dots+q$ переходит в одномерную функцию того же порядка

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_n} m_{ij\dots q}(t_1, t_2, \dots, t_n) = m_{i+j+\dots+q}(t_1) = \langle \xi^{i+j+\dots+q}(t_1) \rangle;$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_n} M_{ij\dots q}(t_1, t_2, \dots, t_n) = M_{i+j+\dots+q}(t_1) = \langle \delta \xi^{i+j+\dots+q}(t_1) \rangle.$$

Наоборот, статистические связи между сечениями ослабевают по мере увеличения интервалов и останоятся пренебрежимо малыми при достаточно большом разное моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n , при этом много-

Мерная моментная функция вырождается в произведение одномерных моментных функций

$$m_{i,j,\dots,q}(t_1, t_2, \dots, t_n) = m_i(t_1) m_j(t_2) \dots m_q(t_n);$$

$$M_{i,j,\dots,q}(t_1, t_2, \dots, t_n) = M_i(t_1) M_j(t_2) \dots M_q(t_n)$$

2.4. Корреляционная функция

Из многомерных моментных функций в прикладных задачах важную роль играет центральная моментная функция второго порядка

$$M_{11}(t_1, t_2) = \langle \delta_{\xi}(t_1) \delta_{\xi}(t_2) \rangle$$

Она имеет собственное название - корреляционная функция и широко применяется для оценки статистической связи / корреляции / между значениями случайного процесса в различные моменты времени. Ее обычно обозначают $K_{\xi}(t_1, t_2)$; через двумерную плотность распределения вероятности она представляется формулой

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2 [\xi_1 - m_1(t_1)] [\xi_2 - m_1(t_2)] f(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2).$$

Рассмотрим общие свойства корреляционной функции.

1. Корреляционная функция, как и всякий центральный момент, может быть выражена через начальные моментные функции

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= \langle [\xi(t_1) - \langle \xi(t_1) \rangle] [\xi(t_2) - \langle \xi(t_2) \rangle] \rangle = & (2.10) \\ &= \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle - \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle \end{aligned}$$

В совпадающие моменты времени значение корреляционной функции определяет дисперсию случайного процесса

$$\begin{aligned} K(t, t) &= \sigma_{\xi}^2(t) = \langle [\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle]^2 \rangle = \\ &= \langle \xi^2(t) \rangle - \langle \xi(t) \rangle^2 \end{aligned}$$

Заметим, что из очевидного свойства дисперсии $\sigma_{\xi}^2(t) \geq 0$ следует неравенство, сопоставляющее среднеквадратическое значение процесса с его средним значением

$$[\langle \xi^2(t) \rangle]^{1/2} \geq |\langle \xi(t) \rangle| \quad (2.11)$$

Если значения $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ статистически независимы (например, статистическая связь этих значений может ослабевать при увеличении временного интервала между моментами t_1 и t_2) то

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle$$

и корреляционная функция обращается в нуль. Заметим, однако, что обратное не всегда справедливо и некоррелированность значений $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ является необходимым, но не достаточным условием их статистической независимости.

2. Из определения (2.10) следует, что корреляционная функция симметрична, т.е.

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1)$$

3. Если при любых t дисперсия случайного процесса конечна, то абсолютное значение корреляционной функции ограничено при любых t_1 и t_2

$$|K(t_1, t_2)| \leq \sigma_{\xi}(t_1)\sigma_{\xi}(t_2). \quad (2.12)$$

Для доказательства этого свойства центрированные значения $\delta_{\xi}(t_1)$ и $\delta_{\xi}(t_2)$ отнесем к их среднеквадратическим значениям $\sigma_{\xi}(t_1)$, $\sigma_{\xi}(t_2)$ и вычислим средний квадрат разности

$$\left\langle \left[\frac{\delta_{\xi}(t_1)}{\sigma_{\xi}(t_1)} - \frac{\delta_{\xi}(t_2)}{\sigma_{\xi}(t_2)} \right]^2 \right\rangle \geq 0.$$

Раскрывая скобки и проигрывая почленное упрощение, получим неравенство

$$\frac{K_{\xi}(t_1, t_2)}{\sigma_{\xi}(t_1)\sigma_{\xi}(t_2)} \leq 1$$

Вычисляя средний квадрат суммы нормированных значений

$$\left\langle \left[\frac{\delta_{\xi}(t_1)}{\sigma_{\xi}(t_1)} + \frac{\delta_{\xi}(t_2)}{\sigma_{\xi}(t_2)} \right]^2 \right\rangle \geq 0.$$

получим второе неравенство

$$\frac{K_{\xi}(t_1, t_2)}{\sigma_{\xi}(t_1)\sigma_{\xi}(t_2)} \geq -1$$

Объединяя их, приходим к соотношению (2.12)

4. Корреляционная функция обладает свойством положительной определенности, которое заключается в том, что для любой действительной неслучайной функции $g(t)$ интегрируемой на интервале $t \in (0, T)$.

$$\iint\limits_0^T g(t_1) K_{\xi}(t_1, t_2) g(t_2) dt_1 dt_2 \geq 0. \quad (2.13)$$

Доказательство несложно. Рассмотрим среднее значение квадрата интеграла

$$\left\langle \left\{ \int_0^T g(t) \delta_{\xi}(t) dt \right\}^2 \right\rangle \geq 0$$

Меняя порядок интегрирования и усреднения, приходим к нужному соотношению

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 g(t_1) \delta_{\xi}(t_1) \delta_{\xi}(t_2) g(t_2) \right\rangle = \\ & = \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 g(t_1) K_{\xi}(t_1, t_2) g(t_2) \geq 0 \end{aligned}$$

Корреляционная функция дает представление о степени изменчивости реализаций случайного процесса с течением времени. Определим нормированную корреляционную функцию - коэффициент корреляции

$$R(t_1, t_2) = \frac{K_{\xi}(t_1, t_2)}{\sigma_{\xi}(t_1)\sigma_{\xi}(t_2)}, \quad (2.14)$$

абсолютное значение которого может изменяться всегда в четко определенных пределах

$$|R(t_1, t_2)| \leq 1.$$

Максимальное значение, равное единице, коэффициент корреляции имеет при совпадающих аргументах $t_1 = t_2$; при увеличении временного интервала $|t_2 - t_1|$ статистическая связь значений $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ разрушается флуктуациями и может стать пренебрежимо малой, так что значения окажутся статистически независимыми, а коэффициент корреляции

ции обратится в нуль. Характер убывания коэффициента корреляции с ростом $|t_2 - t_1|$ непосредственно связан с длительностью флуктуаций и дает представление о некотором характерном для процесса временном масштабе флуктуаций. На рис. 2.6 в качестве примера представлены ре-

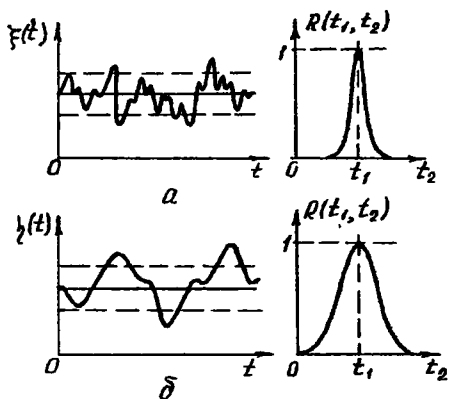


Рис. 2.6

ализации двух случайных процессов, средние значения и дисперсии которых совпадают, но длительности флуктуаций в среднем различны. Справа показаны графики коэффициентов корреляции этих процессов.

Таким образом, моменты первого и второго порядков представляют важные сведения о свойствах случайного процесса: среднее значение определяет регулярную составляющую, дисперсия характеризует рассеяние реализаций, корреляционная функция позволя-

ет судить о длительности флуктуаций. Для большого круга прикладных задач информации, содержащейся в этих моментных функциях, оказывается достаточно. Раздел теории, посвященный изучению лишь тех свойств случайных процессов, которые определяются моментными функциями первого и второго порядков, называется корреляционной теорией случайных процессов.

2.5. Характеристические функции

Характеристической функцией называется преобразование Фурье плотности вероятности. Для одномерного распределения характеристическая функция определяется интегралом

$$\varphi_{\xi}(u; t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\xi} f(\xi; t) d\xi, \quad (2.15)$$

при этом обратное преобразование восстанавливает плотность вероят-

ности

$$f(\xi; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\xi}(u; t) e^{-iu\xi} du \quad (2.16)$$

Очевидно, характеристическая функция является столь же эффективной характеристикой случайного процесса, как и плотность вероятности. Интеграл (2.15) можно рассматривать как среднее значение экспоненты

$$\varphi_{\xi}(u; t) = \langle e^{iu\xi(t)} \rangle \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в соотношение (2.16) и меняя порядок усреднения и интегрирования, получим

$$f(\xi; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle e^{iu\xi(t)} \rangle e^{-iu\xi} du = \langle \delta(\xi(t) - \xi) \rangle,$$

где $\xi(t)$ - случайная функция, по ансамблю реализаций которой ведется усреднение, а ξ - аргумент плотности вероятности.

Основные свойства одномерной характеристической функции при действительных значениях переменной u :

1. $\varphi_{\xi}(0; t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi; t) d\xi = 1$;
2. $|\varphi_{\xi}(u; t)| \leq 1$;
3. $\varphi_{\xi}^*(u; t) = \varphi_{\xi}(-u; t)$

Характеристическая функция является произвольной функцией для моментных функций в том смысле, что коэффициенты ее разложения в ряд по степеням переменной u записываются через моментные функции

$$\varphi_{\xi}(u; t) = \langle e^{iu\xi(t)} \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n(t)}{n!} (iu)^n \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(t)}{n!} (iu)^n \quad (2.18)$$

Следовательно, моментные функции любого порядка можно получить из характеристической функции путем дифференцирования

$$m_n(t) = \frac{1}{i^n} \left[\frac{\partial^n \varphi_{\xi}(u; t)}{\partial u^n} \right]_{u=0} \quad (2.19)$$

Преобразование Фурье n -мерной плотности вероятности определяет n -мерную характеристическую функцию

$$\varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2 + \dots + \mu_n \xi_n)} \times \\ \times f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n;$$

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2 + \dots + \mu_n \xi_n)} \times \\ \times \varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n) d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_n$$

Ее также удобно рассматривать как среднее значение экспоненты

$$\varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle e^{i[\mu_1 \xi(t_1) + \mu_2 \xi(t_2) + \dots + \mu_n \xi(t_n)]} \rangle_{(2.20)}$$

Укажем основные свойства n -мерной характеристической функции при действительных значениях переменных:

$$1. \quad \varphi_{\xi}(0, 0, \dots, 0; t_1, t_2, \dots, t_n) = 1,$$

что очевидно из представления (2.20) и соответствует условию нормировки n -мерной плотности вероятности.

$$2. \quad |\varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n)| \leq 1$$

$$3. \quad \varphi_{\xi}^*(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \varphi_{\xi}(-\mu_1, -\mu_2, \dots, -\mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Эти три свойства уже приводились в частном случае одномерного распределения. Добавим к ним два следующих:

$$4. \quad \varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, 0, 0, \dots, 0; t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n) =$$

$$= \varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

это свойство согласованности многомерных характеристических функций соответствует условию согласованности (2.9) многомерных плотностей вероятности.

5. Многомерная характеристическая функция независимых случайных значений $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ равна произведению характеристических функций этих значений

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= \langle e^{i[\mu_1 \xi(t_1) + \mu_2 \xi(t_2) + \dots + \mu_n \xi(t_n)]} \rangle = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi}(\mu_k; t_k) \end{aligned}$$

Многомерные моментные функции могут быть определены из характеристических функций путем дифференцирования. Пусть характеристическая функция $\varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ разложима в кратный ряд Тейлора

в окрестности точки $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial \mu_k} \right]_{\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0} \cdot \mu_k + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \left[\frac{\partial^2 \varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial \mu_k \partial \mu_{\ell}} \right]_{\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0} \cdot \mu_k \mu_{\ell} + \dots \end{aligned}$$

По аналогии с (2.19), коэффициенты кратного степенного ряда можно заменить моментными функциями n -мерного распределения

$$\varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = 1 + \sum_{k=1}^n \langle \xi(t_k) \rangle i \mu_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle \xi(t_k) \xi(t_l) \rangle \frac{i^2}{2} \omega_k \omega_l + \dots,$$

для которых, таким образом, характеристическая функция является производящей

$$\begin{aligned} & \langle \xi^{P_1}(t_1) \xi^{P_2}(t_2) \dots \xi^{P_n}(t_n) \rangle = \\ & = i^{P_1} \left[\frac{\partial^{P_1} \varphi_{\xi}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial \omega_1^{P_1} \partial \omega_2^{P_2} \dots \partial \omega_n^{P_n}} \right]_{\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Характеристические функции были введены в теорию вероятности еще на рубеже 20 века замечательным русским математиком А.М.Ляпуновым. В дальнейшем они нашли важные и многочисленные применения, а связанные с ними методы оказались весьма эффективным средством при решении самых различных вероятностных задач.

2.6. Кумулянтные функции. Нормальное распределение

Наряду с моментным описанием в прикладной теории случайных процессов часто оказывается удобным кумулянтный подход, использующий в качестве характеристик случайного процесса кумулянтные функции, которые можно представить как нелинейные комбинации моментов [14]

Одномерную характеристическую функцию можно записать в виде

$$\varphi_{\xi}(\omega; t) = e^{\psi_{\xi}(\omega; t)}$$

определив новую функцию

$$\psi_{\xi}(\omega; t) = \ln \varphi_{\xi}(\omega; t), \quad \psi_{\xi}(0, t) = 0$$

Разложим функцию $\psi_{\xi}(\omega; t)$ в степенной ряд

$$\psi_{\xi}(\omega; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n(t)}{n!} (i\omega)^n \quad (2.22)$$

коэффициенты которого

$$x_n(t) = \frac{1}{i^n} \left[\frac{\partial^n \varphi_F(\mu; t)}{\partial \mu^n} \right]_{\mu=0} \quad (2.23)$$

как и моментные функции, являются характеристиками одномерного распределения и называются кумулятными функциями. Используя представление

$$x_n(t) = \frac{1}{i^n} \left[\frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \ln \langle e^{i\mu \xi(t)} \rangle \right]_{\mu=0}$$

несложно получить соотношения, связывающие кумулянтные и моментные функции

$$x_1(t) = \langle \xi(t) \rangle ;$$

$$x_2(t) = \langle \xi^2(t) \rangle - \langle \xi(t) \rangle^2 = \sigma^2(t) ;$$

$$x_3(t) = \langle \xi^3(t) \rangle - 3\langle \xi(t) \rangle \langle \xi^2(t) \rangle + 2\langle \xi(t) \rangle^3 = M_3(t) ;$$

$$x_4(t) = M_4(t) - 3M_2^2(t), \quad \text{и так далее.}$$

Одна из важных задач теории случайных процессов состоит в том, чтобы охарактеризовать свойства закона распределения по свойствам последовательности моментных функций. Основой для этого может служить разложение (2.18) характеристической функции $\varphi_F(\mu; t)$ в ряд по степеням μ коэффициенты которого выражаются через моменты.

Очевидно, что такой ряд не может содержать конечное число членов, так как в этом случае он переходит в полином, для которого условие

$$|\varphi_F(\mu; t)| \leq 1 \quad \mu \in (-\infty, \infty); t \in (-\infty, \infty)$$

выполняться не может, то есть пренебрегать моментными функциями высших порядков в этом разложении нельзя.

На разложение (2.22) логарифма характеристической функции положительное ограничение не накладывается. Во многих практически важных слу-

чаях в нем можно пренебречь кумулянтными функциями высших порядков, ограничившись конечным числом членов разложения. Например, хорошо известно распределение, для которого отличны от нуля только две первых кумулянтных функции $x_1(t) = \langle \xi(t) \rangle$ и $x_2(t) = \sigma^2(t)$ - нор-

мальное или гауссово распределение. Для него характеристическая функция равна

$$\varphi_{\xi}(\mu; t) = e^{i\mu \langle \xi(t) \rangle - \frac{1}{2} \mu^2 \sigma^2}$$

Рассмотрим это распределение подробнее. Применим преобразование Фурье к характеристической функции

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x_1 - \frac{\sigma^2}{2} \mu^2} e^{-i\mu \xi} d\mu = f(\xi; t)$$

Дополним выражение в показателе экспоненты до полного квадрата следующим образом

$$-\frac{\sigma^2}{2} \left[\mu + i \frac{(\xi - x_1)}{\sigma^2} \right]^2 - \frac{(\xi - x_1)^2}{2\sigma^2}$$

и примем выражение в квадратных скобках за новую комплексную переменную ν тогда

$$\begin{aligned} f(\xi; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2} \nu^2} d\nu e^{-\frac{(\xi - x_1)^2}{2\sigma^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)} e^{-\frac{(\xi - \langle \xi(t) \rangle)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

- плотность вероятности нормального распределения. Распределение имеет вид плавной унимодальной кривой с максимумом в точке $\xi = x_1(t) = \langle \xi(t) \rangle$ (см. раздел 8.2)

Нормальное распределение является одним из наиболее важных и широко распространенных в природе распределений.

Существуют ли другие распределения с конечным числом отличных от нуля кумулянтов? На первый взгляд, нет особых препятствий тому, чтобы среди функций вида

$$\theta(\mu) = e^{a_1 \mu + a_2 \mu^2 + \dots + a_n \mu^n}$$

образовались характеристические функции других распределений, для кото-

рых кумулянты равны нулю, начиная с некоего $n > 2$. Действительно, они обладают свойством $\theta(0) = 1$; соответствующим подбором коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ несложно обеспечить выполнение других двух условий

$$|\theta(u)| \leq 1 \quad \text{и} \quad \theta^*(u) = \theta(-u)$$

то есть тех условий, которым должна удовлетворять любая характеристическая функция; но остается еще одно требование к характеристической функции - ее преобразование Фурье - плотность вероятности должна быть неотрицательной функцией. Этому требованию функция $\theta(u)$ может удовлетворить только в двух случаях: или $n = 2$, или же число членов ряда в показателе экспоненты бесконечно велико. Тем не менее, зная конечное число кумулянт, можно, как правило, построить аппроксимирующую функцию, нарушающую условие неотрицательности преобразования Фурье, но дающую хорошее приближение к плотности распределения вероятности.

Таким образом, нормальное распределение - единственное распределение с конечным числом кумулянтных функций / равным двум / и с этой точки зрения наиболее удобное для анализа. С его формой принято сравнивать форму других распределений.

Кумулянты $\alpha_3(t)$ и $\alpha_4(t)$ используются для количественной оценки отклонения произвольной функции распределения от симметричной гауссовой кривой. Величину

$$\gamma_1(t) = \frac{\alpha_3(t)}{\sigma^3(t)} = \frac{M_3(t)}{\sigma^3(t)}$$

называют коэффициентом асимметрии. На рис. 2.7 показано два асимметричных распределения; одно из них / кривая 1 / имеет положительную асимметрию / $\gamma_1 > 0$ /, другое - отрицательную / кривая 2, $\gamma_1 < 0$ /. Отношение

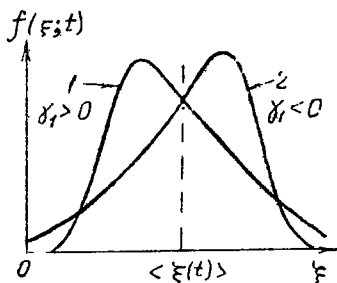


Рис 2.7

$$\gamma_2(t) = \frac{\alpha_4(t)}{\sigma^4(t)} = \frac{M_4(t)}{\sigma^4(t)} - 3$$

называют коэффициентом эксцесса.

Для нормального закона распределения этот коэффициент равен нулю $\gamma_2(t) = 0$ / так же как и коэффициент асимметрии $\gamma_1(t) = 0$ /.

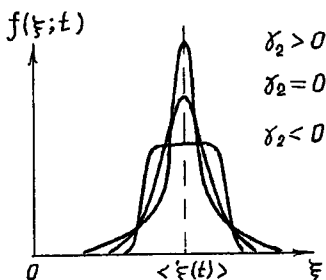


Рис. 2.8

Коэффициент эксцесса дает возможность сравнивать "характер вершины" некоторой симметричной / то есть с $\gamma_1(t) = 0$ / кривой распределения с аналогичной особенностью нормального закона. Если $\gamma_2(t) > 0$ то вершина дифференциального закона более острая и более высокая, чем у нормального закона с тем же средним значением и с той же дисперсией / см. рис. 2.8 /. Наоборот, при $\gamma_2(t) < 0$ вершина оказывается ниже и шире, чем у нормальной плотности.

Многомерные кумулянтные функции можно определить путем дифференцирования логарифма многомерной характеристической функции

$$\begin{aligned} \psi_{\xi}(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \sum_{k=1}^n \alpha_k(t_k) (i u_k) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{k,l}(t_k, t_l) (i^2 u_k u_l) + \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

например,

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}(t_1, t_2) &= \\ &= - \left[\frac{\partial^2 \psi_{\xi}(u_1, u_2; t_1, t_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \right]_{\substack{u_1=0 \\ u_2=0}} = \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle - \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle \end{aligned}$$

то есть двумерная кумулянтная функция второго порядка совпадает с корреляционной функцией случайного процесса

$$\alpha_{1,1}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1, t_2)$$

Если в разложении (2.24) отличны от нуля только кумулянтные функции первого и второго порядков, то такая характеристическая функция является характеристической функцией нормального процесса и имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^n \langle \xi(t_k) \rangle u_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n K_{\xi}(t_k, t_l) u_k u_l \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Многомерные характеристические функции удобно записывать, используя матричное представление. Определим матрицы - строки

$$\vec{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n); \quad \vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n);$$

$$\vec{F} = (F(t_1), F(t_2), \dots, F(t_n)) = (F_1, F_2, \dots, F_n)$$

и, не меняя обозначений, будем в нужных случаях рассматривать их так же как матрицы - столбцы, отличая эти две формы по месту их расположения в матричных выражениях. Корреляционные функции $K_{\vec{F}}(t_k, t_l)$ обозначим кратко

$$K_{kl} = K_{\vec{F}}(t_k, t_l)$$

и соединим в одну квадратную матрицу - корреляционную матрицу

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}$$

Используя введенные обозначения, запишем формулу (2.25) в матричном представлении

$$\varphi_{\vec{F}}(\vec{U}; \vec{t}) = \langle e^{i(\vec{U}\vec{F})} \rangle = e^{i(\vec{U}\langle \vec{F} \rangle) - \frac{1}{2}\vec{U}\hat{K}\vec{U}} \quad (2.26)$$

Многомерная плотность вероятности нормального случайного процесса являющаяся преобразованием Фурье характеристической функции (2.26), в том же представлении имеет вид

$$f(\vec{F}; \vec{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\text{Det } \hat{K}}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{F} - \langle \vec{F} \rangle) \hat{Q} (\vec{F} - \langle \vec{F} \rangle)} \quad (2.27)$$

где \hat{Q} - матрица, обратная корреляционной, а $\text{Det } \hat{K}$ - определитель корреляционной матрицы.

2.7. Центральная предельная теорема

В теории случайных процессов нормальное распределение играет фундаментальную роль. Это объясняется тем, что при широких предпо-

ложениях суммы случайных величин с ростом числа слагаемых ведут себя асимптотически нормально. На практике, в том числе в радиотехнике и радиотехнике, многие флуктуационные явления возникают как суперпозиция ряда одновременно протекающих, но независимых процессов. При большом числе слагаемых, если влияние каждого из них на суммарные флуктуации относительно невелико, особенности распределения отдельных процессов нивелируются в общей сумме, при этом суммарный процесс приобретает устойчивые статистические свойства, не зависящие от индивидуальных характеристик слагаемых.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - статистически независимые случайные величины с различными распределениями вероятностей $f_j(\xi_j)$ и характеристическими функциями $\varphi_j(u)$. Для простоты будем считать, что $\langle \xi_j \rangle = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Обозначим сумму случайных величин

$$S = \sum_{j=1}^n \xi_j$$

и рассмотрим ее характеристическую функцию

$$\varphi_S(u) = \langle e^{i u S} \rangle = \langle e^{i u \sum_{j=1}^n \xi_j} \rangle.$$

Поскольку величины ξ_j статистически независимы, то характеристическая функция суммы выражается через произведение характеристических функций слагаемых

$$\varphi_S(u) = \prod_{j=1}^n \langle e^{i u \xi_j} \rangle = \prod_{j=1}^n \varphi_j(u)$$

Вспользуемся для $\varphi_j(u)$ кумулянтным разложением

$$\varphi_j(u) = e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i u)^m}{m!} \mathcal{Z}_m^{(j)}}$$

тогда

$$\varphi_S(u) = e^{\sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i u)^m}{m!} \mathcal{Z}_m^{(j)}} = e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i u)^m}{m!} \mathcal{Z}_m}$$

где кумулянты \mathcal{Z}_m случайной величины S определились как суммы соответствующих кумулянт $\mathcal{Z}_m^{(j)}$ случайных величин ξ_j

$$\mathcal{Z}_m = \sum_{j=1}^n \mathcal{Z}_m^{(j)}$$

Этот результат известен как свойство аддитивности кумулянтов независимых случайных величин. В частности, дисперсия суммы независимых величин равна сумме дисперсий случайных слагаемых

$$\sigma_s^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$$

Считая, что дисперсия σ_s^2 известна и имеет фиксированное значение, запишем выражение характеристической функции в виде

$$\varphi_s(\mu) = e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i\mu\sigma_s)^m}{m!} \left(\frac{\alpha_m}{\sigma_s^m}\right)}$$

и рассмотрим, как с ростом числа слагаемых n меняются отношения

$$\frac{\alpha_m}{\sigma_s^m} = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_m^{(j)}}{\left[\sum_{j=1}^n \sigma_j^2\right]^{m/2}}$$

Если значения кумулянтов $\alpha_m^{(j)}$ отности с соответствующей степенью дисперсий σ_j^m и записать

$$\frac{\alpha_m}{\sigma_s^m} = \frac{\sum_{j=1}^n \sigma_j^m \left(\frac{\alpha_m^{(j)}}{\sigma_j^m}\right)}{\left[\sum_{j=1}^n \sigma_j^2\right]^{m/2}},$$

то станет более очевидным, что числитель этого отношения пропорционален n а знаменатель - $n^{m/2}$ так что

$$\frac{\alpha_m}{\sigma_s^m} \sim \frac{1}{n^{\frac{m}{2}-1}} \text{ при } n \gg 1$$

Поскольку $\langle s \rangle = \alpha_1 = 0$ нас будут интересовать кумулянты второго и более высоких порядков. При увеличении n относительный вклад кумулянтов высших порядков $m \geq 3$ уменьшается, обращаясь в ноль при $n \rightarrow \infty$ в результате характеристическая функция распределения S принимает вид

$$\varphi_s(\mu) = e^{-\frac{\mu^2 \sigma_s^2}{2}}$$

и совпадает с характеристической функцией нормальной центрированной величины.

Условие $\langle \xi_j \rangle = 0$ не ограничивает общности полученного ре-

зультата. Будем рассматривать S и ξ_j как центрированные величины, например,

$$S = \sum x - \langle x \rangle, \quad \sigma_S^2 = \sigma_x^2$$

Тогда

$$\varphi_x(u) = \langle e^{iu(S + \langle x \rangle)} \rangle = e^{iu\langle x \rangle} \varphi_S(u) = e^{iu\langle x \rangle} e^{-\frac{u^2 \sigma_x^2}{2}}$$

Соответствующая плотность вероятности равна

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Таким образом, сумма большого числа независимых случайных величин, каждая из которых равномерно играет в общей сумме относительно малую роль, имеет асимптотически нормальное распределение. Этот вывод и строгое определение условий, при которых он справедлив, составляет содержание центральной предельной теоремы [5, 10].

Центральная предельная теорема распространяется также на многомерные случаи и распределение случайных векторов [10].

2.6. Свойства нормального процесса

Плотность вероятности нормального случайного процесса полностью определяется заданием среднего значения и корреляционной функции - кумулянтов первого и второго порядков. Следствием этого являются два важных свойства.

Во-первых, для нормального случайного процесса некоррелированность значений означает их статистическую независимость. Действительно, пусть между значениями случайного процесса $\xi(t)$ в оценках, определяемых моментами времени t_1, t_2, \dots, t_n отсутствует корреляционная связь. Тогда для любых $k \neq l$ $K_{\xi}(t_k, t_l) = 0$ и корреляционная матрица оказывается диагональной

$$K = \begin{pmatrix} \sigma^2(t_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2(t_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma^2(t_n) \end{pmatrix}$$

Обратная ей матрица \hat{Q} будет при этом также диагональной

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2(t_1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2(t_2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma^2(t_n)} \end{pmatrix},$$

в результате n -мерная плотность (2.27) преобразуется в произведение n сомножителей

$$f(\vec{\xi}; \vec{T}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma(t_1)\sigma(t_2)\dots\sigma(t_n)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(\xi_k - \langle \xi(t_k) \rangle)^2}{\sigma^2(t_k)}} =$$

$$= \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(t_k)} e^{-\frac{(\xi_k - \langle \xi(t_k) \rangle)^2}{2\sigma^2(t_k)}},$$

то есть

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n f(\xi_k; t_k),$$

что означает статистическую независимость всех значений $\xi(t_k), k=1, \dots, n$.

Подчеркнем, что полное совпадение понятий некоррелированности и статистической независимости характерно только для нормальных процессов.

Во-вторых, все моментные функции третьего и более высоких порядков нормального процесса выражаются через моментные функции первого и второго порядков. Это свойство очевидно, поскольку моментные функции определяются значением частных производных характеристической функции (2.26) в точке $\vec{u} = 0$ а в выражение для последней входят только моментные функции первого и второго порядков. Рассмотрим то, как моменты высших порядков выражаются через первые и вторые. Обратимся вначале к центрированному случайному процессу, положив $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Его характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_{\xi}(\vec{u}; \vec{T}) = e^{-\frac{\vec{u} \hat{K} \vec{u}}{2}} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n K_{\xi}(t_k, t_l) u_k u_l}$$

Вычислим частные производные первых четырех порядков, например,

$$\frac{\partial \varphi_{\xi}}{\partial u_1} = \left\{ - \sum_{\ell=1}^n K_{1\ell} u_{\ell} \right\} \varphi_{\xi};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\xi}}{\partial u_1 \partial u_2} = \left\{ -K_{12} + \left[\sum_{\ell=1}^n K_{1\ell} u_{\ell} \right] \left[\sum_{\ell=1}^n K_{2\ell} u_{\ell} \right] \right\} \cdot \varphi_{\xi};$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_{\xi}}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} = \left\{ K_{12} \left[\sum_{\ell=1}^n K_{3\ell} u_{\ell} \right] + K_{13} \left[\sum_{\ell=1}^n K_{2\ell} u_{\ell} \right] + K_{23} \left[\sum_{\ell=1}^n K_{1\ell} u_{\ell} \right] + \dots \right\} \varphi_{\xi};$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_{\xi}}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3 \partial u_4} = \left\{ K_{12} K_{34} + K_{13} K_{24} + K_{14} K_{23} + \dots \right\} \cdot \varphi_{\xi}$$

Опущенные в последних двух выражениях члены содержит первые и более высокие степени переменных u_{ℓ} . При $u = 0$ получаем, что

$$\langle \xi(t) \rangle = 0; \quad \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = K_{12};$$

$$\langle \xi(t_1) \xi(t_2) \xi(t_3) \rangle = 0; \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \xi(t_3) \xi(t_4) \rangle &= \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle \langle \xi(t_3) \xi(t_4) \rangle + \\ &+ \langle \xi(t_1) \xi(t_3) \rangle \langle \xi(t_2) \xi(t_4) \rangle + \langle \xi(t_1) \xi(t_4) \rangle \langle \xi(t_2) \xi(t_3) \rangle. \end{aligned}$$

Продолжая вычисления, можно убедиться в том, что для централизованного нормального процесса $\xi(t)$ все моментные функции нечетных порядков равны нулю, а моменты четных порядков представляются суммой всех возможных произведений вторых моментов, построенных аналогично (2.28). Число таких слагаемых для момента порядка $2m$ равно $(2m-1)!!$.

Начальные моменты нецентрированного процесса несложно получить, подставив в приведенные выражения вместо $\xi(t)$ разность $\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle$ и проведя почленное усреднение возникших сумм в квадратных скобках, например,

$$\begin{aligned} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \xi(t_3) \rangle &= \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \xi(t_3) \rangle + \\ &+ \langle \xi(t_2) \rangle \langle \xi(t_1) \xi(t_3) \rangle + \langle \xi(t_3) \rangle \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle - 2 \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle \langle \xi(t_3) \rangle. \end{aligned}$$

Третье важное свойство нормального процесса можно рассматривать как прямое следствие центральной предельной теоремы: сумма нормальных процессов является также процессом нормальным.

Рассмотрим сумму двух нормальных случайных процессов

$$\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$$

Используя матричную форму записи, определим характеристическую функцию n -мерного распределения процесса $\zeta(t)$ / временные параметры указывать не будем /

$$\varphi_{\zeta}(\vec{u}) = \langle e^{i(\vec{u} \zeta)} \rangle = \langle e^{i(\vec{u} \xi)} e^{i(\vec{u} \eta)} \rangle \quad (2.29)$$

Если матрицы $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ объединить в одну матрицу $\vec{\chi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ то (2.29) можно рассматривать как характеристическую функцию $2n$ -мерного распределения нормальных значений, зависящую от аргументов $\vec{v}(u_1, u_2, \dots, u_n, u_1, u_2, \dots, u_n)$. Ее вид известен, поэтому

$$\varphi_{\zeta}(\vec{u}) = \langle e^{i(\vec{v} \chi)} \rangle = e^{i(\vec{v} \langle \chi \rangle) - \frac{1}{2} \vec{v} \hat{K}_{\chi} \vec{v}}$$

где \hat{K}_{χ} - корреляционная матрица с элементами $(\langle u_i - \langle u_i \rangle \rangle \langle u_j - \langle u_j \rangle \rangle)$, которую можно разбить на четыре подматрицы-блочки

$$\hat{K}_{\chi} = \begin{vmatrix} \hat{K}_{\xi} & \hat{K}_{\xi\eta} \\ \hat{K}_{\eta\xi} & \hat{K}_{\eta} \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

Здесь \hat{K}_{ξ} , \hat{K}_{η} - корреляционные матрицы процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, а $\hat{K}_{\xi\eta}$ - матрица их взаимной корреляции. Первое слагаемое в показателе экспоненты легко преобразуется к виду

$$(\vec{v} \langle \chi \rangle) = (\vec{u} \langle \xi \rangle) + (\vec{u} \langle \eta \rangle) = (\vec{u} \langle \zeta \rangle)$$

Второе слагаемое, если учесть (2.30) и представление $\vec{v} = (\vec{u}, \vec{u})$, равно

$$\vec{v} \hat{K}_{\chi} \vec{v} = \vec{u} (\hat{K}_{\xi} + \hat{K}_{\xi\eta} + \hat{K}_{\eta\xi} + \hat{K}_{\eta}) \vec{u} = \vec{u} \hat{K}_{\zeta} \vec{u}$$

Таким образом,

$$\varphi_{\zeta}(\vec{u}) = e^{i(\vec{u} \langle \zeta \rangle) - \frac{1}{2} \vec{u} \hat{K}_{\zeta} \vec{u}}$$

те есть сумма двух нормальных случайных процессов представляет также нормальный процесс. Этот результат легко обобщается на сумму произвольного числа нормальных процессов.

2.9. Непрерывность и дифференцируемость случайного процесса

1. В 2.1 было введено понятие непрерывного случайного процесса $\xi(t)$ все выборочные функции которого с вероятностью 1 непрерывны, т.е.

$$P \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\xi(t + \Delta t) - \xi(t)] = 0 \right\} = 1 \quad (2.31)$$

Такие процессы называются также непрерывными почти наверное. По аналогии можно определить процесс дифференцируемый почти наверное, т.е. почти все выборочные функции которого дифференцируемы

$$P \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} = \xi'(t) \right\} = 1 \quad (2.32)$$

Однако данные определения, основанные на понятии почти достоверной сходимости, не являются единственными. Наряду с ними широко используются также понятия непрерывности и дифференцируемости случайного процесса в среднеквадратическом

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle [\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]^2 \rangle &= 0; \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \left[\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \xi'(t) \right]^2 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

и по вероятности

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P \left\{ |\xi(t + \Delta t) - \xi(t)| > \varepsilon \right\} &= 0; \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P \left\{ \left| \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \xi'(t) \right| > \varepsilon \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

для любого $\varepsilon > 0$

Заметим, что из непрерывности и дифференцируемости случайного процесса в среднеквадратическом следует его непрерывность и дифферен-

пируемость по вероятности, поскольку согласно неравенству Чебышева например,

$$P \left\{ \left| \xi(t + \Delta t) - \xi(t) \right| > \varepsilon \right\} < \frac{\langle [\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]^2 \rangle}{\varepsilon^2}$$

Можно показать, что непрерывность и дифференцируемость процесса почти наверное также влечет за собой его непрерывность и дифференцируемость по вероятности. Подобенное сопоставление в общем случае не удается провести для понятий в смысле почти достоверной сходимости (почти наверное) и в среднеквадратическом. Однако во многих прикладных задачах одновременно применимы все три типа понятий.

Понятие сходимости в среднеквадратическом представляет интерес по двум существенным причинам:

- в большинстве случаев момент второго порядка легко вычисляется;
- в большом числе приложений момент второго порядка имеет простой физический смысл.

В то же время физик, регистрирующий в течение некоторого времени одну или несколько реализаций флуктуационного процесса и анализирующий их, интересуется их непрерывностью прежде всего в том смысле, как ее понимают в анализе. Для него необходимо, чтобы предельный переход имел определенный смысл для полученной кривой, а не для совокупности возможных кривых, которых он никогда не видел. Это соображение приводит к понятию почти достоверной сходимости.

2. Выясним, при каких условиях случайный процесс $\xi(t)$ будет непрерывным и дифференцируемым в среднеквадратическом. Преобразуем первое выражение (2.33) к виду

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle [\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]^2 \rangle = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \langle \xi(t + \Delta t)\xi(t + \Delta t) \rangle - 2\langle \xi(t + \Delta t)\xi(t) \rangle + \langle \xi(t)\xi(t) \rangle \right\} = 0 \end{aligned}$$

Легко видеть, что необходимым и достаточным условием непрерывности в среднеквадратическом случайного процесса $\xi(t)$ в точке t является непрерывность в точке (t, t) второго начального момента $\langle \xi(t)\xi(t) \rangle$.

Обозначим для удобства $\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} = \gamma(\Delta t; t)$

Предположим, что при $\Delta t \rightarrow 0$ случайная функция $\chi(\Delta t; t)$ сходится в среднеквадратическом к $\chi(0; t) = \xi'(t)$ и таким образом, вторая формула (2.31), записанная в виде

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle [\chi(\Delta t; t) - \chi(0; t)]^2 \rangle = 0$$

выражает в среднеквадратическом непрерывность $\chi(\Delta t; t)$ в точке $\Delta t = 0$ при некотором фиксированном значении t

Необходимым и достаточным условием этого, как мы выяснили, должна быть непрерывность в точке $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0$ второго начального момента

$$\langle \chi(\Delta t_1; t) \chi(\Delta t_2; t) \rangle = \left\langle \frac{\xi(t + \Delta t_1) - \xi(t)}{\Delta t_1} \cdot \frac{\xi(t + \Delta t_2) - \xi(t)}{\Delta t_2} \right\rangle$$

Выполняя почленное усреднение выражения в числителе, получим

$$\lim_{\substack{\Delta t_1 \rightarrow 0 \\ \Delta t_2 \rightarrow 0}} \langle \chi(\Delta t_1; t) \chi(\Delta t_2; t) \rangle = \left. \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle \right|_{t_1 = t_2 = t} \quad (2.35)$$

Таким образом, непрерывный в среднеквадратическом случайный процесс $\xi(t)$ является дифференцируемым в среднеквадратическом в точке тогда и только тогда, если существует смешанная производная второго начального момента (2.35).

Из дифференцируемости в среднеквадратическом процесса $\xi(t)$ следует

$$\langle \xi'(t) \rangle = \frac{d}{dt} \langle \xi(t) \rangle \quad (2.36)$$

т.е. операции дифференцирования и статистического усреднения можно менять местами.

Действительно, вспомним соотношение между среднеквадратическим значением и модулем среднего значения случайной функции, определяемое неравенством (2.11), и применим его к разности следующего вида

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\xi'(t) - \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right]^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}} \gg \\ & \gg \left| \left\langle \xi'(t) - \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right\rangle \right|, \end{aligned}$$

Если процесс $\xi(t)$ дифференцируем в среднеквадратическом, то левая часть неравенства при $\Delta t \rightarrow 0$ обращается в нуль, при этом

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \langle \xi'(t) \rangle - \frac{\langle \xi(t + \Delta t) \rangle - \langle \xi(t) \rangle}{\Delta t} \right| = 0,$$

что и доказывает равенство (2.36).

Повторяя приведенные выше рассуждения для $\xi'(t)$ получим условия существования в среднеквадратическом производных $\xi''(t), \xi'''(t)$ и т. д., которые будут требовать соответственно существования частных производных второго начального момента

$$\left. \frac{\partial^4}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle \right|_{t_1=t_2=t} ; \left. \frac{\partial^6}{\partial t_1^3 \partial t_2^3} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle \right|_{t_1=t_2=t}$$

и т. д.

Если все производные случайного процесса существуют в среднеквадратическом в некоторой точке t_0 , то можно в окрестности этой точки разложить $\xi(t)$ в сходящийся в среднеквадратическом ряд Тейлора

$$\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n,$$

где $\xi^{(n)}(t_0)$ — производная порядка n

Равенство (2.36) позволяет легко получить моментные функции производной случайного процесса. Например, корреляционная функция производной $\xi'(t)$ может быть выражена через смешанную частную производную корреляционной функции исходного процесса

$$\begin{aligned} K_{\xi'}(t_1, t_2) &= \langle \xi'(t_1) \xi'(t_2) \rangle - \langle \xi'(t_1) \rangle \langle \xi'(t_2) \rangle = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_{\xi}(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (2.37)$$

при этом

$$\sigma_{\xi'}^2(t) = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow t \\ t_2 \rightarrow t}} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_{\xi}(t_1, t_2)$$

Функция взаимной корреляции процесса $\xi(t)$ и его производной $\xi'(t)$ в соответствии с (2.36) будет равна $K_{\xi \xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1}$.

В заключение отметим, что производная нормального случайного процесса является также процессом нормальным. Действительно, приращение $\Delta \xi(t) = \xi(t + \Delta t) - \xi(t)$ нормальной функции как суммы двух нормальных слагаемых имеет нормальное распределение / см. раздел 2.8 /. Следовательно, предел при $\Delta t \rightarrow 0$ отношения $\Delta \xi(t) / \Delta t$, т.е. есть производная, будет также иметь нормальное распределение.

2.10. Интегрирование случайного процесса

Определим интеграл в среднеквадратическом смысле от произведения случайной функции $\xi(t)$ на детерминированную функцию $h(t, t')$

$$\zeta(t) = \int_a^b h(t, t') \xi(t') dt' \quad (2.38)$$

как случайную функцию, к которой при $\max \Delta t_k \rightarrow 0$ в среднеквадратическом сходится последовательность $\{\zeta_n(t)\}$ случайных функций, представляющих интегральные суммы

$$\zeta_n(t) = \sum_{k=1}^n h(t, t_k) \xi(t_k) \Delta t_k.$$

Среднее значение интеграла равно

$$\langle \zeta(t) \rangle = \int_a^b h(t, t') \langle \xi(t') \rangle dt' \quad (2.39)$$

второй начальный момент

$$\langle \zeta(t_2) \zeta(t_1) \rangle = \int_a^b \int_a^b h(t_1, t') h(t_2, t'') \langle \xi(t') \xi(t'') \rangle dt' dt'' \quad (2.40)$$

Можно сказать, что сходимость интеграла (2.40) в обычном смысле является необходимым и достаточным условием существования интеграла 2.38 в среднеквадратическом. Не сложно получить следующие выражения для корреляционной функции $K_\zeta(t_1, t_2)$ процесса $\zeta(t)$ и функции взаимной корреляции $K_{\zeta\xi}(t_1, t_2)$

$$K_\zeta(t_1, t_2) = \int_a^b \int_a^b h(t_1, t') h(t_2, t'') K_\xi(t', t'') dt' dt''; \quad (2.41)$$

$$K_{\zeta\xi}(t_1, t_2) = \int_a^b h(t_1, t') K_\xi(t', t_2) dt'$$

Очевидно, интегрирование нормального случайного процесса дает процесс также нормальный.

2.11. Задачи

1. Точка совершает гармоническое колебание $x = a \sin \omega t$. Найти плотность распределения значений x , считая, что вероятность нахождения точки в интервале $(x, x+dx)$ пропорциональна длине интервала и обратно пропорциональна скорости ее движения. Найти интегральный закон распределения $F(x)$ и вероятность того, что точка будет находиться в интервалах $(-a, -a/2)$ и $(-a/2, a/2)$

2. Установить связь между параметрами a и θ в одностороннем экспоненциальном распределении

$$f(x) = \begin{cases} a e^{-bx}, & x \geq 0; \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

3. Показать, что для нормального закона

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

выполняется условие $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ Найти коэффициент C

в одностороннем нормальном распределении

$$f(x) = C \chi(x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

где $\chi(x)$ - функция Хевисайда, равная 1 при $x \geq 0$ и нулю при $x < 0$.

4. Показать, что для одностороннего нормального распределения

$$f(x) = \sqrt{2/\pi\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad x \geq 0$$

среднее значение и дисперсия равны соответственно

$$m_1 = \sigma \sqrt{2/\pi}; \quad M_2 = (1 - 2/\pi) \sigma^2$$

5. На электронное реле воздействует случайное напряжение с рэлеевской плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, x \geq 0$$

а/ Какова вероятность срабатывания схемы, если электронное реле срабатывает всякий раз, когда напряжение на его входе превышает 2 вольта?

б/ На какое напряжение нужно настроить реле, чтобы вероятность его срабатывания под воздействием случайного шумового напряжения не превышала 0,003?

6. Время безотказной работы самолетного радиосредств в полете является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону / см. задачу 2 /. Определить вероятность безотказной работы оборудования в течение десятичасового полета, если среднее время безотказной работы по статистическим данным составляет 200 часов.

7. Показания прибора из-за наличия помех равномерно колеблются между значениями x_1 и x_2 . Составить выражения для плотности распределения и для интегральной функции распределения; вычислить среднее значение и дисперсию показаний прибора.

8. Изменение частоты генератора из-за самопрогрева подчинено распределению, график плотности которого приведен на рис. 2.9. Записать аналитические выражения для плотности $f(\Omega)$, функции распределения $F(\Omega)$ вычислить среднее значение и дисперсию.

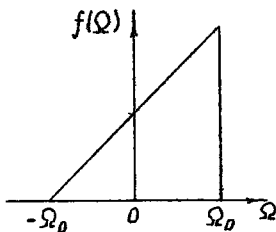


Рис. 2.9

9. Плотность совместного распределения двух случайных величин x и y имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)} [x^2 - 2\rho xy + y^2]}$$

Найти плотность распределения $f_x(x)$ условную плотность $f_x(x/y)$,

условное среднее значение $\langle x/y \rangle$ и дисперсию $\sigma_{x/y}^2$

10. Вычислить характеристическую функцию равномерного распределения / см. задачу 7 /.

11. Определить характеристическую функцию случайной величины x :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in (-\infty, \infty)$$

Вычислить моменты распределения $\langle x \rangle$, $\langle (x-a)^n \rangle$ для $n = 2, 3, 4$.

12. Найти характеристическую функцию $\varphi_x(\mu; t)$ и одномерную плотность распределения $f_x(x; t)$ процесса $x = \alpha + \beta t$ $t > 0$ где α и β - взаимно независимые случайные величины с плотностями распределения $f_\alpha(\alpha)$ и $f_\beta(\beta)$

13. Найти математическое ожидание / среднее значение / и дисперсию случайной величины x распределенной в интервале $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

по закону $f(x) = \frac{2}{\pi} \cos^2 x$; вне указанного интервала $f(x) = 0$.

14. Плотность вероятности двух случайных величин x и y выражается формулой

$$f(x, y) = k \sin(x+y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Определить постоянную k , а затем найти интегральные законы $F(x, y)$, $F_x(x)$, $F_y(y)$ Вычислить вероятности того, что

$$a) x < \frac{\pi}{4}; \quad b) x < \frac{\pi}{4}, y < \frac{\pi}{4}; \quad b) \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} < y < \frac{\pi}{4}$$

15. Плотность совместного распределения двух случайных величин x и y определена выражением

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

Определить, являются ли x и y статистически независимыми. Найти функцию совместного распределения $F(x, y)$

16. Углы ориентации двух независимых векторов могут принимать с равной вероятностью любые значения от 0 до 2π . Вычислить вероятность того, что векторы совпадут по направлению с точностью до φ .

17. Плотность совместного распределения случайных величин x и y есть

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sin(x+y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Найти средние значения, дисперсии и корреляцию случайных величин x и y а затем построить корреляционную и нормированную корреляционную матрицы.

18. Найти моду и медиану закона Рэлея

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{\sigma^2} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} & \xi \geq 0, \\ 0 & \xi < 0. \end{cases}$$

19. Показать, что для m -распределения / распределения Накагами /

$$f(x) = 2 m^m \frac{x^{2m-1}}{m^2 \Gamma(m)} e^{-\frac{m x^2}{2}}, \quad m \geq \frac{1}{2}, \quad x > 0$$

начальные моменты равны

$$m_k = \frac{\Gamma(m + \frac{k}{2})}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

20. Определить, какие из случайных процессов, имеющих корреляционные функции

$$a) K(t_1, t_2) = e^{-\lambda |t_1 - t_2|}; \quad b) K(t_1, t_2) = e^{-\alpha^2 (t_1 - t_2)^2};$$

$$в) K(t_1, t_2) = \exp(-\lambda |t_1 - t_2|) \cos \omega_0 (t_1 - t_2);$$

$$г) K(t_1, t_2) = \exp(-\alpha |t_1 - t_2|) (\cos \omega_0 (t_1 - t_2) + \beta \sin \omega_0 (t_1 - t_2)),$$

дифференцируемы в среднеквадратическом. Найти дисперсии и корреляционные функции производных.

21. Нормальный случайный процесс $\xi(t)$ имеет нулевое среднее значение $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и корреляционную функцию

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \exp[-\alpha |t_1 - t_2|] (\cos \omega (t_1 - t_2) + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega (t_1 - t_2))$$

Найти вероятность того, что значение производной случайного процесса $\xi'(t)$ не превысит величины β

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Функциональное преобразование вида

$$\zeta(t) = g[\xi(t)], \quad (3.1)$$

где $g(x)$ - детерминированная функция, изменяет распределение значений случайного процесса в каждом его сечении. Во многих приложениях теории вероятности возникает задача об определении распределения преобразованного процесса.

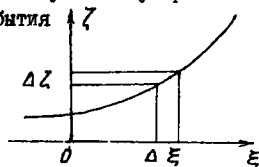
3.1. Одномерная функция распределения преобразованного процесса

Если функция $\zeta = g(\xi)$ взаимно однозначна и дифференцируема, то несложно установить связь между распределениями процессов $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ в сечениях, соответствующих выбранному моменту времени t . Действительно, в этом случае вероятность события

$$\xi(t) \in (\xi, \xi + \Delta\xi)$$

будет равна вероятности эквивалентного события рис. 3.1

$$\zeta(t) \in (\zeta, \zeta + \Delta\zeta)$$



Пусть плотность вероятности процесса $\xi(t)$ в выбранном сечении есть $f_{\xi}(\xi; t)$ а неизвестная плотность вероятности процесса $\zeta(t)$

- $f_{\zeta}(\zeta; t)$ Если $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ - бесконечно малые величины, то из равенства вероятностей двух эквивалентных событий следует

$$f_{\xi}(\xi; t) \Delta\xi = f_{\zeta}(\zeta; t) \Delta\zeta \quad (3.2)$$

Поскольку преобразование взаимно однозначно, то существует обратная функция

$$\xi = g(\zeta) \quad (3.3)$$

Воспользуемся этим обстоятельством и в равенстве (3.2) произведем замену переменной ξ в результате чего определится вид плотности вероятности процесса

$$f_z(z; t) = f_\xi[q(z), t] \frac{\Delta \xi}{\Delta z}$$

Учитывая, что $\Delta \xi$ и Δz - длины бесконечно малых отрезков, то есть абсолютные значения соответствующих приращений переменных ξ и z заменим их отношение модулем производной обратной функции (3.3) при этом получим следующее выражение для искомой плотности

$$f_z(z; t) = f_\xi[q(z); t] \left| \frac{dq(z)}{dz} \right| \quad (3.4)$$

Рассмотрим теперь случай, когда обратная функция многозначна.

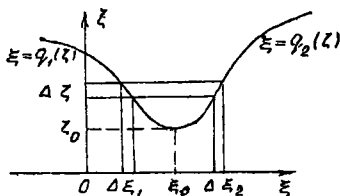


Рис. 3.2

На рис. 3.2 приведен график функции $z = g(\xi)$, для которой обратная функция $\xi = q(z)$ имеет две ветви $\xi = q_1(z)$ и $\xi = q_2(z)$, сходящиеся в точке $z = z_0$. При таком преобразовании событие

$$z(t) \in (z, z + \Delta z)$$

наступает при реализации какого-либо одного из двух несовместных

событий:

либо $\xi(t) \in (\xi_1, \xi_1 + \Delta \xi_1)$, где $\xi_1 = q_1(z)$,

либо $\xi(t) \in (\xi_2, \xi_2 + \Delta \xi_2)$, где $\xi_2 = q_2(z)$.

$$\text{то есть } f_z(z; t) \Delta z = f_\xi(\xi_1; t) \Delta \xi_1 + f_\xi(\xi_2; t) \Delta \xi_2 \quad (3.5)$$

После соответствующей замены ξ_1 и ξ_2 выражение для плотности вероятности процесса $z(t)$ принимает вид

$$f_z(z; t) = f_\xi[q_1(z); t] \left| \frac{dq_1(z)}{dz} \right| + f_\xi[q_2(z); t] \left| \frac{dq_2(z)}{dz} \right|$$

Если обратная функция имеет n ветвей $q_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$ то

$$f_z(z; t) = \sum_{i=1}^n f_\xi[q_i(z); t] \left| \frac{dq_i(z)}{dz} \right| \quad (3.6)$$

3.2. Распределение арксинуса

Рассмотрим простой пример функционального преобразования. Пусть случайная величина ξ равномерно распределенная на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и имеющая плотность вероятности

$$f_{\xi}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & |\xi| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & |\xi| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

подвергается преобразованию

$$\zeta = \sin \xi, \quad \zeta \in (-1, 1)$$

Обратная функция $\xi = q(\zeta) = \arcsin \zeta$ в данном случае одно-

значна, поэтому по формуле (3.4) находим для $|\zeta| \leq 1$

$$f_{\zeta}(\zeta) = f_{\xi}[q(\zeta)] \left| \frac{dq(\zeta)}{d\zeta} \right| = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.7)$$

При $|\zeta| > 1$ плотность вероятности $f_{\zeta}(\zeta)$ равна нулю.

Это распределение известно как "закон арксинуса" и характеризует распределение значений гармонического сигнала при условии, что фаза его случайна и с равной вероятностью принимает любые значения (см. раздел В 12).

3.3. Распределение процесса на выходе безынерционного квадратичного детектора

Рассмотрим два примера функционального преобразования случайного процесса, когда обратная функция неоднозначна.

1. Пусть требуется найти плотность вероятности случайного процесса $\zeta(t)$ на выходе нелинейного безынерционного элемента, осуществляющего преобразование

$$\zeta(t) = a \xi^2(t), \quad a > 0 \quad (3.8)$$

нормального случайного процесса $\xi(t)$ со средним значением $\langle \xi \rangle$ и дисперсией σ^2 . Значения $\zeta(t)$ не могут быть отрицательными, поэтому $f_{\zeta}(\zeta; t) = 0$ при $\zeta < 0$. Для $\zeta > 0$ функция, обратная (3.8), является двузначной и имеет ветви

$$\xi = q_1(\zeta) = +\sqrt{\frac{\zeta}{a}}; \quad \xi = q_2(\zeta) = -\sqrt{\frac{\zeta}{a}};$$

$$\left| \frac{dq_1(z)}{dz} \right| = \left| \frac{dq_2(z)}{dz} \right| = \frac{1}{2\sqrt{z}a}$$

Согласно (3.6), плотность распределения процесса на выходе двустороннего квадратичного детектора будет определяться выражением

$$f_z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2 z}a} \left[e^{-\frac{(\sqrt{z} - \sqrt{a} < \xi >)^2}{2\sigma^2 a}} + e^{-\frac{(\sqrt{z} + \sqrt{a} < \xi >)^2}{2\sigma^2 a}} \right], & z \geq 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

2. При нелинейном преобразовании

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0, & \xi(t) < 0; \\ a\xi^2(t), & \xi(t) \geq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

вероятность значения $\zeta(t) = 0$ оказывается конечной, равной вероятности того, что $\xi(t) < 0$, то есть

$$P(\zeta=0) = \int_{-\infty}^0 f_\xi(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\xi - < \xi >)^2}{2\sigma^2}} d\xi$$

Значения же $\zeta(t) > 0$ в этом случае оказываются результатом преобразования только положительных значений $\xi(t) > 0$, соответствующих лишь одной ветви обратной функции $\xi = +\sqrt{\frac{\zeta}{a}} = q_1(\zeta)$, так что при $z > 0$

$$f_z(z) = f_\xi[q_1(\zeta)] \left| \frac{dq_1(\zeta)}{d\zeta} \right|$$

В целом плотность распределения $f_z(\zeta)$ на выходе одностороннего квадратичного детектора может быть записана в виде

$$f_z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0; \\ P(\zeta=0)\delta(\zeta) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2 z}a} e^{-\frac{(\sqrt{z} - \sqrt{a} < \xi >)^2}{2\sigma^2 a}}, & z \geq 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

где $\delta(\zeta)$ - дельта-функция Дирака.

3.4. Многомерные распределения преобразованных процессов

Полученные для одномерной плотности вероятности выражения (3.4) и (3.6) легко обобщаются на многомерные плотности.

Пусть известна n -мерная плотность вероятности

$$f_{\xi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

характеризующая значения процесса $\xi(t)$ в n сечениях. Для тех же n сечений необходимо найти плотность вероятности преобразованного процесса $\zeta(t) = g[\xi(t)]$. Если преобразование взаимно однозначно в каждом сечении и обратная функция $\xi = g(\zeta)$ дифференцируема, то

$$f_{\zeta}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_{\xi}(g(\zeta_1), g(\zeta_2), \dots, g(\zeta_n); t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot \prod_{i=1}^n \left| \frac{dg(\zeta_i)}{d\zeta_i} \right| d\zeta_i \quad (3.12)$$

В более общем случае под переменными $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ n -мерной плотности можно понимать значения различных случайных процессов $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ рассматриваемые в один и тот же или в разные моменты времени. Совокупность однозначных непрерывных функций g_1, g_2, \dots, g_n от n переменных определяет преобразование

$$\zeta_1 = g_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

$$\zeta_2 = g_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

$$\zeta_n = g_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

Необходимо определить совместную плотность вероятности $f_{\zeta}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ / для краткости не будем указывать временные параметры /, если существуют однозначные и дифференцируемые обратные функции

$$\xi_1 = g_1(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$$

$$\xi_2 = g_2(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n),$$

$$\xi_n = g_n(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n).$$

Нужная плотность вероятности определяется для этого случая формулой

$$f_{\zeta}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = f_{\xi}(g_1(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n), g_2(\zeta_1, \dots), \dots, g_n(\zeta_1, \dots)) \cdot |D_n| \quad (3.13)$$

где D_n - якобиан преобразования

$$D_n = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial q_1}{\partial \zeta_2} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \zeta_n} \\ \frac{\partial q_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial q_2}{\partial \zeta_2} & \dots & \frac{\partial q_2}{\partial \zeta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q_n}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial q_n}{\partial \zeta_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \zeta_n} \end{vmatrix}$$

Если обратные функции неоднозначны, то формула (3.13) должна включать суммирование по всем их ветвям.

3.5. Распределение модуля и фазы вектора с независимыми нормальными компонентами

В качестве еще одного примера функционального преобразования рассмотрим переход от случайных декартовых координат (ξ, η) точки к ее случайным полярным координатам - модулю ρ и фазе θ радиус-вектора:

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad \rho \in (0, \infty);$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\eta}{\xi} \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\xi = \rho \cos \theta; \quad \eta = \rho \sin \theta$$

Пусть декартовы координаты точки ξ и η - независимые нормальные случайные величины со средними значениями $\langle \xi \rangle = \xi_0$ и $\langle \eta \rangle = \eta_0$ и одинаковыми дисперсиями, равными σ^2 . Совместное их распределение имеет плотность вероятности

$$f_{\xi, \eta}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}{2\sigma^2}}$$

Сумму квадратов в показателе экспоненты запишем в следующем виде

$$\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ (\xi^2 + \eta^2) - 2(\xi \xi_0 + \eta \eta_0) + (\xi_0^2 + \eta_0^2) \right\}$$

Очевидно, если обозначить через (ρ_0, θ_0) полярные координаты сред-

него положения точки $\xi_0 = \rho_0 \cos \theta_0$; $\eta_0 = \rho_0 \sin \theta_0$

то показатель экспоненты определится формулой

$$\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2 \right\}$$

Учитывая, что якобиан преобразования равен ρ получим, согласно (3.13), следующее выражение для совместной плотности вероятности полярных координат точки

$$f_{\rho\theta}(\rho, \theta) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2}{2\sigma^2}} \quad (3.14)$$

Интегрируя (3.14) по угловой переменной $\theta \in (0, 2\pi)$ вычислим плотность вероятности модуля вектора ρ

$$\begin{aligned} f_{\rho}(\rho) &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2 + \rho_0^2}{2\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\rho\rho_0}{\sigma^2} \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = \\ &= \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2 + \rho_0^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\rho\rho_0}{\sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $I_0(x)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [7]. Это распределение называется обобщенным распределением Рэлея или распределением Райса. В предельном случае $\rho_0/\sigma \ll 1$ / сильные флуктуации точки относительно среднего положения / можно считать, что $I_0(\frac{\rho\rho_0}{\sigma^2}) \approx 1$ при этом из распределения (3.15) следует распределение Рэлея

$$f_{\rho}(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \quad (3.16)$$

В противоположном случае, когда $\rho_0/\sigma \gg 1$ / слабые флуктуации / при $\rho \gtrsim \sigma$ можно воспользоваться асимптотической формулой для модифицированной функции Бесселя

$$I_0\left(\frac{\rho\rho_0}{\sigma^2}\right) \approx \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi\rho\rho_0}} e^{\frac{\rho\rho_0}{\sigma^2}}$$

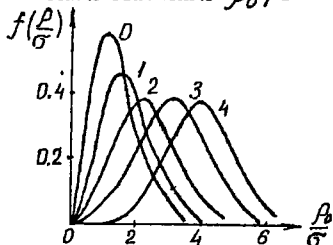
после подстановки которой в (3.11) плотность вероятности ρ преобразуется к виду

$$f_{\rho}(\rho) \approx \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{2\sigma^2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi\rho\rho_0}}$$

Определяющую роль в этом выражении играет экспонента, а так как $\rho_0/\sigma \gg 1$ то распределение имеет ярко выраженный пик в окрестности точки $\rho = \rho_0$. Полагая в степенных множителях $\rho \approx \rho_0$ получим

$$f_\rho(\rho) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{2\sigma^2}}$$

то есть при $\rho_0/\sigma \gg 1$ распределение модуля вектора оказывается близким к нормальному. Изменение формы распределения Райса по мере увеличения отношения ρ_0/σ можно иллюстрировать рис. 3.3, на котором у каждой кривой указано соответствующее значение отношения $\rho_0/\sigma = 0, 1, 2, 3, 4$.



Распределение фазы θ плоского вектора получим из (3.15) интегрированием по ρ в пределах от 0 до ∞

Рис. 3.3

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\rho_0^2}{2\sigma^2} \sin^2(\theta - \theta_0)} \int_0^\infty e^{-\frac{[\rho - \rho_0 \cos(\theta - \theta_0)]^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho. \quad (3.17)$$

В первом предельном случае сильных флуктуаций $\rho_0/\sigma \ll 1$

$$f_\theta(\theta) \approx \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho = \frac{1}{2\pi}, \quad (3.18)$$

то есть распределение θ оказывается равномерным на интервале $\theta \in (0, 2\pi)$

В случае слабых флуктуаций $\rho_0/\sigma \gg 1$ плотность (3.17) имеет хорошо выраженный максимум в точке $\theta = \theta_0$. Заменяя в окрестности этой точки $\sin(\theta - \theta_0)$ приближенно на $(\theta - \theta_0)$ полагая $\cos(\theta - \theta_0) \approx 1$ получим

$$f_\theta(\theta) \approx \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(\sigma/\rho_0)^2}} \int_0^\infty e^{-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho$$

Поскольку $\rho_0 \gg \sigma$ экспонента в подынтегральном выражении быстро убывает при удалении от точки $\rho = \rho_0$, так что влияние нижнего предела на значение интеграла оказывается пренебрежимо малым.

Благодаря этому нижний предел можно заменить на $-\infty$ не внося заметной погрешности, после чего интеграл легко вычисляется, и плотность вероятности $f_{\theta}(\theta)$ оказывается близкой к нормальной плотности

$$f_{\theta}(\theta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2(\sigma/\rho_0)^2}} \quad (3.19)$$

Таким образом, если при $\rho_0/\sigma \ll 1$ когда случайные отклонения значительно превышают среднее расстояние точки до начала координат, распределение фазы равномерное, то при удалении среднего положения точки от начала координат $\rho_0 \gg \sigma$ флуктуации фазы ослабевают, ее распределение оказывается близким к нормальному со средним значением θ_0 и дисперсией флуктуаций $(\sigma/\rho_0)^2$

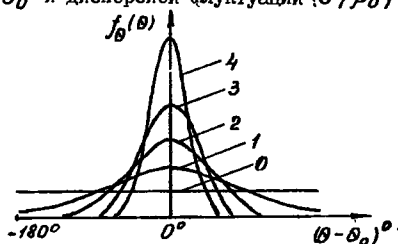


Рис. 3.4

Изменение распределения фазы при увеличении отношения (ρ_0/σ) показано на рис. 3.4. Кривые на графике приведены для значений отношения

$$\rho_0/\sigma = 0, 1, 2, 3, 4$$

Приведенные распределения модуля и фазы случайного вектора широко используются в статистической радиофизике при описании случайных комплексных

сигналов [1-4] которые часто изображаются векторами в комплексной плоскости. При этом (ξ_0, η_0) характеризуют квадратурные составляющие среднего / полезного, информативного / сигнала, (ρ_0, θ_0) - его амплитуду и фазу. Смешиваясь аддитивно со случайным нормальным шумом, квадратурные составляющие которого $(\xi - \xi_0)$ и $(\eta - \eta_0)$ статистически независимы, в среднем равны нулю и имеют дисперсию σ^2 он формирует случайный сигнал, для которого значение ρ_0/σ является отношением типа "сигнал/шум". Как следует из проведенного рассмотрения, флуктуации амплитуды случайного сигнала оказываются рэлеевскими в отсутствии полезного сигнала и нормализуются, когда на фоне слабого шума наблюдается сильный полезный сигнал.

3.6. Моделирование выборки случайных значений о заданным законом распределения

Существуют разнообразные методы моделирования случайных величин.

Для большинства из них при моделировании на ЭВМ исходным материалом служат равномерно распределенные на интервале $(0, 1)$ случайные числа, вырабатываемые программным датчиком. Рассмотрим один из достаточно общих методов преобразования случайных чисел с равномерным распределением в случайные числа с заданным законом распределения - метод нелинейного преобразования. В его основе лежат следующие простые соображения [8]

Предположим, что случайная величина ξ преобразуется в случайную величину x , причем это преобразование является взаимно однозначным. Очевидно, если значение ξ с некоторой вероятностью попадает в интервал $(\xi', \xi' + d\xi')$, то с той же вероятностью значение x окажется в соответствующем интервале $(x', x' + dx')$. Запишем это утверждение в форме равенства

$$f_{\xi}(\xi') d\xi' = f_x(x') dx',$$

где $f_{\xi}(\xi)$ - плотность вероятности случайной величины ξ а $f_x(x)$ - плотность вероятности x . Если ξ - равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ случайная величина, то равенство принимает простой вид

$$d\xi' = f_x(x') dx'$$

и определяет функциональную связь между ξ и x

$$\xi = \int_{-\infty}^x f_x(x') dx' = F_x(x),$$

где $F_x(x)$ - функция распределения величины x . Таким образом, если распределение случайной величины x характеризуется плотностью $f_x(x)$ то преобразование

$$\xi = F_x(x)$$

дает величину, равномерно распределенную на интервале $(0, 1)$. Ино, что обратная функция

$$x = F_x^{-1}(\xi) \tag{3.20}$$

позволяет преобразовать равномерно распределенную величину $\xi \in (0, 1)$ в величину с заданным законом распределения.

Например, нужно преобразовать равномерно распределенную величину

$\xi \in (0, 1)$ в Raleigh'скую величину $x \in (0, \infty)$ с плотностью вероятности $f_x(x)$

$$f_x(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Найдем функцию распределения

$$F_x(x) = \int_0^x \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0$$

Как показано, величина

$$\xi = F_x(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

будет равномерно распределенной на интервале $(0, 1)$ Обратное преобразование

$$x = \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - \xi)} = F_x^{-1}(\xi)$$

дает решение задачи. Заметим, что можно также воспользоваться преобразованием

$$x = \sigma \sqrt{-2 \ln \xi} \quad (3.21)$$

поскольку разность $1 - \xi$ так же, как и ξ является равномерно распределенной величиной на $(0, 1)$

Таким образом, метод нелинейного преобразования предполагает получение выборочных значений ξ_i $i = 1, 2, \dots, N$ и последующее преобразование их в выборочные значения x_i

3.7. Моделирование нормального распределения

Решение задачи о распределении модуля и фазы случайного вектора, ортогональные компоненты которого независимы и распределены нормально, подсказывает простой путь моделирования нормально распределенных значений методом нелинейного преобразования. Действительно, если ρ - ралеевская случайная величина, а θ - равномерно распределенная на интервале $[0, 2\pi]$ то их совместное распределение - при условии статистической независимости - имеет плотность вероятности

$$f_{\rho, \theta}(\rho, \theta) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$$

Преобразование

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta ; \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

даёт новые случайные величины с нормальным распределением

$$f_{x,y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},$$

при этом x и y являются статистически независимыми, имеют нулевые средние значения и равные дисперсии σ^2

Значения θ , равномерно распределённые на интервале $[0, 2\pi]$ представим в виде

$$\theta = 2\pi \xi_1; \quad \xi_1 \in [0, 1]$$

где ξ_1 - равномерно распределённая на единичном отрезке величина, значения которой моделируются программным датчиком квазислучайных чисел.

Значения рэлеевской случайной величины ρ согласно (3.21), можно получить преобразованием

$$\rho = \sigma \sqrt{-2 \ln \xi_2} \quad \xi_2 \in [0, 1]$$

где ξ_2 - также равномерно распределённая на единичном интервале случайная величина, статистически независимая от ξ_1

Таким образом, две независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 равномерно распределённые на интервале $[0, 1]$, преобразуются в две статистически независимые нормально распределённые случайные величины x и y с нулевыми средними значениями $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$ и равными дисперсиями σ^2 по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x &= \sigma \sqrt{-2 \ln \xi_2} \cdot \cos 2\pi \xi_1, & x \in (-\infty, \infty); \\ y &= \sigma \sqrt{-2 \ln \xi_2} \cdot \sin 2\pi \xi_1, & y \in (-\infty, \infty) \end{aligned} \quad (3.22)$$

От центрированных величин x и y несложно перейти к случайным величинам с отличными от нуля средними значениями, для этого достаточно заданные средние значения добавить к тем случайным, которые получены преобразованием (3.22).

Заметим, что в ряде случаев методы моделирования могут основываться на конкретных описаниях моделируемой величины. Например, в ка-

честве нормально распределенных случайных чисел можно использовать сумму нескольких независимых случайных чисел с равномерным распределением. Это приближение основано на центральной предельной теореме, и при большом числе слагаемых дает величину, распределение которой близко к нормальному.

3.8. Задачи

1. Найти $f_y(y)$ если $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $y = e^x$

2. Найти $f_y(y)$ если $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $y = x^2$

Решить далее эту же задачу, но для закона $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Ответ: а) $f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y} \cdot \sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} & y > 0; \\ 0 & y < 0 \end{cases}$

б) $f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y} \sigma} e^{-\frac{(y+\mu^2)}{2\sigma^2}} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}\right) & y > 0; \\ 0 & y < 0 \end{cases}$

Указание: учесть, что обратная функция $x = \pm\sqrt{y}$ - двузначная и воспользоваться формулой (3.6).

3. Определить плотность $f_y(y)$ при заданных законах преобразования, если случайная переменная ξ распределена равномерно в интервале $[0, 1]$.

а) $y = -\ln \xi$;

б) $y = -2 \ln \xi$;

в) $y = 1 - 2 \ln \xi$;

г) $y = \sigma \sqrt{-2 \ln \xi}$

Вычислить среднее значение $\langle y \rangle$ и дисперсию σ_y^2 случайной величины y

Ответы: а) $f_y(y) = e^{-y}$, $y \in (0, \infty)$; $\langle y \rangle = 1$; $\sigma_y^2 = 1$

б) $f_y(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-y/2\sigma^2}$, $y \in (0, \infty)$;

г) $\langle y \rangle = \sqrt{\pi/2} \sigma$; $\sigma_y^2 = \frac{4-\pi}{2} \sigma^2$

4. Найти закон преобразования $y = y(x)$, моделирующий случайную величину y с плотностью $f_y(y) = 2e^{-2y}$ если дано, что x - равномерно распределенная на интервале $[0, 1]$ случайная величина.

Ответ: $y = -\frac{1}{2} \ln x$

5. Определить плотность распределения процесса на выходе нелинейного элемента с характеристикой

$$y = \begin{cases} -1 & x < -1; \\ \sin \pi x & -1 \leq x \leq 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

если на вход поступает случайный процесс $x(t)$, распределение которого подчиняется закону

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & |x| \leq 1; \\ 1/4 e^{-\pi/4 (|x|-1)^2} & |x| > 1 \end{cases}$$

Ответ: $f(y) = \frac{1}{2} \delta(y^2 - 1) + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad |y| \leq 1$

6. На вход устройства, сжимающего динамический диапазон мгновенных значений случайного процесса

$$y = \begin{cases} \sqrt{a} x & x > 0; \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

поступает процесс $x(t)$ с равномерной плотностью в интервале $[0, a]$. Определить плотность распределения процесса на выходе.

7. Определить закон распределения мгновенных значений тока на выходе нелинейного элемента, вольт-амперная характеристика которого

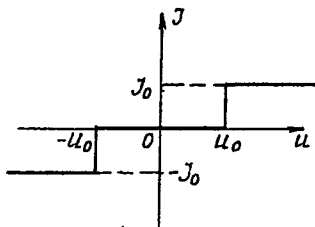


Рис. 3.5

изображена на рис. 3.5. Входное напряжение имеет симметричный нормальный закон распределения с нулевым средним значением.

8. На вход безынерционного линейного детектора с характеристикой

$$i(t) = \begin{cases} a u(t), & u(t) > 0; \\ 0 & u(t) < 0 \end{cases}$$

подается нормальный шум с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 . Найти распределение мгновенных значений тока $i(t)$, его среднее значение и дисперсию.

4. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

4.1. Основные задачи математической статистики

Статистические методы являются важным инструментом экспериментальных исследований. Результат эксперимента всегда содержит ошибки, как бы тщательно ни проводились измерения, и это вносит в получаемые данные элемент случайности. Но более существенным является тот факт, что многие законы природы имеют статистический характер, и поэтому помимо ошибок измерений в экспериментальных данных проявляются флуктуации, свойственные изучаемому явлению или процессу. На практике всегда количество экспериментальных данных ограничено, а статистические закономерности, наблюдаемые в случайных явлениях, проявляются тем отчетливее, чем больше объем статистического материала. В этих условиях по совокупности наблюдений статистические методы позволяют сделать обоснованные выводы о свойствах случайных процессов, построить и проверить подходящие статистические модели. Для многих приложений наиболее важными являются следующие три задачи математической статистики.

1. Оценка неизвестной функции распределения или плотности вероятности. Для одномерного распределения эта задача предполагает оценку интегральной или дифференциальной функции распределения случайной величины x / значений случайного процесса в заданном сечении / по полученной выборке значений — результатам независимых измерений x_1, x_2, \dots, x_n . Эту задачу можно распространить на многомерные распределения.

2. Оценка неизвестных параметров. Чтобы найти закон распределения, нужно располагать достаточно обширным статистическим материалом, порядка нескольких сотен наблюдений. На практике часто объем выборки оказывается значительно меньше и недостаточен для того, чтобы найти неизвестный закон распределения; но все же этот материал может быть обработан и использован для определения — хотя бы ориентировочно — важнейших числовых характеристик случайной величины: математического ожидания, дисперсии, иногда — высших моментов. Во многих практически важных задачах вид закона распределения известен заранее, но все или несколько параметров этого распределения неизвестны. В ряде задач закон распределения вообще несущественен, необходимы только его числовые характеристики. В каждом из этих случаев нужно по огра-

ниченному числу наблюдений приближенно определить ряд неизвестных параметров. Поскольку выборка ограничена, то определенные по ней значения содержат элемент случайности и называются выборочными значениями или статистиками. Выборочные значения используются как оценки соответствующих характеристик исходного распределения. Для оценки одного параметра можно построить и рассчитать несколько отличающихся друг от друга статистик, исходя из различных требований к приближенному результату. Предпочитают оценки, которые сходятся по вероятности к оцениваемому параметру при неограниченном увеличении размера выборки / состоятельные оценки /, у которых математическое ожидание в точности равно оцениваемому параметру / несмещенные оценки / или у которых наименьшая дисперсия / эффективные оценки /. На практике не всегда удается удовлетворить всем этим требованиям. Например, может оказаться, что даже если эффективная оценка существует, формулы для ее вычисления слишком сложны, и приходится удовлетвориться другой оценкой, дисперсия которой несколько больше. Иногда применяются простые для расчетов, но незначительно смещенные оценки, уточнение которых является сложным и необязательным в решаемой задаче. В каждом случае выбору оценки должно предшествовать ее критическое рассмотрение со всех перечисленных точек зрения.

3. Проверка статистических гипотез. Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о значениях параметров распределения, вид которого известен. Все возможные гипотезы проверяют по эмпирическим данным, то есть по выборке. Принятие или отклонение гипотезы — это выбор решения относительно свойств или состояния изучаемого явления по результатам наблюдений. Например, теоретический анализ дает основание предположить, что амплитуда регистрируемого сигнала является релеевской случайной величиной. Необходимо проверить, совместимы ли измеренные значения амплитуды с этой гипотезой. Другой пример: регистрируемый сигнал создается или шумами канала связи, или является смесью полезного сигнала и шума. Распределение его амплитуды в двух этих случаях различно. Задачу обнаружения полезного сигнала можно сформулировать как задачу проверки статистической гипотезы о шумовой природе сигнала.

Если гипотеза содержит только одно предположение, ее называют простой. В двух приведенных примерах сформулированы простые гипотезы. Сложной называют гипотезу, состоящую из двух и более простых. Например, обнаружение одного из совокупности сигналов на фоне шума предполагает проверку сложной статистической гипотезы. Выдвинутой гипо-

тезу принято называть основной / нулевой / и обозначать H_0 . Противоречащую ей гипотезу называют конкурирующей / альтернативной / и обозначают H_1 .

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0 называется статистическим критерием. Статистические критерии не могут доказать ни одной гипотезы, они могут лишь указать, что она не противоречит наблюдаемым результатам, то есть нет оснований, чтобы ее отвергнуть. Действительно, выборка значений, реализовавшихся при измерении, случайна и едва ли повторится при повторных измерениях. Тот факт, что она согласуется с нулевой гипотезой, не дает полной гарантии, что гипотеза справедлива и все последующие выборки не будут ей противоречить. На практике, если есть возможность, гипотезу проверяют другими способами или повторяют измерения, увеличивая объем выборки.

4.2. Подготовка статистического материала - выборка и способы ее записи

Математическая статистика позволяет получать обоснованные выводы о параметрах или виде распределения случайной величины по совокупности наблюдений над ней - выборке объема N : x_1, x_2, \dots, x_N . Вариационным рядом выборки называется способ ее записи, при котором элементы упорядочиваются по величине. При большом объеме выборки ее элементы объединяются в группы / разряды /. Для этого интервал, содержащий все элементы выборки, разбивается на k непересекающихся интервалов-разрядов. Вычисления значительно упрощаются, если частичные интервалы имеют одинаковую длину

$$h = \frac{x^{(N)} - x^{(1)}}{k}$$

После этого определяют частоты - количество n_j элементов выборки, попавших в i -й интервал / элемент, совпадающий с верхней границей, относится к последующему интервалу /.

Очевидно, что сумма частот n_j по всем частичным интервалам $j = 1, 2, \dots, k$ равна объему выборки

$$N = \sum_{j=1}^k n_j$$

Сумма частот по интервалам от первого до i -го называется накопленной / к i -ому интервалу / частотой

$$N_i = \sum_{j=1}^i n_j$$

Таким образом, распределение значений случайной величины x по частичным интервалам можно определить или локальной характеристикой - частотой n_i или интегральной характеристикой - накопленной частотой N_i . Частоты n_i , N_i зависят от объема выборки N . Это

неудобно при сопоставлении результатов по выборкам разных объемов. Поэтому чаще пользуются относительными частотами

$$p_i^* = \frac{n_i}{N} ; P_i^* = \frac{N_i}{N}$$

для которых

$$\sum_{i=1}^k p_i^* = 1 ; P_k^* = 1$$

и которые при $N \rightarrow \infty$ переходят в вероятности p_i . Такая группированная выборка часто оформляется графически в виде так называемой гистограммы

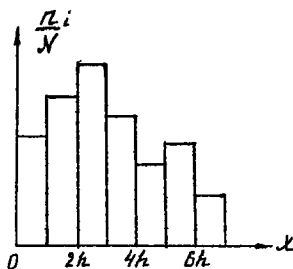


Рис 4.1

рис. 4.1 Гистограмма частот это ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, построенных на интервалах группировки так, что площадь каждого прямоугольника равна частоте n_i ; $i = 1, 2, \dots, k$. Отсюда следует, что площадь гистограммы частот равна объему выборки N . Высоты прямоугольников равны n_i/h . Аналогично отобразится гистограмма относительных частот, для которой высоты прямоугольников равны p_i/h а площадь всей ступенчатой фигур равна единице. Число подынтервалов и их длину задают из соображений наглядности и удобства. Если нет особых соображений, то число подынтервалов задают по правилу Штергеса [10].

$$k = E(1 + 3,22 \lg N)$$

где $E(x)$ означает целую часть числа x .

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ определяется по значениям относительных накопленных частот соотношением

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} n_i / N = \sum_{x_i < x} p_i$$

Согласно закону больших чисел Бернулли при каждом фиксированном x эмпирическая функция распределения $F^*(x)$, полученная по выборке объема N сходится по вероятности при $N \rightarrow \infty$ к функции распределения $F(x)$ теоретически бесконечной генеральной совокупности. Таким образом, чем больше объем выборки, тем, вообще говоря, эмпирическая функция распределения дает более точное представление о теоретической функции распределения.

4.3. Оценка среднего значения

Выборочным средним значением величины x называется

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.1)$$

Легко показать, что выборочное среднее \bar{x} является состоятельной оценкой $\langle x \rangle$. Действительно, считая, что случайные величины x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ имеют ограниченные дисперсии, обратимся к теореме Чебышева - наиболее простой форме закона больших чисел, согласно которой при $n \rightarrow \infty$ среднее арифметическое значение \bar{x} сходится по вероятности к математическому ожиданию $\langle x \rangle$.

Оценка \bar{x} является также несмещенной, поскольку

$$\langle \bar{x} \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right\rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle x_i \rangle = \langle x \rangle$$

Выборочные начальные моменты второго и более высоких порядков определяются аналогично

$$\bar{x}^{\ell} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{\ell} \quad \ell = 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

Несложно показать, что они также являются несмещенными состоятельными оценками $\langle x^{\ell} \rangle$.

4.4. Оценка дисперсии

В определении выборочных центральных моментов возможен произвол. Если известно математическое ожидание $\langle x \rangle$, то центральные моменты естественно определить относительно этой точно заданной вели-

чины, то есть

$$\overline{(x - \langle x \rangle)^L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^L \quad (4.3)$$

Если же $\langle x \rangle$ неизвестно, то в качестве его оценки по имеющейся выборке целесообразно принять выборочное среднее \bar{x} и определить выборочные центральные моменты формулами

$$\overline{(x - \bar{x})^L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^L$$

Заметим однако, что замена $\langle x \rangle$ на \bar{x} ухудшает оценки центральных моментов: выборочные моменты $\overline{(x - \bar{x})^L}$ есть состоятельные, но смещенные оценки моментов $\langle (x - \langle x \rangle)^L \rangle$. Покажем это на примере выборочной дисперсии

$$s^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Преобразуем сначала выражение для нее, введя $\langle x \rangle$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - \langle x \rangle) - (\bar{x} - \langle x \rangle)]^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 - 2(\bar{x} - \langle x \rangle) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle) + \\ &\quad + (\bar{x} - \langle x \rangle)^2 \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle) = \bar{x} - \langle x \rangle$$

получим

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 - (\bar{x} - \langle x \rangle)^2$$

Вычислим математическое ожидание $\langle s^2 \rangle$ Среднее значение первого слагаемого

$$\left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle (x_i - \langle x \rangle)^2 \rangle = \sigma^2$$

совпадает с дисперсией, то есть дает нужный результат. Но среднее значение второго слагаемого не равно нулю и создает смещение оценки. Действительно,

$$\langle (\bar{x} - \langle x \rangle)^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle) \right)^2 \right\rangle$$

и поскольку x_i для всех $i = 1, 2, \dots, n$ статистически независимы, то

$$\langle (\bar{x} - \langle x \rangle)^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \frac{\sigma^2}{n}$$

Таким образом, в целом

$$\langle s^2 \rangle = \sigma^2 \frac{n-1}{n}$$

то есть s^2 является смещенной оценкой дисперсии σ^2 . Величина смещения σ^2/n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ что указывает на состоятельность оценки. Чтобы скорректировать смещение, вместо s^2 целесообразно воспользоваться статистикой

$$S^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (4.4)$$

для которой, очевидно,

$$\langle S^2 \rangle = \sigma^2.$$

Статистика S^2 является состоятельной и несмещенной оценкой σ^2 и применяется наиболее часто. Можно показать, что для центральных моментов третьего и четвертого порядков, через которые выражаются коэффициенты асимметрии и эксцесса, несмещенными и состоятельными оценками будут соответственно величины

$$\frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \overline{(x - \bar{x})^3} \quad \text{для} \quad \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle \quad (4.5)$$

$$\text{и} \quad \frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)} \left\{ \overline{(x - \bar{x})^4} - \frac{2n-3}{n^2} \left[\overline{(x - \bar{x})^4} + 3 \overline{(x - \bar{x})^2}^2 \right] \right\} \quad (4.6)$$

для $\langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle$.

4.5. Проверка гипотезы о виде распределения

Пусть x_1, x_2, \dots, x_N - выборка значений случайной величины X . Проверяется гипотеза H_0 состоящая в том, что X подчиняется некоторому определенному закону распределения $f(x)$. Как правило, вид теоретической кривой распределения $f(x)$ выбирается заранее из соображений, связанных с существом задачи, а часто просто с внешним видом полученной по результатам наблюдений гистограммы частот n_i . Предположим, что результаты наблюдений сведены в K разрядов, для каждого из которых подсчитаны, исходя из гипотезы H_0 теоретические вероятности p_i . За меру расхождения теоретического и эмпирического распределений примем для каждого разряда квадрат отклонения реализовавшейся в выборке частоты n_i от прогнозируемого в соответствии с гипотезой H_0 числа исходов в i -й разряд Np_i отнеся его к Np_i а для гистограммы в целом - сумму квадратов отклонений

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i} = N \sum_{i=1}^K \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} \quad (4.7)$$

Величина χ^2 случайная и нас интересует ее распределение. К. Пирсон показал, что при больших N закон распределения χ^2 практически не зависит от вида функции распределения $f(x)$ и от объема выборки N а зависит только от числа разрядов K . При этом с ростом N он асимптотически приближается к распределению Пирсона, известному как "распределение χ^2 ", плотность которого, если положить $u = \chi^2$ определена для положительных значений $u \geq 0$ и имеет вид / см. раздел 8.10 /

$$f(u) = \frac{1}{2^{\frac{\chi}{2}} \Gamma(\frac{\chi}{2})} \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{\chi}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, \quad u \in (0, \infty) \quad (4.8)$$

где χ - число степеней свободы.

Это объясняется тем, что при большом объеме выборки N и таком разбиении интервала ее значений на разряды, чтобы для каждого разряда выполнялось условие $Np_i \gg 1$ частота n_i определяется большим числом независимых событий / попаданий в i -й разряд / так что ее распределение приближается к нормальному. Распределение же Пирсона известно как распределение суммы квадратов независимых

нормальных величин. Однако число степеней свободы в данном случае меньше κ . Это связано с тем, что на относительные частоты наложены независимые условия / оязи /. Непременным условием всегда должно быть

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \rho_i^* = 1$$

Если теоретическое распределение подбирается так, чтобы $\langle \chi \rangle = \bar{\chi}$ то это означает введение условия

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \chi_i \rho_i^* = \langle \chi \rangle$$

Так же можно ввести при необходимости условие равенства теоретической и выборочной дисперсий и т.д. Если на значения ρ_i^* $i = 1, 2, \dots, \kappa$ наложено \mathcal{S} связей, то число степеней свободы соответственно уменьшается и будет равно

$$\chi = \kappa - \mathcal{S} \quad (4.9)$$

Таким образом, при условии $\mathcal{N} \rho_i \gg 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, \kappa$ мера расхождения χ^2 теоретического и эмпирического распределений распределена по закону, близкому (4.8), с числом степеней свободы, определяемом разностью (4.9). Этот вывод позволяет рассчитать, насколько вероятно с точки зрения гипотезы H_0 отклонение эмпирического распределения значений выборки от предполагаемого теоретического, то есть с какой вероятностью полученная выборка может соответствовать гипотезе H_0 .

Распределение χ^2 табулировано, поэтому при заданном χ можно, пользуясь таблицами, легко определить вероятность превышения мерой χ^2 любого заданного уровня. На этом построен критерий-оценки согласованности теоретического и статистического распределений. Его схема такова:

- определяется мера расхождения распределений χ^2 ;
- определяется число степеней свободы χ ;
- по таблице находится вероятность того, что полученное значение меры χ^2 может быть превышено за счет чисто случайных причин; если эта вероятность ρ велика, то расхождение вполне можно объяснить, исходя из гипотезы H_0 поэтому гипотеза принимается; если же вероятность мала, то гипотеза отвергается: считается, что расхождение слишком велико и указывает на неудачный выбор теоретического распределения.

В соответствии с этой схемой назначают достаточно малую вероят-

ность α - уровень значимости, полагая, что при $\rho < \alpha$ событие о такой вероятности практически невозможно встретить в единичном испытании. Из условия

$$\alpha = \int_{\chi^2_{\alpha}}^{\infty} f(u) du \quad (4.10)$$

где $f(u)$ - плотность вероятности 4.8 находят критическое значение χ^2_{α} ; при $0 \leq \chi^2 < \chi^2_{\alpha}$ гипотезу H_0 принимают, при $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$ - отвергают. Критическое значение иногда называют также доверительной границей, а вероятность $1-\alpha$ - доверительной вероятностью.

Заметим, что все же мера χ^2 лишь асимптотически при $N \rightarrow \infty$ следует распределению Пирсона, то есть оценки справедливы при больших объемах выборок. На практике обычно считается достаточным, если для каждого из разрядов выполняется условие $N\rho_i^* \geq 5$. Если в некоторых разрядах это условие не выполняется, то их следует объединить с соседними.

4.6. Задачи

1. Ошибки 500 результатов измерений дальности до цели радиодальномером приведены в таблице.

интервал (h_i), м.	-25; -15	-15; -5	-5; 5	5; 15	15; 25
число ошибок в интервале (r_i)	50	130	200	100	20
относительная частота (ρ_i^*)	0,10	0,26	0,40	0,20	0,04

Требуется: а/ построить гистограмму относительных частот $\rho_i^*(x)$ и эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ ошибок измерения дальности; б/ аппроксимировать выборочное распределение с помощью нормального закона; в/ пользуясь критерием согласия χ^2 с уровнем значимости $\alpha = 0,01$, проверить согласованность теоретического и эмпирического распределений.

Решение. а/ По условию число интервалов $k = 5$, а длина интервала $h = 10$ м. В соответствии с изложенным в разделе 4.2 строим гистограмму и эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$ графики которых соответственно изображены на рис.4.1.а.

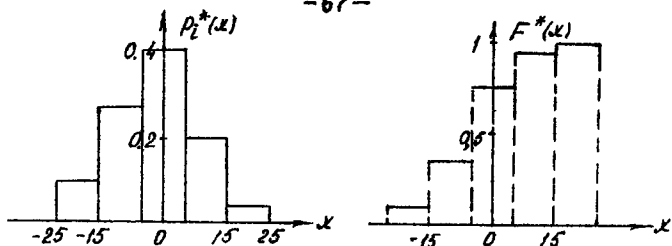


Рис. 4.1 а

б/ Определим выборочные средние и дисперсии ошибок дальнсмера

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 \alpha_i \rho_i^* = -20 \cdot 0,1 - 10 \cdot 0,26 - 0 \cdot 0,40 + 10 \cdot 0,20 + 20 \cdot 0,04 = 1,8 \text{ м};$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^5 \alpha_i^2 \rho_i^* - \bar{x}^2 = 98,76 \text{ м}^2$$

где α_i - середины интервалов.

Тогда выражения оценок плотности вероятности и функции распределения будут иметь вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(98,76)^2} e^{-\frac{(x+1,8)^2}{2 \cdot 98,76}}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \Phi\left(\frac{x+1,8}{9,93}\right),$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - интеграл вероятности.

в/ Для определения меры расхождения (4.7) необходимо вычислить вероятность

$$\rho_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right),$$

где x_i, x_{i+1} - границы i -ого интервала, а $\Phi(z)$ находится по таблицам для интеграла вероятности / см. Приложение /. Так, например, для четвертого интервала (5; 15) имеем

$$\rho_4 = \Phi\left(\frac{15+1,8}{9,93}\right) - \Phi\left(\frac{5+1,8}{9,93}\right) = 0,2012$$

Результаты вычислений остальных вероятностей сведены в таблицу

h_i , м.	-25;-15	-15;-5	-5; 5	5; 15	15; 25
ρ_i	0,0821	0,2818	0,3794	0,2012	0,0417

Подставив соответствующие значения в формулу (4.7), получим расхождение

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} = 3,427$$

Оценочными значениями заменены два параметра нормального распределения. Поэтому число степеней свободы $\nu = 5 - 2 - 1 = 2$. Из таблицы распределения χ^2 / см. Приложение / при $\nu = 2$ и $\alpha = 0,01$ находим

$$\chi_{\nu; \alpha}^2 = \chi_{2; 0,01}^2 = 9,21$$

Так как $\chi^2 = 3,427 < \chi_{\nu; \alpha}^2 = 9,21$ то гипотезу о том, что ошибка измерения распределена по нормальному закону, можно считать правдоподобной.

2. Испытания 200 радиоламп на их срок службы дали результаты, приведенные в таблице

срок службы	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000	1000-1100	1100-1200
n_i	1	9	18	33	40	52	29	14	4

Требуется: а/ установить теоретический закон распределения срока службы радиоламп и найти его параметры; б/ написать выражения для плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$; в/ пользуясь критерием χ^2 , установить, согласуются ли данные испытаний с гипотезой о распределении случайной величины по избранному теоретическому закону.

Ответ: а/ Закон распределения нормальный с параметрами

$$\bar{x} = 784 \tau. \quad s^2 = 26844 \tau^2 \quad s = 163,8 \tau.$$

в/ Согласуются.

3. Составить подпрограмму нахождения наибольшего и наименьшего элементов выборки, размаха выборки.

4. Составить подпрограмму для построения гистограммы абсолютных частот выборки.

4.7. Моделирование и статистический анализ выборочных значений

Этот раздел содержит описание лабораторной работы, выполняемой на ЭВМ, цель которой - на основе численного эксперимента дать представление о задачах моделирования случайных величин и о методах статистической обработки выборочных значений. Работа выполняется с применением диалого-вычислительного комплекса, включающего микроЭВМ видеотерминал и память для хранения программ / накопитель на магнитных дисках и т. п. /. Предыдущие разделы содержат необходимые для выполнения лабораторной работы теоретические сведения, а включенные в них задачи представляют в разных вариантах все этапы численного эксперимента и позволяют спланировать работу как небольшое исследование, выполняемое по определенному заданию. Приведенные базовые программы ориентированы на входной язык Бейсик, но могут быть просто реализованы на других близких языках / Квэйсик, Фортран /. Их текст призван помочь в составлении рабочей программы, разработка которой - задача каждого, кто приступает к численному эксперименту. Вместе с тем приведенные программы в целом можно использовать непосредственно как один из вариантов рабочей программы.

4.7.1. Задание к работе

1. Используя функцию $RND(x)$ в качестве датчика равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$ чисел имитировать с помощью заданного преобразования выборку объемом N значений $\{y\}$ случайной величины.

2. По этим отсчетам вычислить выборочное среднее значение

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

и дисперсию

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

3. Сравнить \bar{y} и S^2 с теоретическими значениями $\langle y \rangle$ и σ^2 , полученными из вида распределения. Объяснить причины возможных расхождений.

4. Рассчитать гистограмму частот полученной выборки.

5. При уровне значимости 5% проверить по χ^2 - критерию согласие

полученных данных с имитируемым законом распределения.

6. Интерпретировать полученный результат.

Варианты:

1. $y = -2 \ln \xi \quad N = 200.$

2. $y = -2 \ln \xi, \quad N = 200.$

3. $y = 1 - 2 \ln \xi, \quad N = 200$

4. $y = \sum_{j=1}^{12} \xi_j - 6 \quad N = 30$

5. $y = 2 \left(\sum_{j=1}^{12} \xi_j - 6 \right) \quad N = 30.$

6. $y = \sum_{j=1}^{12} \xi_j - 5, \quad N = 30$

7. $y = \sqrt{-2 \ln \xi_1} \sin 2\pi \xi_2 \quad N = 100$

8. $y = \sqrt{-2 \ln \xi_1} \cos 2\pi \xi_2 \quad N = 200$

9. $y = \sqrt{-2 \ln \xi} \quad N = 200.$

4.7.2. Форма отчета

Отчет по работе должен содержать:

- задание к работе;
- программы для заданного варианта;
- результаты расчета выборочных и теоретических средних значений и дисперсий;
- гистограмму статистического распределения и график теоретического распределения;
- расчетное значение χ^2 и оценку соответствия статистического и теоретического распределений.

4.7.3. Основные базовые программы

Моделирование распределения Рэлея

Подпрограмма (1000-1050) моделирует N отсчетов случайной величины Y и заносит их в массив $Y(N)$.

```

1000 REM РЭЛЕЙ
1010 FOR I=1 TO N \ Z=RND(0)
1020 Y(I)=SQR(LOG(1/(Z+Z)))
1030 NEXT I
1050 RETURN

```

Вычисление элементарных статистик

Подпрограмма (100-170) вычисляет среднее значение M и дисперсию D выборки объема N случайной величины Y занесенной в массив $Y(N)$

```

100 REM СРЕДНЕЕ, ДИСПЕРСИЯ
110 M=0 \ D=0
120 FOR I=1 TO N \ M=M+Y(I) \ NEXT I
130 M=M/N
140 FOR I=1 TO N \ X=Y(I)-M \ D=D+X*X \ NEXT I
150 D=D/(N-1)
160 PRINT "СРЕДНЕЕ M="M, "ДИСПЕРСИЯ D="D
170 RETURN

```

Определение максимального и минимального элементов выборки

Подпрограмма (200-299) определяет максимальный Y_1 и минимальный Y_0 элементы выборки $Y(N)$ размах выборки $w=Y_1-Y_0$ и длину подынтервала $H=w/K$ при числе подынтервалов K

```

200 REM MAXMIN
210 Y0=Y(1) \ Y1=Y(1)
220 FOR I=2 TO N \ T=Y(I)
230 IF T>Y1 THEN Y1=T
240 IF T<Y0 THEN Y0=T
250 NEXT I

```



```

260 W = YI - Y0 \ H = W / K
270 PRINT " YMIN = Y0 = " Y0 . " YMAX = YI = " YI
280 PRINT " РАЗМАЗ ВЫБОРКИ W = " W ,
      " ДЛИНА ИНТЕРВАЛА H = " H
290 RETURN
  
```

Построение гистограммы частот группированной
выборки

Подпрограмма (400-540) определяет частоты $G(I)$ - количество элементов выборки, попавших в I - й интервал, $I \in (1, K)$; печатает гистограмму частот, номер интервала I ; левую и правую границы I - ого интервала; частоту $G(I)$

```

400 REM ГИСТОГРАММА
410 FOR I=1 TO K \ G(I)=0 \ NEXT I
420 FOR J=1 TO N \ I=0
430 B = Y0
440 I = I + 1 \ B = B + H
450 IF Y(J) >= B THEN 440
460 G(I) = G(I) + 1
465 NEXT J
470 B = Y0
480 FOR I=1 TO K \ YI=B \ G1=G(I) \ B=B+H
490 PRINT " ГРАНИЦЫ " I "- ОГО ИНТЕРВАЛА
      YI B. " ЧАСТОТА G(" I ") = " G1
500 IF G1=0 THEN 530
520 FOR J=1 TO G1 \ PRINT " * " ; \ NEXT J
530 PRINT " " \ NEXT I
540 RETURN
  
```

Проверка согласия по χ^2 - критерию

Подпрограмма (300-370) расчета значений χ^2 предполагает, что теоретические вероятности попадания в каждый из K разрядов изве-

стны и записаны в массив P(K)

$$\chi^2 = \sum_{I=1}^K \frac{[G(I) - NP(I)]^2}{NP(I)}$$

```
300 REM ХИ - КВАДРАТ
310 PRINT "УТОЧНЕННОЕ ЧИСЛО ИНТЕРВАЛОВ K="; INPUT K
320 FOR I=1 TO K \ PRINT "P(I)="; INPUT P(I) \ NEXT I
330 X2 = 0
340 FOR I=1 TO K \ N1 = N * P(I) \ G1 = G(I) - N1
350 X2 = X2 + G1 * G1 / N1 \ NEXT I
360 PRINT "ХИ - КВАДРАТ X2=" X2
370 RETURN
```

Главная программа

```
10 DIM Y(200), G(30) P(10)
20 RANDOMIZE
30 PRINT "ОБЪЕМ ВЫБОРКИ N" \ INPUT N
35 GOSUB 1000 \ REM МОДЕЛИРОВАНИЕ
40 PRINT "ВЫБОРКА ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧ. ВЕЛИЧИНЫ"
45 FOR I=1 TO N \ PRINT I, Y(I) \ NEXT I
50 GOSUB 100 \ REM СРЕДНЕЕ, ДИСПЕРСИЯ
60 PRINT "ЧИСЛО ИНТЕРВАЛОВ K"; INPUT K
70 GOSUB 200 \ REM МАХМИН
80 GOSUB 400 \ REM ГИСТОГРАММА
90 GOSUB 300 \ REM ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ
99 STOP
```

4.8. Методы оценки параметров распределений

Пусть вид закона распределения известен, но его параметры необходимо определить на основе экспериментальных данных. Число опытов всегда ограничено, и потому значение параметра, рассчитанное по конкретной выборке, всегда содержит элемент случайности. Но и оценку параметра по имеющейся выборке можно построить разными способами и получить при этом различные результаты. Возникает вопрос, каким оценкам отдать предпочтение, какие из них ближе к истинному значению параметра.

В каждой задаче понятие "близость" может иметь свой смысл, его необходимо конкретизировать, исходя из условий и цели исследования, то есть сформулировать критерий качества оценки. Выбор критерия качества определяет метод построения оценки. Рассмотрим кратко методы, которые в прикладных задачах используются наиболее часто.

4.8.1. Метод моментов

Можно доказать, что выборочные моменты являются состоятельными оценками соответствующих моментов исходного распределения. На этом основан метод моментов. Его исходным условием, определяющим оценку неизвестных параметров распределения, является равенство нескольких выборочных и теоретических моментов.

В некоторых распределениях моменты низших порядков выступают непосредственно в качестве параметров. Например, экспоненциальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\langle x \rangle} e^{-\frac{x}{\langle x \rangle}}, \quad x \in (0, \infty)$$

имеет единственным параметром математическое ожидание $\langle x \rangle$. Принимая за оценку $\langle x \rangle$ выборочное среднее \bar{x} можно приближенно восстановить плотность распределения в форме

$$f(x) = \frac{1}{\bar{x}} e^{-\frac{x}{\bar{x}}}, \quad x \in (0, \infty)$$

Параметрами нормального распределения являются математическое ожидание $\langle x \rangle$ и дисперсия σ^2 . Их оценка статистиками

$$\bar{x} \quad \text{и} \quad S^2 = \frac{n}{n-1} \overline{(x - \bar{x})^2}$$

также позволяет приближенно, но полностью определить плотность распределения.

Чаше всего функциональная зависимость моментов распределения от его параметров носит более сложный характер.

Пусть исходное распределение также имеет два неизвестных параметра θ_1 и θ_2 . Укажем их явно в обозначении плотности вероятности, записав ее в виде

$$f(x | \theta_1, \theta_2)$$

и обозначив соответственно моменты

$$\langle x | \theta_1, \theta_2 \rangle = \int x f(x | \theta_1, \theta_2) dx ;$$

$$\langle x^2 | \theta_1, \theta_2 \rangle = \int x^2 f(x | \theta_1, \theta_2) dx$$

По имеющейся выборке рассчитаем выборочные моменты

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad ; \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

и составим систему уравнений

$$\langle x | \theta_1, \theta_2 \rangle = \bar{x} ;$$

$$\langle x^2 | \theta_1, \theta_2 \rangle = \bar{x}^2$$

Ее решение определяет оценки неизвестных параметров $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ которые являются функциями выборочных моментов и, следовательно, функциями всех выборочных значений

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) ;$$

$$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

При оценке K неизвестных параметров следует приравнять выборочные и теоретические моменты от первого до K -ого порядка включительно и из полученной системы уравнений определить оценки $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_K$. Оценки по методу моментов состоятельны, асимптотически / при увеличении объема выборки / несмещенные, причем распределение их асимпто-

тически нормальное с дисперсией, убывающей как $\frac{1}{n}$. Преимущество метода моментов – сравнительная простота его применения, поэтому он часто используется на практике. Однако, вообще говоря, оценки по методу моментов неэффективны.

4.8.2. Метод наименьшей апостериорной дисперсии

Критерий качества оценки, лежащий в основе этого метода, определяется требованием наименьшей апостериорной дисперсии оценки параметра распределения. Прежде чем записать это условие математически, необходимо пояснить несколько понятий.

Будем рассматривать неизвестный параметр θ как случайную величину, принимающую в различных опытах в зависимости от условий их проведения разные значения. Плотность ее распределения $f(\theta)$ назовем априорной плотностью вероятности. В проведенном эксперименте реализовалось одно из возможных значений θ и при этом зафиксирована выборка x_1, x_2, \dots, x_n которую для краткости обозначим \vec{x} . Запишем совместную плотность вероятности \vec{x} и θ в двух формах, пользуясь теоремой умножения вероятностей

$$f(\vec{x}, \theta) = f(\vec{x}|\theta) f(\theta) = f(\theta|\vec{x}) f(\vec{x}) \quad (4.11)$$

Для выборки \vec{x} условная плотность $f(\vec{x}|\theta)$ характеризует ее правдоподобность при фиксированном значении θ . Функцию $f(\vec{x}|\theta)$ называют функцией правдоподобия выборки \vec{x} . Вид ее известен, так как фактически это плотность вероятности закона распределения \vec{x} в котором нужно определить параметр θ . Если априорная плотность $f(\theta)$ известна, то априорная плотность вероятности $f(\vec{x})$ может быть найдена интегрированием

$$\int f(\vec{x}|\theta) f(\theta) d\theta = f(\vec{x}) \quad (4.12)$$

Условную плотность $f(\theta|\vec{x})$ называют апостериорной, поскольку она учитывает исход эксперимента и, следовательно, дает более точное представление о возможных значениях θ чем до опыта. Через функцию правдоподобия выборки и априорную плотность вероятности θ она выражается следующим отношением

$$f(\theta|\vec{x}) = \frac{f(\vec{x}|\theta) f(\theta)}{\int f(\vec{x}|\theta) f(\theta) d\theta} \quad (4.13)$$

Естественно искать такую оценку $\hat{\theta}(\bar{X})$ параметра θ чтобы апостериорная дисперсия

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \int [\theta - \hat{\theta}(\bar{X})]^2 f(\theta|\bar{X}) d\theta$$

была наименьшей. Приравняв нулю производную дисперсии по $\hat{\theta}$ получим выражение для оценки, удовлетворяющей этому условию

$$\hat{\theta}(\bar{X}) = \int \theta f(\theta|\bar{X}) d\theta = \langle \theta | \bar{X} \rangle \quad (4.14)$$

- это апостериорное среднее значение параметра θ при вычислении которого нужно воспользоваться (4.13).

Недостаток метода в том, что он часто требует сложных вычислений.

4.8.3. Метод максимальной апостериорной вероятности

В результате проведенного эксперимента получена выборка значений $\bar{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Какое значение неизвестного параметра θ с наибольшей вероятностью соответствует этой выборке? Этот вопрос определяет формулировку еще одного критерия качества оценки $\hat{\theta}(\bar{X})$ - критерия максимальной апостериорной вероятности.

Закон распределения случайной величины X в котором нужно определить параметр θ , нам известен, то есть известна функция правдоподобия выборки $f(\bar{X}|\theta)$. Если также известна априорная плотность вероятности $f(\theta)$ то по формуле (4.13) находится апостериорная плотность вероятности $f(\theta|\bar{X})$. Возможно также, что вид ее известен заранее или может быть определен из других соображений.

Выберем в качестве оценки случайного параметра то значение $\hat{\theta}$ для которого при заданной выборке \bar{X} апостериорная плотность вероятности $f(\theta|\bar{X})$ максимальна. Это значение является решением уравнения

$$\left. \frac{\partial f(\theta|\bar{X})}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}(\bar{X})} = 0 \quad (4.15)$$

и зависит от данных выборки \bar{X} . Часто уравнение (4.15) записывают в иной форме

$$\left. \frac{\partial \ln f(\theta|\bar{X})}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}(\bar{X})} = 0.$$

пользуясь тем, что логарифм - однозначная и монотонно возрастающая функция аргумента.

Если исходный закон распределения содержит k неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ то их оценки $\hat{\theta}_1(\vec{x}), \hat{\theta}_2(\vec{x}), \dots, \hat{\theta}_k(\vec{x})$ определит решение системы уравнений

$$\frac{\partial \ln f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k | \vec{x})}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.16)$$

4.8.4. Метод максимального правдоподобия

Критерий максимального правдоподобия требует, чтобы оценка параметра $\hat{\theta}(\vec{x})$ была тем его значением, для которого имеющаяся выборка $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является наиболее вероятной, то есть наиболее правдоподобной. Основным уравнением метода максимального правдоподобия является равенство нулю первой производной функции правдоподобия

$$\left. \frac{\partial f(\vec{x} | \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}(\vec{x})} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial \ln f(\vec{x} | \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}(\vec{x})} = 0 \quad (4.17)$$

Решение этого уравнения при одном неизвестном параметре θ определяет оценку $\hat{\theta}(\vec{x})$ как значение, при котором функция правдоподобия выборки достигает своего абсолютного максимума. Если неизвестных параметров k то вместо (4.17) необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial \ln f(\vec{x} | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.18)$$

и за оценки $\hat{\theta}_1(\vec{x}), \hat{\theta}_2(\vec{x}), \dots, \hat{\theta}_k(\vec{x})$ принять координаты абсолютного максимума.

Уравнения (4.17) и (4.18) называются уравнениями правдоподобия.

Сопоставим уравнение правдоподобия (4.17) и уравнение (4.15) максимальной апостериорной вероятности. Часто на практике априорная плотность вероятности остается неизвестной и ее полагают слабо изменяющейся на интервале возможных значений параметра θ . Естественно, пренебрегая при этом значением производной $\frac{d f(\theta)}{d \theta}$ в окрестности искомой точки $\theta = \hat{\theta}(\vec{x})$ приходят к тому, что уравнения

$$\frac{\partial f(\theta|\bar{X})}{\partial \theta} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(\bar{X}|\theta)}{\partial \theta} = 0$$

практически совпадают, то есть оценка параметра по методу максимума апостериорной вероятности оказывается близкой к оценке по методу максимального правдоподобия.

Метод максимального правдоподобия широко используется в практических задачах. Он имеет ряд достоинств: его оценки при довольно общих условиях являются состоятельными, асимптотически нормальными и асимптотически эффективными. По сравнению с другими асимптотически нормальными оценками они имеют наименьшую дисперсию. Этот метод наиболее полно использует данные выборки об оцениваемых параметрах, поэтому он особенно полезен в случае малых выборок. Вместе с тем, при конечном объеме выборки оценки могут оказаться смещенными. Недостаток метода в том, что он часто требует сложных вычислений.

4.9. Точность и надежность оценок

Оценки параметров $\hat{\theta}(\bar{X})$ закона распределения, рассмотренные в предыдущем разделе, называются точечными. Их значения в определенной мере случайны, так как они вычислены по конкретной выборке $\bar{X}(X_1, \dots, X_n)$, и потому имеют случайные отклонения от истинного значения θ . Во многих экспериментальных исследованиях важно не только дать оценку неизвестному параметру распределения, но и указать точность этой оценки, охарактеризовав ее рассеяние. Важнейшими характеристиками качества оценок являются их дисперсии, с ними связано понятие эффективности оценок, которое было введено и уже обсуждалось в предыдущих разделах. Здесь мы рассмотрим несколько глубже это понятие. Точность оценки принято также определять величиной доверительного интервала, указывающего область, в которой предположительно должно находиться истинное значение параметра, при этом соответствующая этой точности надежность оценки характеризуется доверительной вероятностью.

4.9.1. Потенциальная точность и эффективность оценки

Среди несмещенных оценок $\hat{\theta}(\bar{X})$ неизвестного параметра распределе-

ния θ желательнее выбрать ту, которая имеет наименьшую дисперсию, то есть эффективную. Возникает вопрос, какова минимальная дисперсия, ограничивающая точность оценки неизвестного параметра по любой выборке объема n ?

Определим дисперсию оценки по какой-либо выборке объема n полученной при фиксированном значении параметра θ следующим выражением

$$\sigma_{\theta}^2 = \langle [\hat{\theta}(\vec{x}) - \theta]^2 \rangle = \int [\hat{\theta}(\vec{x}) - \theta]^2 f(\vec{x}|\theta) (d\vec{x}) \quad (4.19)$$

учитывая, что $\hat{\theta}(\vec{x})$ - несмещенная оценка θ , то есть ее среднее значение равно

$$\langle \hat{\theta}(\vec{x}) \rangle = \int \hat{\theta}(\vec{x}) f(\vec{x}|\theta) (d\vec{x}) = \theta \quad (4.20)$$

Выполним дифференцирование выражений, входящих в (4.20), по параметру θ в результате получим

$$\int \hat{\theta}(\vec{x}) \frac{\partial f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta} (d\vec{x}) = 1$$

Это равенство можно записать в несколько иной форме

$$\int [\hat{\theta}(\vec{x}) - \theta] \frac{\partial f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta} (d\vec{x}) = 1$$

пользуясь тем, что

$$\int \theta \frac{\partial f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta} (d\vec{x}) = \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \int f(\vec{x}|\theta) (d\vec{x}) = 0,$$

или же в следующем формально преобразованном виде

$$\int [\hat{\theta}(\vec{x}) - \theta] \frac{\partial \ln f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta} f(\vec{x}|\theta) (d\vec{x}) = 1$$

Отсюда по неравенству Коши-Буняковского

$$\int [\hat{\theta}(\vec{x}) - \theta]^2 f(\vec{x}|\theta) (d\vec{x}) \int \left[\frac{\partial \ln f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta} \right]^2 f(\vec{x}|\theta) (d\vec{x}) \geq 1$$

или, учитывая (4.19), приходим к неравенству Крамера-Рао

$$\sigma_{\theta}^2 \geq \frac{1}{\langle \left[\frac{\partial \ln f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta} \right]^2 \rangle} = \sigma_{\theta \partial \varphi \varphi}^2 \quad (4.21)$$

определяющему нижнюю границу дисперсии несмещенной оценки, или дисперсию эффективной оценки $\sigma_{\hat{\theta}}^2$, через среднее значение квадрата производной по параметру θ от логарифма функции правдоподобия. В теории информации величина

$$I(\theta) = \left\langle \left[\frac{\partial \ln f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta} \right]^2 \middle| \theta \right\rangle$$

называется количеством информации / по Р.А.Фишеру / о параметре θ содержащемся в одном наблюдении. Заметим, что

$$I(\theta) = \int \left[\frac{\partial \ln f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta} \right]^2 f(\vec{x}|\theta) d\vec{x} = \int \frac{\partial f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \ln f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta} d\vec{x}.$$

Выполнив интегрирование по частям, получим

$$I(\theta) = - \int f(\vec{x}|\theta) \frac{\partial^2 \ln f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta^2} d\vec{x} = - \left\langle \frac{\partial^2 \ln f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta^2} \middle| \theta \right\rangle$$

Это позволяет записать неравенство Крамера-Рао в иной форме

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2 \geq - \frac{1}{\left\langle \frac{\partial^2 \ln f(\vec{x}|\theta)}{\partial \theta^2} \middle| \theta \right\rangle} = \sigma_{\hat{\theta}}^2 \text{эфф}} \quad (4.22)$$

Если среднеквадратическое отклонение $\sigma_{\hat{\theta}}$ оценки принять за меру точности, то $\sigma_{\hat{\theta}}^2 \text{эфф}}$ определяет потенциальную точность несмещенной оценки, построенной по выборке объема n

Назовем эффективностью оценки $\hat{\theta}(\vec{x})$ отношение дисперсии эффективной оценки к дисперсии оценки, построенной в конкретной задаче $\sigma_{\hat{\theta}}^2$:

$$eff(\hat{\theta}) = \sigma_{\hat{\theta}}^2 \text{эфф}} / \sigma_{\hat{\theta}}^2, \quad 0 \leq eff(\hat{\theta}) \leq 1$$

Эффективность оценки равна единице, когда оценка эффективна. Две эффективные оценки одного и того же параметра совпадают почти наверное при каждом θ

Многомерный аналог неравенства Крамера-Рао, когда распределение имеет несколько неизвестных параметров, определяет нижнюю границу корреляционной матрицы ошибок несмещенных оценок через так называемую информационную матрицу Фишера [3, 6], элементы которой равны средним значениям частных производных второго порядка по оцениваемым параметрам от логарифма функции правдоподобия. Изложение этого вопроса можно найти в [6]

4.9.2. Доверительный интервал и доверительная вероятность

В эксперименте получена выборка измеренных значений $\vec{x} (x_1, x_2, \dots, x_n)$ для случайной величины, распределение которой по виду известно, но содержит неизвестный параметр θ . По выборке построена точечная оценка $\hat{\theta}(\vec{x})$. Необходимо знать вероятность ρ того, что при данном объеме выборки n отклонение оценки $\hat{\theta}(\vec{x})$ от истинного значения θ не превышает границ

$$-\varepsilon_1 < \theta - \hat{\theta}(\vec{x}) < \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$$

Эту задачу сформулируем в иной постановке. Назначим некоторую близкую к единице вероятность ρ такую, что событие с вероятностью ρ можно считать практически достоверным / например, $\rho = 0,9; 0,95; 0,99$ / и найдем интервал

$$(\hat{\theta}(\vec{x}) - \varepsilon, \hat{\theta}(\vec{x}) + \varepsilon_2)$$

в котором с вероятностью ρ будет заключено истинное значение параметра θ . Такой интервал называется доверительным интервалом, а соответствующая ему вероятность ρ - доверительной вероятностью. Разность $\alpha = 1 - \rho$ называют уровнем значимости. Эта величина определяет вероятность того, что отклонение оценки от истинного значения окажется чрезмерно большим и доверительный интервал не "накроет" истинного значения. Если доверительную вероятность выскрют близкой к единице, то уровень значимости имеет малое значение. Часто α означает ту вероятность, которой практически при проведении единичных экспериментов можно пренебречь. Доверительная вероятность назначается с учетом тех требований, которые могут предъявить к надежности оценки возможные приложения. Ее выбор не связан с условиями или какими-либо конкретными данными эксперимента.

Доверительный интервал можно найти только в том случае, если известно распределение оценки $\hat{\theta}(\vec{x})$ или же какой-либо другой статистики, которая связана с $\hat{\theta}(\vec{x})$ функционально и зависит от нее непрерывно и монотонно.

Если известен закон распределения оценки $\hat{\theta}(\vec{x})$, то расчет границ доверительного интервала относительно прост. Покажем это на следующем примере.

4.9.3. Оценка среднего значения нормальной величины с известной дисперсией

Пусть произведено n независимых измерений и получена выборка $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Известно, что случайная величина x распределена нормально с дисперсией σ_x^2 . По полученной выборке необходимо оценить среднее значение $\langle x \rangle$.

За оценку $\langle x \rangle$ примем выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

распределение которого является нормальным со средним значением $\langle \bar{x} \rangle = \langle x \rangle$ и дисперсией

$$\langle (\bar{x} - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{n^2} \langle \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

Здесь учтено, что x_1, x_2, \dots, x_n статистически независимы. Построим выборочную статистику — нормированную ошибку оценки

$$u = \frac{\bar{x} - \langle x \rangle}{\sigma_x} \sqrt{n} \quad (4.23)$$

имеющую стандартное нормальное распределение с параметрами $\langle u \rangle = 0$ и $\sigma_u^2 = 1$, и определим такие значения u — квантили $u_{\frac{\alpha}{2}}$ и $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ для которых

$$P(u_{\frac{\alpha}{2}} < u < u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \rho = 1 - \alpha$$

Поскольку нормальное распределение симметрично относительно $u = 0$ то

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Поскольку статистика u связана с \bar{x} по формуле (4.23), то из неравенства

$$u_{\frac{\alpha}{2}} < u < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

следует неравенство, определяющее доверительный интервал

$$\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} < \langle x \rangle < \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (4.24)$$

Квантиль $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ стандартного нормального распределения, определяемый уравнением

$$\int_{-\infty}^{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\rho}{2}$$

находим по таблицам для интеграла вероятности / см. Приложение /.

4.9.4. Оценка среднего значения нормальной величины при неизвестной дисперсии

Часто распределение оценки определено не полностью, часть параметров остаются в нем неизвестными / например, в предыдущем примере может оказаться неизвестной дисперсия σ_x^2 /. При большом объеме выборки значения неизвестных параметров можно приближенно заменить их оценками - выборочными статистиками и таким образом грубо определить границы доверительного интервала. Однако этот прием непригоден для малых выборок. Иногда удается построить статистику, функционально связанную с оценкой $\hat{\theta}(\bar{x})$ но имеющую известное распределение. В этом случае расчет границ доверительного интервала оценки предполагает вначале расчет границ соответствующего интервала для вспомогательной статистики, а затем с учетом функциональной зависимости статистики и оценки - преобразование его в искомый интервал. Этот прием хорошо разработан для нормальных случайных величин. Рассмотрим его вновь на примере оценки среднего значения.

Пусть для нормальной случайной величины x необходимо оценить среднее значение $\langle x \rangle$ по выборке независимых значений $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Дисперсия σ_x^2 также неизвестна.

Определим выборочное среднее и выборочную дисперсию

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Примем \bar{x} за оценку $\langle x \rangle$. Распределение \bar{x} нормальное, $\langle \bar{x} \rangle = \langle x \rangle$, но дисперсия его не может быть определена, так как σ_x^2 неизвестна. Для заданной доверительной вероятности ρ нужно указать такое $\varepsilon > 0$ чтобы $P(|\bar{x} - \langle x \rangle| < \varepsilon) = \rho$.

Построим статистику - нормированную ошибку оценки

$$t = \frac{\bar{x} - \langle x \rangle}{S} \sqrt{n} \quad (4.25)$$

отличающуюся от (4.23) тем, что для нормировки использована выборочная статистика S поскольку σ_x неизвестно. Статистика t является отношением нормальной случайной величины $\frac{\bar{x} - \langle x \rangle}{\sigma_x^2} \sqrt{n}$ с нулевым средним и единичной дисперсией и случайной величины S/σ_x

распределенной как $\sqrt{\chi^2/(n-1)}$ причем χ^2 имеет $(n-1)$ степень свободы / см. раздел 8.10 /. Такое отношение распределено по закону Стъдента с $(n-1)$ степенью свободы / см. раздел 8.11 /. то есть его плотность вероятности имеет вид

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, t \in (-\infty, \infty)$$

где $\Gamma(z)$ - гамма-функция. Для статистики t интервал, соответствующий искомому доверительному интервалу, определяется условием

$$P(|t| < \frac{\epsilon}{S} \sqrt{n}) = \rho.$$

Обозначим $t_p = \frac{\epsilon}{S} \sqrt{n}$ и определим его из условия

$$\int_{-t_p}^{t_p} f(t) dt = 2 \int_0^{t_p} f(t) dt = \rho.$$

Число t_p называется коэффициентом Стъдента, для него составлены таблицы в зависимости от доверительной вероятности ρ и числа степеней свободы.

Таким образом, с вероятностью ρ среднее значение $\langle x \rangle$ будет заключено в доверительном интервале

$$\bar{x} - t_p \frac{S}{\sqrt{n}} < \langle x \rangle < \bar{x} + t_p \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (4.26)$$

определяемом выборочным средним \bar{x} , выборочной дисперсией S^2 и коэффициентом Стъдента t_p

Если закон распределения x отличен от нормального, но объем выборки n достаточно велик, то распределение \bar{x} согласно центральной предельной теореме может быть близким к нормальному, а S - к распределению Пирсона, и тогда описанный способ можно также применить к оценке доверительного интервала для $\langle x \rangle$

4.9.5. Оценка дисперсии нормальной случайной величины

В качестве несмещенной оценки дисперсии нормальной случайной величины x по выборке $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выберем

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Для заданной доверительной вероятности ρ нужно рассчитать границы доверительного интервала.

Известно, что сумма квадратов n независимых случайных величин, каждая из которых имеет нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией, распределена по "закону χ^2 с n степенями свободы.

Если σ^2 - дисперсия случайной величины x то дисперсия каждой разности $(x_i - \bar{x})$ входящей в выборочную статистику S равна $\frac{n-1}{n} \sigma^2$ / см. 4.4 / . Следовательно, если ввести нормировку

каждой разности на σ/\sqrt{n} , то величина

$$u = S^2 n / \sigma^2 \quad (4.27)$$

будет иметь "распределение χ^2 с n степенями свободы. Плотность распределения такой величины / см. 8.10 /

$$f(u) = \frac{1}{2 \Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} \quad u \in (0, \infty)$$

С вероятностью ρ значение $u = \chi^2$ будет принадлежать интервалу (χ_1^2, χ_2^2) если его граничные значения выбрать из условия

$$\int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2} f(u) du = \rho.$$

"Закон χ^2 " несимметричен относительно среднего значения. Поэтому, чтобы не было неоднозначности в выборе чисел χ_1^2 и χ_2^2 условимся выбирать интервал между ними так, чтобы вероятности выхода величины u за пределы интервала вправо и влево / заштрихованные площадки на рис. 4.2 / были бы одинаковы и равны половине уровня значимости, то есть

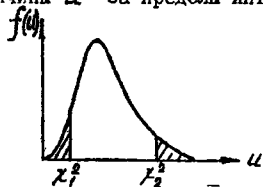


Рис. 4.2

$$\int_0^{\chi_1^2} f(u) du = \frac{1-\rho}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\int_{\chi_1^2}^{\infty} f(u) du = \frac{1-p}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Значения χ_1^2 и χ_2^2 равны квантилям $u_{\alpha/2} = \chi_1^2$, $u_{1-\alpha/2} = \chi_2^2$ "распределения χ^2 " и могут быть найдены по таблицам / см. Приложение /. Тогда с учетом (4.27) доверительный интервал для дисперсии σ^2 при ее оценке по выборке объема n определится следующим неравенством

$$\frac{nS^2}{\chi_1^2} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi_2^2} \quad (4.28)$$

4.10. Задачи

1. По выборке $\bar{x} (x_1, x_2, \dots, x_n)$ методом моментов оценить параметры гамма-распределения.

Решение.

Гамма-распределение имеет плотность вероятности / см. 8.6 /

$$f(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x \in (0, \infty),$$

зависящую от двух параметров $\alpha > -1$, $\beta > 0$. Математическое ожидание и дисперсия гамма-распределения равны

$$\langle x \rangle = (\alpha + 1)\beta; \quad \sigma^2 = (\alpha + 1)\beta^2$$

По имеющейся выборке \bar{x} найдем выборочное среднее и выборочную дисперсию

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Приравняв моменты распределения $\langle x \rangle$ и σ^2 к двум найденным статистикам, получим систему двух уравнений

$$(\alpha + 1)\beta = \bar{x}; \quad (\alpha + 1)\beta^2 = \sigma^2$$

из которой находим оценки для параметров α и β

$$\hat{\alpha}(\bar{x}) = \left(\frac{\bar{x}}{S}\right)^2 - 1; \quad \hat{\beta}(\bar{x}) = \frac{S^2}{\bar{x}}$$

2. По выборке независимых значений $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ методом максимального правдоподобия найти оценку дисперсии нормально распределенной случайной величины x если среднее значение $\langle x \rangle = 0$

Решение.

Обозначим неизвестную дисперсию σ^2 . Поскольку значения x_1, x_2, \dots, x_n статистически независимы, то функция правдоподобия выборки равна

$$f(\vec{x}|\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Запишем уравнение правдоподобия

$$\begin{aligned} \frac{d \ln f(\vec{x}|\sigma^2)}{d(\sigma^2)} &= \frac{d}{d(\sigma^2)} \left\{ \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\} = \\ &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \end{aligned}$$

Его решение определяет оценку $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2(\vec{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{n-1}{n} S^2,$$

обеспечивающую максимум функции правдоподобия для данной выборки.

3. Плотность вероятности случайной величины x , имеет вид

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

$0 < x < 1$; / бета-распределение /,

Вычислить по методу моментов оценки \hat{a} и \hat{b} параметров распределения a и b

Ответ:

$$\hat{a} = \frac{\bar{x} \cdot \hat{b}}{1 - \bar{x}}; \quad \hat{b} = \frac{1 - \bar{x}}{S^2} [\bar{x} \cdot (1 - \bar{x}) - S^2]$$

4. Определить методом максимального правдоподобия оценку параметра ρ биномиального распределения

$$P_n(k) = C_n^k \rho^k (1-\rho)^{n-k},$$

если в n_1 независимых испытаниях событие А появилось m_1 раз и в n_2 независимых испытаниях - m_2 раз.

Ответ: $\hat{\rho} = (m_1 + m_2) / (n_1 + n_2)$

5. Выборка объемом n извлечена из совокупности с показательным распределением

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$$

Найти оценку $\hat{\lambda}$ максимального правдоподобия для параметра λ

Ответ: $\hat{\lambda} = 1 / \langle x \rangle$

6. Средняя квадратическая ошибка радиовысотомера $\sigma = 15$ м. Сколько потребуется таких высотомеров, чтобы с надежностью 0,99 ошибка средней высоты $\langle x \rangle$ была не больше 30 м., если ошибки радиовысотомеров имеют нормальное распределение, а систематические ошибки отсутствуют?

Ответ: Не менее двух.

7. Случайный радиосигнал распределен по нормальному закону, причем его среднее значение неизвестно, а дисперсия $\sigma^2 = 1$ в². Произведено 100 измерений радиосигнала, по которым определено значение выборочного среднего $\bar{x} = 1,5$ в.

Определить величину доверительной вероятности ρ с которой может быть гарантирована погрешность измерения среднего значения сигнала $\delta = 0,2$

Ответ: $\rho = 0,954$.

8. Произведено 12 измерений напряжения радиосигнала одним и тем же прибором, не имеющим систематической ошибки, причем выборочное среднее квадратическое отклонение S случайных ошибок оказалось равным 0,6 в. Найти точность прибора с надежностью 0,99.

Ответ: 0,33 в. $\langle \sigma \rangle < 1,24$ в.

4.11. Оценка параметров m -распределения

Раздел содержит описание лабораторной работы, выполняемой на ЭВМ. Она включает моделирование выборки $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ значений случайной величины, имеющей m -распределение, оценку параметров распределения по полученной выборке и расчет доверительных интервалов при заданном уровне значимости, исследование зависимости точности оценок от объема выборки. Базовые программы даны на языке Бейсик.

4.11.1. Распределение Накагами

При распространении радиоволн в тропосферном канале рассеяние на турбулентных неоднородностях атмосферы формирует приходящий к приемнику сигнал как сумму большого числа примерно равнозначных и независимых слагаемых и придает ему, согласно центральной предельной теореме, нормальные свойства. В то же время характерная для неоднородной тропосферы многолучевость распространения волн создает условия, которые можно рассматривать как прохождение сигнала по нескольким независимым нормальным каналам связи [4]. Считая каналы равнозначными и принимая их число равным m , для средней интенсивности регистрируемого сигнала можно записать

$$\bar{I} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [C_j^2 + S_j^2] = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I_j \quad (4.29)$$

где C_j и S_j — независимые нормально распределенные значения квадратурных компонент сигнала в j -ом канале с нулевыми средними значениями и примерно равными дисперсиями $\langle C_j^2 \rangle = \langle S_j^2 \rangle = \sigma^2, j=1, 2, \dots, m$. Их совместная плотность вероятности

$$f(C_j, S_j) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(C_j^2 + S_j^2)}$$

при преобразовании / см. 3.5 /

$$\begin{cases} C_j = \sqrt{I_j} \cos \varphi_j \\ S_j = \sqrt{I_j} \sin \varphi_j \end{cases} \quad \varphi_j \in (0, 2\pi)$$

определяет равномерное распределение фазы φ_j на интервале $[0, 2\pi]$ и экспоненциальное распределение интенсивности j -ого сигнала

$$f(I_j) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{I_j}{2\sigma^2}} \quad I_j \in (0, \infty).$$

Учитывая независимость всех m каналов, получим

$$f(I_1, I_2, \dots, I_m) = \prod_{j=1}^m \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{I_j}{2\sigma^2}} \quad (4.30)$$

Обозначим частные суммы интенсивностей

$$\Sigma_k = \sum_{j=1}^k I_j, \quad k=1, 2, \dots, m-1; \quad \Sigma_m = m\bar{I}$$

и, определив области их значений

$$\Sigma_m \in (0, \infty); \quad \Sigma_k \in (0, \Sigma_{k+1}),$$

преобразуем (4.30) в плотность вероятности

$$f(\Sigma_m, \Sigma_{m-1}, \dots, \Sigma_1) = \frac{1}{(2\sigma^2)^m} e^{-\frac{\Sigma_m}{2\sigma^2}}$$

после чего выполним интегрирование по всем $\Sigma_k, k=1, 2, \dots, m-1$, определяя тем самым одномерную плотность вероятности $\Sigma_m = m\bar{I}$

$$f(\Sigma_m) = \int_0^{\Sigma_m} d\Sigma_{m-1} \int_0^{\Sigma_{m-1}} d\Sigma_{m-2} \dots \int_0^{\Sigma_2} d\Sigma_1 \frac{1}{(2\sigma^2)^m} e^{-\frac{\Sigma_m}{2\sigma^2}}$$

В результате получим

$$f(\Sigma_m) = \frac{1}{(2\sigma^2)^m} \frac{(\Sigma_m)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\frac{\Sigma_m}{2\sigma^2}},$$

то есть Σ_m подчиняется распределению χ^2 с числом степеней свободы $2m$ / см. §.10 / . Определим действующую амплитуду сигнала

$$y = \sqrt{\bar{I}/2} = \sqrt{\Sigma_m/2m}$$

Выполнив соответствующее преобразование $f(\Sigma_m) d\Sigma_m$ получим плотность ее распределения

$$f(y) = \frac{2}{(m-1)!} \left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m y^{2m-1} e^{-\frac{my^2}{\sigma^2}} \quad y \in (0, \infty) \quad (4.31)$$

Этот закон представляет собой известное распределение Накагами / m -распределение / / см. 8.7 /. При $m=1$ оно переходит в распределение Рэлея (3.16).

4.11.2. Оценка параметров методом максимального правдоподобия

Параметрами полученного распределения (4.31) являются число m характеризующее многолучевость распространения волн / число независимых каналов связи /, и дисперсия σ^2 флуктуаций сигнала в каждом канале. Нетрудно подсчитать, учитывая 4.29 что

$$\langle y^2 \rangle = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^m (\langle C_j^2 \rangle + \langle S_j^2 \rangle) = \sigma^2,$$

то есть второй начальный момент выступает непосредственно как параметр распределения.

Располагая выборкой экспериментальных данных $\vec{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ примем в качестве оценки $\hat{\sigma}^2$ выборочный момент второго порядка

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 = \bar{y}^2 \quad (4.32)$$

Заметим, что эта оценка, соответствующая методу моментов, получается также методом максимального правдоподобия. Действительно, полагая, что все значения выборки независимы, функцию правдоподобия всей выборки представим как произведение функций (4.31)

$$f(\vec{y} | m) = \prod_{i=1}^n f(y_i) \quad (4.33)$$

и, вычислив производную ее логарифма по параметру σ^2 запишем уравнение правдоподобия

$$\frac{d}{d\sigma^2} \left[n \ln \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right] = 0$$

решение которого приводит к оценке (4.32).

Оценку параметра m также получим методом максимального правдоподобия. Вычисляя производную логарифма функции правдоподобия (4.33) по параметру m запишем уравнение

$$\frac{d}{d m} \left\{ m \ln m - m \ln \sigma^2 - \ln \Gamma(m) + (2m-1) \ln \bar{y} - \frac{m}{\sigma^2} \bar{y}^2 \right\} = 0;$$

При выводе этого уравнения сделана замена $(m-1)! = \Gamma(m)$ и обозначена выборочная статистика

$$\overline{\ln y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln y_i$$

Учтем, что для параметра σ^2 получена не зависящая от m оценка (4.32). Логарифмическая производная гамма-функции

$$\psi(m) = \frac{d}{dm} \ln \Gamma(m)$$

описана как специальная функция и табулирована [17]. После несложных преобразований приведем уравнение правдоподобия к виду

$$\ln m - \psi(m) = \ln \sigma^2 - \ln y^2 - \frac{1}{2} ; \quad \hat{\lambda}_i = \ln \frac{y_i^2}{\sigma^2} \quad (4.34)$$

Определив по полученной выборке \bar{y} статистики y^2 и $\ln y^2$, несложно, например, графически решить уравнение (4.34) и найти оценку $\hat{m}(\bar{y})$. График функции $\phi(m) = \ln m - \psi(m)$ представлен на рис. 4.3

Таким образом, формулы (4.32) и (4.34) определяют точечные оценки параметров m и σ^2 распределения Накагами.

Расчет доверительных интервалов проведем в предположении, что распределение статистик y^2 и $\frac{1}{2}$ при большом объеме выборки близко к нормальному, и воспользуемся неравенствами (4.26). Пусть задана доверительная вероятность ρ . Соответствующий ей доверительный интервал для параметра σ^2 будет

$$\bar{y}^2 - t_\rho \frac{S_y}{\sqrt{n}} < \sigma^2 < \bar{y}^2 + t_\rho \frac{S_y}{\sqrt{n}} \quad (4.35)$$

где t_ρ - коэффициент Стьюдента, а S_y - выборочная статистика

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i^2 - \bar{y}^2)^2 \quad (4.36)$$

При определении доверительных границ параметра m воспользуемся тем, что функция $\phi(m) = \ln m - \psi(m)$ непрерывная и монотонно убывающая с ростом m . Обозначим статистики

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{y_i^2}{\bar{y}^2} ; \quad S_{\lambda}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \bar{\lambda})^2, \quad (4.37)$$

тогда доверительный интервал для $\phi(m)$ будет

$$\phi_1 < \phi(m) < \phi_2, \quad \text{где } \phi_1 = \bar{\lambda} - t_\rho \frac{S_{\lambda}}{\sqrt{n}}, \quad \phi_2 = \bar{\lambda} + t_\rho \frac{S_{\lambda}}{\sqrt{n}} \quad (4.38)$$

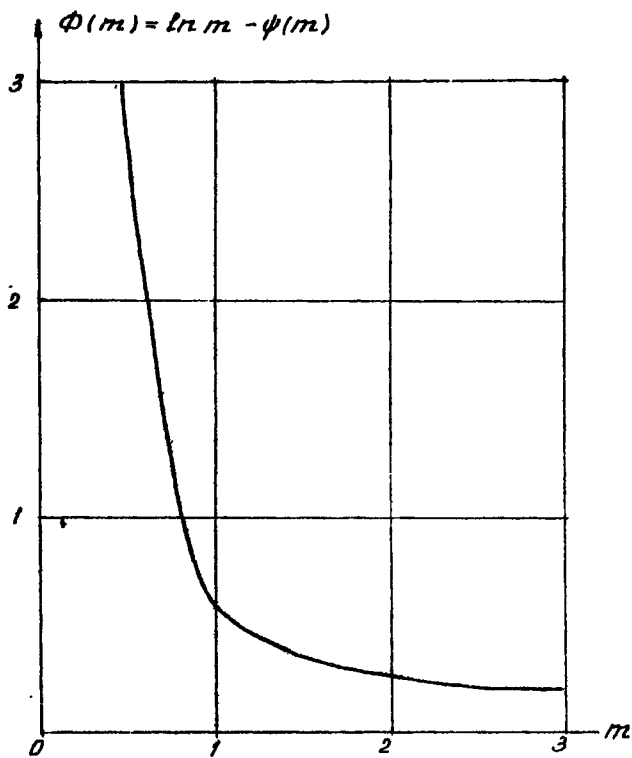


рис. 4.3

По графику рис. 4.3 определим значения m_1 и m_2 такие, что

$\Phi(m_1) = \Phi_1$, $\Phi(m_2) = \Phi_2$ и примем их за границы доверительного интервала

$$m_1 < m < m_2.$$

4.11.3. Знание к работе

1. Смоделировать выборку $\vec{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ независимых значений y_i случайной величины, имеющей распределение Накагами с заданными параметрами m и σ^2

Для этого, используя функцию $RND(x)$ в качестве датчика равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$ чисел, получить $2n$ выборок независимых значений

$$R_{ij}; i = 1, 2, \dots, 2n; j = 1, 2, \dots, m$$

объемом m каждая.

Преобразовать R_{ij} в независимые значения квадратурных компонент

$$C_{ij} = \sigma \sqrt{-2 \ln R_{(2i-1),j}} \cdot \cos(2\pi R_{2i,j})$$

$$S_{ij} = \sigma \sqrt{-2 \ln R_{(2i-1),j}} \cdot \sin(2\pi R_{2i,j});$$

$$i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$$

нормально распределенные с нулевыми средними значениями и одинаковыми дисперсиями, равными σ^2

Расчитать значения моделируемой выборки

$$y_i = \sqrt{\frac{1}{2m} \sum_{j=1}^m (C_{ij}^2 + S_{ij}^2)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2. Рассчитать выборочные статистики \bar{y}^2 и $\ln \bar{y}^2$. Определить точечную оценку $\hat{\sigma}^2(y) = \bar{y}^2$ Определить точечную оценку значения функции

$$\Phi(m) = \ln m - \psi(m) = \ln \bar{y}^2 - \ln y^2$$

По графику рис. 4.4 найти оценку параметра m как значение обратной функции

$$\hat{m}(\bar{y}) = \Phi^{-1}(\ln \bar{y}^2 - \ln y^2)$$

3. Построить гистограмму распределения выборочных значений $y_i, i=1, 2, \dots, n$. Рассчитать график теоретического распределения Накагами для значений m и σ^2 равных полученным по выборке \vec{y} оценкам $\hat{\sigma}^2(\vec{y})$ и $\hat{m}(\vec{y})$. Нанести график на гистограмму выборки. Оценить по критерию χ^2 соответствие экспериментального и теоретического распределений.

4. Задать доверительную вероятность ρ . Рассчитать значения выборочных статистик $S_{\vec{y}}^2$ (4.36) и $S_{\vec{y}}^2$ (4.37) и определить доверительные интервалы для параметров σ^2 (4.35) и m (4.38).

5. При фиксированном объеме выборки n рассчитать точечные оценки и доверительные интервалы, моделируя выборки для $m = 1 \div 3$ $\sigma \in (1, 2)$. При фиксированных значениях m и σ^2 рассчитать их точечные оценки и доверительные интервалы при неизменном уровне значимости $\alpha = 1 - \rho$ по выборкам разного объема $n \in (10, 100)$. Построить зависимость точечных оценок и доверительных интервалов от объема выборки. Интерпретировать полученные результаты.

4.11.4. Форма отчета

Отчет по работе должен содержать:

- задание к работе;
- программы для заданного варианта;
- результаты расчета точечных оценок и доверительных интервалов;
- гистограмму экспериментального распределения и график теоретического распределения; расчетное значение χ^2 и оценку соответствия экспериментального и теоретического распределений;
- график изменения точечных оценок и границ доверительных интервалов при увеличении объема выборки.

4.11.5. Основные базовые программы

Подпрограмма 1000-1100 моделирует N счетов распределения Накагами. Имитированные значения заносятся в массив $Y(N)$

```
1000 REM НАКАГАМИ
1010 FOR I=1 TO N \ S1=0
1020 FOR J=1 TO M
1030 A=RND(0) \ B=RND(0)*2*PI
1040 R=SQR(-2*S2*LOG(A))
1050 S=R*SIN(B) \ C=R*COS(B)
1060 R=S*S+C*C \ S1=S1+R
1070 NEXT J
1080 R=S1/(2*M) \ Y(I)=SQR(R)
1090 NEXT I
1099 RETURN
```

Подпрограмма (1700-1745) оценивает параметры m / M / и σ^2 / $S1$ / распределения Накагами по выборке $Y(N)$ объемом N .

```
1700 REM ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
1710 S1=0 \ L=0
1715 FOR T=1 TO N \ T=Y(I)
1720 S1=S1+T*T
1725 R=LOG(T) \ L=L+2*R
1730 NEXT I
1735 S1=S1/N \ R=L/N \ F1=LOG(S1)-R
1740 PRINT "Ф(M)=F1=" F1, "ДИСПЕРСИЯ S1=" S1
1745 RETURN
```

Подпрограмма (1800-1875) вычисляет значения плотности вероятности $F(B)$ теоретического распределения накагами

```
1800 REM ТЕОРЕТИЧ. РАСПРЕД. НАКАГАМИ
1810 B=Y0
1815 REM ГАММА - ФУНКЦИЯ
```

```

1820 G2 = 1
1825 IF M=1 THEN 1840
1830 M1 = M - 1
1835 FOR I=1 TO M1 \ G2 = G2 * I \ NEXT I
1840 REM НАКАГАМИ
1845 FOR J=1 TO K
1850 R1 = M * LOG(M/S2) + (2 * M - 1) * LOG(B) - M * B * B / S2
1855 F = 2 * EXP(R1) / G2
1860 PRINT "F("B")=" F
1865 B = B + H
1870 NEXT J
1875 RETURN

```

Подпрограмма (1900-1950) вычисляет статистику S_y^2 по формуле (4.36) / S_4 / и S_z^2 по формуле (4.37) / S_5 /, необходимые для оценки доверительных интервалов параметров распределения μ и σ^2

```

1900 REM СТАТИСТИКИ (4.36). (4.37)
1910 S4 = 0 \ S5 = 0
1915 FOR I=1 TO N \ T = Y(I)
1920 T1 = T * T - S1 \ S4 = S4 + T1 * T1
1925 T2 = T1 + LOG(T * T / S1) \ S5 = S5 + T2 * T2
1930 NEXT I
1935 S4 = S4 / (N - 1) \ S5 = S5 / (N - 1)
1940 PRINT "СТАТИСТИКИ (4.36)=S4=" S4, "(4.37)=S5=" S5
1950 RETURN

```

Главная программа

10 REM ГЛАВНАЯ ПРОГРАММА

```
15 DIM Y(150) G(30)
20 RANDOMIZE
25 K=10 \ PRINT "ОБЪЕМ ВЫБОРКИ N=" \ INPUT N
30 PRINT "ПАРАМЕТРЫ: M, ДИСП." \ INPUT M, S2
35 GOSUB 1000 \ REM МОДЕЛИРОВАНИЕ
40 GOSUB 1700 \ REM ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ
45 GOSUB 200 \ REM МАХМИН
50 GOSUB 400 \ REM ГИСТОГРАММА
55 GOSUB 1800 \ REM ТЕОРЕТИЧ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
60 GOSUB 1900 \ REM СТАТИСТИКИ (4.36), (4.37)
70 STOP
```

Подпрограммы (200-299) *МАХМИН* и (400-540) *ГИСТОГР.* приведены в разделе 4.6.3.

4.12. Метод максимального правдоподобия в задаче местоспределения объекта

Целью лабораторной работы является численное моделирование на ЭВМ работы радиопеленгационной системы местоопределения объекта и оценка его координат методом максимального правдоподобия по пеленгам, полученными несколькими пеленгаторами в условиях помех. Работа выполняется с применением диалого-вычислительного комплекса. Первая часть работы содержит краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения второй практической части. Приведенные базовые программы составлены на языке Бейсик.

4.12.1. Радиопеленгация. Триангуляционный метод определения координат объекта

Пеленгация - определение направления на объект, измерение его угловых координат. В зависимости от условий и свойств объекта пеленгация может осуществляться с применением различных средств и

методов: оптических, радиотехнических, акустических и других. Радиопеленгование широко применяется в морской, воздушной и космической навигации, в радиоастрономии, метеорологии [18, 19]

Выявление направленности приема, свойственное большинству типов антенн, было отмечено впервые А.С.Поповым. Изобретение рамочной антенны привело к созданию первых радиопеленгаторов. Они выполнялись в диапазоне средних волн: оператор, вращая рамку, определял пеленг по минимуму слышимости принимаемого сигнала. Современные радиопеленгаторы работают в диапазоне от самых низких до самых высоких частот, имеют эффективные антенные системы, обеспечивающие высокую точность и чувствительность радиопеленгования, автоматизированные системы регистрации и обработки данных.

Вместе с тем точность пеленгования зависит от целого ряда факторов, связанных как с конструктивными особенностями радиотехнических устройств, так и с условиями распространения электромагнитных волн на пути от передатчика к приемнику. Как правило, влияющие эти факторы и порождаемые ими ошибки исследуются статистическими методами.

Для определения всех координат объекта применяется несколько пеленгаторов, разнесенных в пространстве и соединенных каналами связи. В простейшем случае для решения этой задачи достаточно двух радиопеленгаторов. Пеленг каждого пеленгатора определяет линию положения источника, а пересечение двух линий положения — точку, в которой находится объект. Этот метод определения координат объекта называется триангуляционным (пеленгационным, угломерным).

Рассчитаем по двум пеленгам координаты (x, y) объекта на

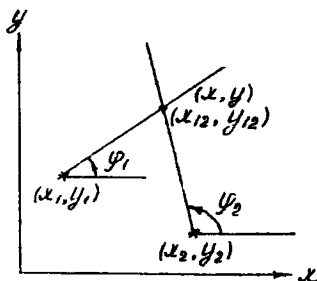


Рис. 4.4

плоскости. Пусть два пеленгатора, расположенные в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) рис. 4.4 запеленговали объект и получили пеленги φ_1 φ_2 относительно направления Ox . Две линии положения объекта описываются уравнениями

$$y - y_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot (x - x_1);$$

$$y - y_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot (x - x_2)$$

Совместное их решение дает координаты точки пересечения (x_{12}, y_{12})

$$x_{12} = \frac{(x_2 \operatorname{tg} \varphi_2 - x_1 \operatorname{tg} \varphi_1) - (y_2 - y_1)}{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1};$$

$$y_{12} = \frac{(y_2 \operatorname{ctg} \varphi_2 - y_1 \operatorname{ctg} \varphi_1) - (x_2 - x_1)}{\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1},$$

которая, если нет ошибок в определении пеленгов, совпадает с (x, y)

Для дальнейшего изложения удобно обозначить

$$\rho_i = y_i \cos \varphi_i - x_i \sin \varphi_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.39)$$

и записать формулы для x_{12} y_{12} в следующем виде

$$x_{12} = \frac{\rho_1 \cos \varphi_2 - \rho_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}; \quad y_{12} = \frac{\rho_1 \sin \varphi_2 - \rho_2 \sin \varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (4.40)$$

Поскольку точность пеленгования ограничена, значения пеленгов определяются со случайными отклонениями, и точка пересечения линий пеленгов (x_{12}, y_{12}) смещается от истинного положения источника (x, y) . Для уточнения положения объекта в расчет может вводиться большее число результатов измерений, чем это минимально необходимо для определения координат, то есть избыточная информация. Для этого число пеленгаторов увеличивается и все пересечения линий пеленгов, число которых для N пеленгаторов равно $N(N-1)/2$ подвергаются статистической обработке, но результатом не может быть достоверное определение положения источника. После получения N пеленгов можно говорить лишь о послепытной (апостериорной) плотности вероятности нахождения цели в некоторой области, которая тем резче ограничена, чем точнее измеряются пеленги и чем больше их число [19]

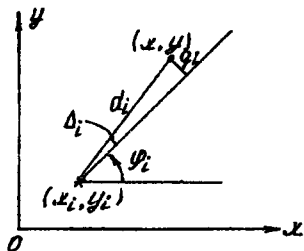
4.12.2. Априорные и апостериорные вероятности в задаче радиопеленгования

Пусть система местоопределения объектов состоит из N пелен-

гаторов, размещенных в точках (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$ Априорно известно, что каждый из пеленгаторов определяет направление на объект с небольшой ошибкой Δ_i , $i=1, 2, \dots, n$ значение которой случайно, в среднем равно нулю, а в среднеквадратическом равно σ_i для i -ого пеленгатора. Ошибки разных пеленгаторов статистически независимы, малы в среднеквадратическом ($\sigma_i \ll 1$) их распределения близки к нормальным, так что плотность вероятности для Δ_i можно записать в виде

$$f(\Delta_i) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \frac{\Delta_i^2}{\sigma_i^2}} \quad (4.41)$$

Пусть пеленгуемый объект находится в точке (x, y) на расстоянии



длина $d_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$ от i -ого пеленгатора (рис. 4.5). Пеленг φ_i отсчитываемый от направления оси Ox определяется пеленгатором со случайным отклонением Δ_i так что линия пеленга проходит на расстоянии q_i от точки (x, y) . Несложно рассчитать величину линейного отклонения

Рис. 4.5

$$q_i = (y-y_i) \cos \varphi_i - (x-x_i) \sin \varphi_i, \quad (4.42)$$

а поскольку Δ_i мало, то можно принять $\Delta_i = q_i / d_i$

Воспользуемся приведенными выражениями и запишем плотность условного совместного распределения пеленгов φ_i , $i=1, 2, \dots, n$ на объект в точке (x, y) Поскольку ошибки статистически независимы, то

$$f(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i^2}{\sigma_i^2}} \quad (4.43)$$

Учитывая равенство $\Delta_i = q_i / d_i$ и выражение (4.42), преобразуем плотность (4.43) в условную плотность

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{d_i^2 \sigma_i^2}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{[(y-y_i) \cos \varphi_i - (x-x_i) \sin \varphi_i]^2}{\delta_i^2}} \quad (4.44)$$

где введено обозначение $\delta_i = \sigma_i d_i$. Таким образом, если координаты объекта (x, y) известны, то априорная плотность распределения пеленгов имеет вид (4.44).

Нас интересует обратная задача: получены значения пеленгов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ нужно выяснить, с какой вероятностью объект мог занимать то или иное положение в момент измерения, то есть нужно определить плотность вероятности координат объекта $f(x, y | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ после опыта, в котором реализовались значения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ - апостериорную плотность вероятности координат. Возможно ли для этого воспользоваться плотностью (4.44)?

По теореме умножения вероятностей

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | x, y) f(x, y) = f(x, y | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n),$$

где $f(x, y)$ и $f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ - безусловные плотности распределения координат и пеленгов. Запишем это равенство в несколько иной форме

$$f(x, y | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \frac{f(x, y)}{f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)} f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | x, y)$$

Если нет априорно указаний на возможную траекторию движения объекта, то до опыта естественно считать любые его положения в зоне работы пеленгаторов равновероятными. Тогда апостериорная плотность $f(x, y | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ с точностью до нормирующего множителя определяется условной плотностью (4.44), так что

$$f(x, y | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = C e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{[(y-y_i) \cos \varphi_i - (x-x_i) \sin \varphi_i]^2}{\delta_i^2}} \quad (4.45)$$

где C - не зависящий от (x, y) коэффициент, обеспечивающий равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) dx dy = 1$$

Апостериорная плотность (4.45) позволяет оценить значения (x, y) по измеренным пеленгам и рассчитать потенциальную точность определения положения объекта системой n пеленгаторов.

Для последующего изложения удобно раскрыть скобки в показателе экспоненты и расположить слагаемые по степеням x и y . После несложных преобразований получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{[(y-y_i)\cos\varphi_i - (x-x_i)\sin\varphi_i]^2}{\delta_i^2} = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F, \quad (4.46)$$

где

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{\sin^2 \varphi_i}{\delta_i^2}; \quad B = -\sum_{i=1}^n \frac{\cos \varphi_i \sin \varphi_i}{\delta_i^2}; \quad C = \sum_{i=1}^n \frac{\cos^2 \varphi_i}{\delta_i^2}, \quad (4.47)$$

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i \sin \varphi_i}{\delta_i^2}; \quad E = -\sum_{i=1}^n \frac{\rho_i \cos \varphi_i}{\delta_i^2}; \quad F = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i^2}{\delta_i^2}.$$

а ρ_i определено формулой (4.39).

4.12.3. Метод максимального правдоподобия

Поскольку вид апостериорной плотности $f(x, y | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ установлен, то за оценки \hat{x} , \hat{y} координат объекта можно принять наиболее вероятные значения x и y при которых достигается максимум плотности вероятности и которые, следовательно, можно найти как совместное решение двух уравнений

$$\frac{\partial f(x, y | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f(x, y | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial y} = 0. \quad (4.48)$$

Метод решения этих уравнений для функции (4.45) рассматривается в следующем разделе 4.12.4, где построен алгоритм расчета \hat{x} , \hat{y} удобной для программирования на ЭВМ и допускающий наглядную графическую интерпретацию. Здесь же обратим внимание на то об-

стоятельство, что в нашем случае при сделанных предположениях условия (4.48) экстремума апостериорной плотности (4.45) можно вполне заменить условиями экстремума априорной плотности (4.44) :

$$\frac{\partial f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | x, y)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | x, y)}{\partial y} = 0, \quad (4.49)$$

рассматривая ее как функцию параметров x и y при реализовавшихся пленках $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ поскольку зависимость плотностей (4.44) и (4.45) от x, y функционально определяется одним и тем же множителем. Во многих случаях апостериорную плотность или не удается найти, или уравнения (4.48) оказываются слишком сложными для решения, в то время как уравнения (4.49) могут быть записаны и решены. Но точное совпадение условий (4.48) и (4.49) — скорее исключение, чем правило: его можно принять как приближенное, если в окрестности максимума апостериорной плотности пренебречь изменением априорной плотности $f(x, y)$ возможных положений объекта. Чем выше точность пленгования, тем более оправданным является такое приближение, и наоборот, с ростом ошибок оно может оказаться неприменимым. Тем не менее, уравнениям (4.49) можно дать независимую интерпретацию и обосновать применение их решений в качестве возможной оценки координат объекта.

Напомним, что $f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | x, y) d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n$ есть вероятности совокупности $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ пленгов при условии, что объект находится в (x, y) . При изменении положения объекта ее значение меняется, т.е. есть это сочетание пленгов становится более или менее вероятным.

Таким образом, $f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | x, y)$ характеризует правдоподобие совокупности измеренных пленгов в зависимости от предполагаемого положения объекта и как функция переменных x, y называется функцией правдоподобия. Будем исходить из того, что чаще всего реализуются сочетания $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ близкие к наиболее вероятным. Тогда в качестве оценки \hat{x}, \hat{y} координат объекта естественно принять те значения x, y при которых функция правдоподобия $f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | x, y)$ достигает максимума, то есть \hat{x}, \hat{y} должны быть решением уравнений (4.49). Поскольку функция правдоподобия и ее логарифм $\ln f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | x, y)$ достигают максимума в одной и той же точке, то условия (4.49), когда это удобно, записывают также в форме

$$\frac{\partial \ln f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | x, y)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \ln f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n | x, y)}{\partial y} = 0. \quad (4.50)$$

4.12.4. Оценки координат объекта

Оценки максимального правдоподобия в нашем случае, как уже говорилось, совпадают с наиболее вероятными значениями переменных x, y и могут быть найдены как решения уравнений (4.48) или (4.49), которые можно заменить уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial x} [Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F] = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F] = 0$$

Поскольку $q_i/d_i \ll 1$, то при дифференцировании можно приближенно считать δ_i , $i=1, 2, \dots, n$ неизменными величинами и записать условия экстремума в виде

$$Ax + By + D = 0; \quad Bx + Cy + E = 0.$$

откуда следует

$$\hat{x} = \frac{BE - CD}{AC - B^2}; \quad \hat{y} = \frac{BD - AE}{AC - B^2} \quad (4.51)$$

Несложные преобразования позволяют представить определитель системы уравнений следующей суммой

$$AC - B^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_j - \cos \varphi_i \sin \varphi_i \cos \varphi_j \sin \varphi_j}{\delta_i^2 \delta_j^2} + \left. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sin^2 \varphi_j \cos^2 \varphi_i - \cos \varphi_j \sin \varphi_j \cos \varphi_i \sin \varphi_i}{\delta_i^2 \delta_j^2} \right\},$$

которая легко преобразуется к виду

$$AC - B^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\sin^2(\psi_i - \psi_j)}{\delta_i^2 \delta_j^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \quad (4.52)$$

Преобразуем также числители в выражениях (4.51)

$$BE - CD = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\rho_i \cos \psi_j \sin(\psi_j - \psi_i)}{\delta_i^2 \delta_j^2}$$

или в симметричной форме

$$BE - CD = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\rho_i \cos \psi_j - \rho_j \cos \psi_i] \frac{\sin(\psi_j - \psi_i)}{\delta_i^2 \delta_j^2}$$

Напомним, что соотношение

$$\frac{[\rho_i \cos \psi_j - \rho_j \cos \psi_i]}{\sin(\psi_j - \psi_i)} = x_{ij} \quad (4.53)$$

по аналогии с (4.40) определяет координату x_{ij} точки пересечения i -ого и j -ого пленгов. Это позволяет представить рассматриваемое выражение в компактной форме, аналогичной (4.52)

$$BE - CD = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} m_{ij} \quad (4.54)$$

Координата y_{ij} точки пересечения двух пленгов определяется, согласно (4.40) формулой

$$\frac{[\rho_i \sin \psi_j - \rho_j \sin \psi_i]}{\sin(\psi_j - \psi_i)} = y_{ij} \quad (4.55)$$

что позволяет записать

$$BD - AF = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij} m_{ij} \quad (4.56)$$

Подстановка (4.52), (4.54), (4.56) в (4.51) делает формулы

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} m_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}} ; \hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij} m_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}} \quad (4.57)$$

подобными формулам для расчета центра "масс" m_{ij} размещенных в точках пересечения пленгов (рис. 4.6). Значения "масс"

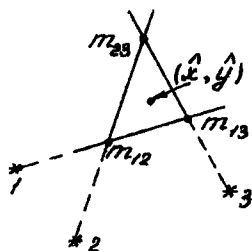


Рис. 4.6

$$m_{ij} = \frac{\sin^2(\varphi_i - \varphi_j)}{\sigma_i^2 \sigma_j^2 d_i^2 d_j^2} \quad (4.58)$$

тем меньше, чем острее угол между пересекающимися линиями пленгов и чем больше удалены соответствующие пленгаторы от "центра тяжести" (\hat{x}, \hat{y}) . Однако равенства (4.57) не определяют координаты \hat{x}, \hat{y} в явном виде, поскольку расстояния

$$d_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

зависят от их значений. Это система двух уравнений, которую можно решить численно методом последовательных приближений, приняв за начальные значения \hat{x}_0, \hat{y}_0 - координаты точки, намеченной приблизительно с учетом примерных соотношений между "массами" m_{ij} . За \hat{x}_0, \hat{y}_0 можно также принять среднеарифметические значения координат точек пересечения линий пленгов; для их расчета можно воспользоваться формулами (4.57), положив в них $m_{ij} = 1$ при $i \neq j$ и $m_{ii} = 0$ [18].

4.12.5. Потенциальная точность определения координат

Условная плотность $f(x, y / \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ определяемая формулой (4.45), позволяет оценить не только координаты цели, но и потенциальную точность их измерения. Наиболее вероятные значения

координат не определяют достоверно истинное положение объекта. Более того, вероятность что объект находился именно в точке (\hat{x}, \hat{y}) , точнее говоря, в бесконечно малой ее окрестности $x \in (\hat{x}, \hat{x} + dx), y \in (\hat{y}, \hat{y} + dy)$ - бесконечно мала, поскольку равна $f(\hat{x}, \hat{y} | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) dx dy$. Чтобы вероятность имела конечное значение, нужно допустить некоторую неопределенность в оценке координат. Например, вероятность, что объект находился в области

$|x - \hat{x}| < \xi, |y - \hat{y}| < \eta$ представляется интегралом

$$\int_{\hat{x} - \xi}^{\hat{x} + \xi} \int_{\hat{y} - \eta}^{\hat{y} + \eta} dx dy f(x, y | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

и имеет тем большее значение, чем больше размеры области, то есть чем меньше требования предъявляются к точности, с которой определяется положение объекта. Принято говорить, что поверхность $z = f(x, y | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ и координатная плоскость $z = 0$ ограничивает в трехмерном пространстве (x, y, z) тело неопределенности, имеющее пик высотой

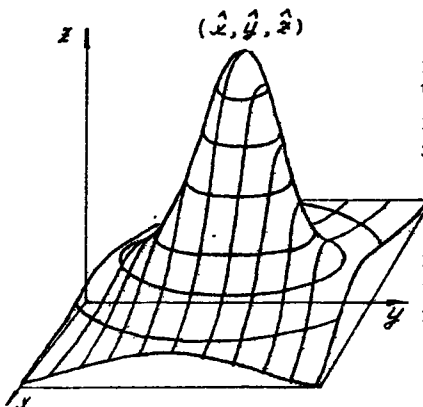


Рис. 4.7

$z = f(\hat{x}, \hat{y} | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ в точке (\hat{x}, \hat{y}) (рис. 4.7). Чем уже пик тела, тем меньше неопределенность в оценке положения объекта. Сечения тела неопределенности плоскостями $z = const$ дают эллипсы равных вероятностей, для которых точки (\hat{x}, \hat{y}, z) являются центрами симметрии.

Рассчитаем параметры эллипсов в зависимости от высоты сечения. Для этого приведем квадратичную форму (4.46) к диагональному виду преобразовани-

ем координат.

Перенесем начало координат в точку (\hat{x}, \hat{y}) для чего сделаем замену переменных $\xi = x - \hat{x}; \eta = y - \hat{y}$

при этом исчезнут члены с первыми степенями новых переменных, и квадратичная форма примет вид

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + H, \text{ где } H = D\hat{x} + E\hat{y} + F$$

Затем поворотом координатной системы обратим B в нуль, устраняя смешанный член. Заметим, что поворот координатной системы на угол α нетрудно учесть в формулах (4.47) для коэффициентов квадратичной формы: значения пеленгов при этом изменятся и станут равными $\varphi_i - \alpha$, $i = 1, 2, \dots, n$ следовательно формулы для коэффициентов при вторых степенях переменных примут вид

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{\sin^2(\varphi_i - \alpha)}{\delta_i^2}; \quad C(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{\cos^2(\varphi_i - \alpha)}{\delta_i^2}, \quad (4.59)$$

а при произведении переменных

$$B(\alpha) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\sin 2(\varphi_i - \alpha)}{\delta_i^2}$$

Выберем угол поворота α так, чтобы $B(\alpha) = 0$, то есть

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin 2\varphi_i}{\delta_i^2} \cos 2\alpha - \sum_{i=1}^n \frac{\cos 2\varphi_i}{\delta_i^2} \sin 2\alpha = 0$$

Такой выбор, очевидно, определяется уравнением

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\sin 2\varphi_i}{\delta_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{\cos 2\varphi_i}{\delta_i^2}}, \quad (4.60)$$

при этом квадратичная форма преобразуется к виду

$$A(\alpha)\xi^2 + C(\alpha)\eta^2 + H(\alpha)$$

Обозначим

$$\sigma_\xi^2 = 1/A(\alpha); \quad \sigma_\eta^2 = 1/C(\alpha) \quad (4.61)$$

и перейдем от плотности (4.45) к плотности распределения отклонений ξ, η от наиболее вероятных значений. Условие нормировки из-

бавляет от необходимости последовательно вычислять недостающие коэффициенты, поскольку, очевидно, плотность $f(\xi, \eta / \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ является нормальной

$$f(\xi, \eta / \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\xi^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2}\right]} \quad (4.62)$$

Сечение тела неопределенности, для которого

$$\frac{\xi^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2} = \kappa^2, \quad \kappa > 0,$$

ограничивается эллипсом с полуосями $a = \kappa\sigma_\xi$; $b = \kappa\sigma_\eta$ и площадью

$$\pi a b = \pi\sigma_\xi\sigma_\eta\kappa^2 \quad [18]$$

Рассчитаем вероятность того, что объект находился внутри эллипса с параметром κ . В точках эллипса плотность (4.62) имеет значение

$$\frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta} e^{-\frac{\kappa^2}{2}}$$

Выделим кольцевую полосу между эллипсом с параметром $\kappa + d\kappa$ и эллипсом с κ . Площадь такой полосы равна $2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\kappa d\kappa$ с точностью до слагаемых более высокого порядка малости. Вероятность, что объект находился в пределах полосы, есть

$$\frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta} e^{-\frac{\kappa^2}{2}} 2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\kappa d\kappa$$

Интегрируя по κ от нуля до заданного значения, получим вероятность, что объект находился внутри эллипса

$$P = \int_0^\kappa e^{-\frac{\kappa'^2}{2}} \kappa' d\kappa' = 1 - e^{-\frac{\kappa^2}{2}}.$$

Отсюда находим

$$\kappa = \sqrt{-2 \ln(1-P)} \quad (4.63)$$

Таким образом, с вероятностью P объект находился внутри эллипса, центром симметрии которого является точка наибольшей вероятности (\hat{x}, \hat{y}) (4.57), большая полуось ориентирована под углом

α (4.60) к оси Ox и полуоси равны $k\sigma_x$, $k\sigma_y$, где значение параметра k определяется вероятностью P (4.63), а σ_x , σ_y - формулами (4.59), (4.61).

Расчитанный эллипс характеризует линейные ошибки в определении положения объекта системой пеленгаторов, которые не превышаются с вероятностью P поэтому эллипс вероятности называют также

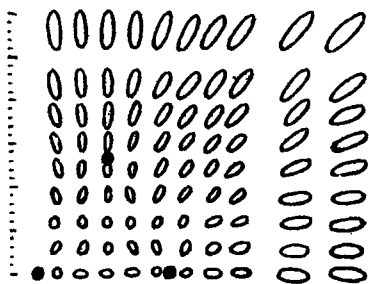


Рис 4.8

эллипсом ошибок. На рис. 4.8 показаны эллипсы ошибок для случая размещения трех радиопеленгаторов в вершинах равностороннего треугольника. Принято, что среднеквадратическое значение ошибки пеленгования каждым пеленгатором равно 2^0 (инструментальная точность пеленгования), вероятность $P = 0,5$ [18]

4.12.6. Задание к работе

1. Определить конфигурацию и основные параметры пеленгационной системы местоопределения объектов: число n пеленгаторов, их координаты (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ среднеквадратические ошибки σ_i пеленгаторов.

2. Задать положение пеленгуемого объекта и по его координатам (x, y) рассчитать для пеленгаторов системы пеленги φ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, введя в них нормальные случайные отклонения с нулевыми средними значениями и дисперсиями σ_i^2 .

3. Определить и нанести на схему точки пересечения пеленгов x_{ij} , y_{ij} ; провести реализовавшиеся пеленги.

4. Методом максимального правдоподобия оценить по реализовавшимся пеленгам координаты объекта, нанести точку (\hat{x}, \hat{y}) наиболее вероятного положения объекта на схему, определить направление и величину отклонения точки (\hat{x}, \hat{y}) от истинного положения объекта.

5. Рассчитать ориентацию и параметры эллипса ошибок для оцен-

ки (\hat{x}, \hat{y}) координат объекта, задав вероятность D с которой эллипс ошибок накрывает объект. Нанести эллипс ошибок на схему.

6. Провести многократное местоопределение источника, находящегося в фиксированной точке. Полученные оценки местоположения нанести на схему и сопоставить их распределение с эллипсом вероятности, рассчитанным для выбранного положения источника.

7. Для выбранной системы пеленгаторов исследовать зависимость ориентации и параметров эллипсов ошибок от положения объекта. Результаты исследования и выводы иллюстрировать серией графиков.

4.12.7. Форма отчета

Отчет должен содержать:

- задание к работе;
- описание системы пеленгаторов;
- описание алгоритма и примеры оценки координат пеленгуемого объекта;
- описание алгоритма и примеры оценки точности системы местоопределения объекта;
- расчетные и графические данные, характеризующие зависимость потенциальной точности от положения объекта;
- анализ результатов, выводы по работе.

4.12.8. Основные базовые программы

Подпрограмма (2100-2160) моделирует работу системы N пеленгаторов, расположенных в точках с координатами $X(I), Y(I), I \in (1, N)$.

Пеленгатор номера I при определении пеленга $F(I)$ на объект допускает случайные нормальные отклонения с нулевым средним значением и дисперсией $D(I)$. При задании координат объекта $(X\phi, Y\phi)$ подпрограмма вырабатывает для каждого пеленгатора системы квазислучайное значение пеленга $F(I)$

```
2100 REM МОДЕЛИРОВАНИЕ
```

```
2110 FOR I=1 TO N \ Y2=Y\phi-Y(I) \ X2=X\phi-X(I)
```

```
2120 GOSUB 2600 \ REM ATN
```

```
2125 F(I)=F\phi+SQR(-2*D(I)*LOG(RND(\phi)))*COS(6.2832*RND(\phi))
```

```

2130 PRINT "ПЕЛЕНК F(I) =" F(I)
2140 C(I) = COS(F(I)) \ S(I) = SIN(F(I))
2150 R(I) = Y(I)*C(I) - X(I)*S(I) \ NEXT I
2160 RETURN
    
```

Подпрограмма (2200-2290) вычисляет по реализовавшимся пеленгам $F(I)$ точки пересечения пеленгов $X(I,J), Y(I,J)$ начальные приближения $X1, Y1$ для оценок максимального правдоподобия (МП-оценок) координат объекта.

```

2200 REM НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
2210 S1 = 0 \ S2 = 0 \ S3 = 0
2220 FOR I=1 TO N-1
2225 FOR J=I+1 TO N \ A = SIN(F(J)-F(I))
2230 A1(I,J) = A \ S4(I,J) = A * A
2235 R1(I,J) = R(I) * C(J) - R(J) * C(I)
2240 R2(I,J) = R(I) * S(J) - R(J) * S(I)
2245 X1 = R1(I,J)/A \ Y1 = R2(I,J)/A
2250 PRINT "X(I,J) =" X1, " Y(I,J) =" Y1
2255 S3 = S3 + 1 \ S1 = S1 + X1 \ S2 = S2 + Y1 \ NEXT J
2260 NEXT I
2270 X1 = S1/S3 \ Y1 = S2/S3
2290 RETURN
    
```

Подпрограмма (2300-2399) методом последовательных приближений рассчитывает МП-оценки $X1, Y1$ координат пеленгуемого объекта.

```

2300 REM МП-ОЦЕНКИ КООРДИНАТ
2310 S1 = 0 \ S2 = 0 \ S3 = 0
2320 X3 = X1 \ Y3 = Y1
2323 FOR I=1 TO N \ X1 = X1 - X(I) \ Y1 = Y1 - Y(I) \ D1 = X1 *
    X1 + Y1 * Y1
    
```

```

2325 B(I)=D(I)*D1\NEXT I
2330 FOR I=1 TO N-1
2340 FOR J=I+1 TO N\M=S4(I,J)/(B(I)*B(J))
2350 A=A1(I,J)\ X2=R1(I,J)/A\ Y2=R2(I,J)/A
2360 S3=S3+M\ S1=S1+X2*M\ S2=S2+Y2*M\
NEXT J
2370 NEXT I
2380 X1=S1/S3\ Y1=S2/S3
2385 PRINT "МП-ОЦЕНКИ КООРД. X1="X1, "Y1="Y1
2390 IF ABS(X1-X3)>E THEN 2310
2395 IF ABS(Y1-Y3)>E THEN 2310
2399 RETURN

```

Подпрограмма (2400-2530) для заданных координат объекта X_0, Y_0 рассчитывает параметры эллипса ошибок, накрывающего цель с заданной вероятностью P : ориентацию A_0 большой полуоси (в градусах), большую A и малую B полуоси эллипса.

```

2400 REM ЭЛЛИПС ОШИБОК
2405 FOR I=1 TO N\ Y2=Y0-Y(I)\ X2=X0-X(I)
2410 GOSUB 2600\ REM ATN
2415 F1(I)=F0\D1=X2*X2+Y2*Y2\ B1(I)=D1*D(I)\NEXT I
2420 Y2=0\ X2=0
2430 FOR I=1 TO N\ T=2*F1(I)\ T1=B1(I)
2440 Y2=Y2+SIN(T)/T1\ X2=X2+COS(T)/T1\NEXT I
2450 GOSUB 2600
2460 A0=0.5*F0
2470 A2=0\ C2=0
2480 FOR I=1 TO N\ F2=F1(I)-A0\ S1=SIN(F2)\
C1=COS(F2)

```

```

2485  T1 = B1(I)
2490  A2 = A2 + S1 * S1 / T1 \ C2 = C2 + C1 * C1 / T1
2500  NEXT I
2505  A2 = SQR(A2) \ C2 = SQR(C2)
2510  A = K / A2 \ B = K / C2 \ A0 = A0 * 360 / 6.28319
2520  PRINT "ПОЛУОСИ A="A, "B="B, "УГОЛ НАКЛОНА ЭЛ-
        ЛИПСА =" A0
2530  RETURN
    
```

Подпрограмма (2600-2670) вычисляет $F\theta = \arctg(Y2/X2)$ с учетом квадранта, в котором находится точка с координатами $X2, Y2$.

```

2600  REM ATN
2605  IF X2 = 0 THEN T = 1.5708 \ GOTO 2620
2610  T = ATN(ABS(Y2/X2))
2620  IF Y2 >= 0 THEN IF X2 < 0 THEN T = 3.14159 - T
2630  IF Y2 < 0 THEN IF X2 <= 0 THEN T = 3.14159 + T
2640  IF Y2 <= 0 THEN IF X2 > 0 THEN T = 6.28319 - T
2670  F0 = T \ RETURN
    
```

Главная программа

```

10  REM ГЛАВНАЯ ПРОГРАММА
15  RANDOMIZE
20  DIM X(10), Y(10), C(10), S(10), D(10), B1(10), B1(10), F(10)
25  DIM F(10), R(10), A1(10, 10), S4(10, 10), R1(10, 10), R2(10, 10)
30  PRINT "ЧИСЛО ПЕЛЕНАТОРОВ N=" \ INPUT N
35  PRINT "ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ E=" \ INPUT E
40  PRINT "ВЕРОЯТНОСТЬ P=" \ INPUT P
45  FOR I = 1 TO N \ PRINT "X("I"), Y("I"), D("I")"
50  INPUT X(I), Y(I), D(I) \ NEXT I
55  PRINT "КООРД. ЦЕЛИ X0, Y0" \ INPUT X0, Y0
60  K = SQR(-2 * LOG(1 - P))
    
```

```

65 GOSLIB 2100 \ REM МОДЕЛИРОВАНИЕ
70 GOSLIB 2200 \ REM НАЧАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
75 GOSLIB 2300 \ REM МЕТОД ПОСЛЕД. ПРИБЛИЖЕН.
80 GOSLIB 2400 \ REM ЭЛЛИПСЫ ОШИБОК
90 STOP
    
```

5. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В предыдущих разделах 3 и 4 рассматривалась в основном статистика случайных величин — значений случайных процессов в фиксированных сечениях. В этом разделе предметом статистического анализа является множество реализаций случайного процесса за конечное время наблюдения. Рассматриваются процессы стационарные, примером которых могут быть флуктуации некоторой физической величины в системе, находящейся в равновесных условиях. Для стационарных процессов статистика не зависит от выбора начального момента времени. Статистический анализ в основном касается энергетических характеристик случайных процессов и проводится в рамках корреляционной теории.

5.1. Стационарные процессы

Исследование случайного процесса, а также воздействия его на различные устройства существенно упрощается при его стационарности.

Определение. Случайный процесс называется строго стационарным, если его плотность распределения $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ инвариантна по отношению к началу отсчета времени, т.е. при любых n и τ имеет место равенство

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

Таким образом, по определению статистические свойства стационарного случайного процесса остаются неизменными во времени.

Примем за начало отсчета момент t_1 и положим $\tau = -t_1$. Тогда

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}),$$

где
$$\tau_k = t_{k+1} - t_k \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Таким образом, число временных параметров сократилось до $n-1$.
В частности, плотность одномерного распределения стационарного процесса не зависит от времени

$$f(\xi; t) = f(\xi).$$

Как следствие этого - независимость от времени всех моментов одномерного распределения

$$\langle \xi^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n f(\xi) d\xi \equiv \langle \xi^n \rangle$$

в том числе среднего значения $\langle \xi \rangle$ и дисперсии $\langle [\xi(t) - \langle \xi \rangle]^2 \rangle = \sigma^2$.
Плотность двумерного распределения стационарного процесса зависит лишь от разности $\tau_1 = t_2 - t_1$

$$f(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = f(\xi_1, \xi_2; \tau_1),$$

и это ее свойство переносится на все моменты двумерного распределения, в том числе на корреляционную функцию

$$K(t_1, t_2) = K(\tau_1)$$

Многие важные свойства случайных процессов могут быть описаны в рамках корреляционной теории. Стационарность этих свойств определяется стационарностью моментов первого и второго порядков: независимостью среднего значения и дисперсии от времени и зависимостью корреляционной функции от разности $t_2 - t_1$. Случайные процессы, удовлетворяющие этим условиям, называются стационарными в широком смысле слова. Стационарность в широком смысле не определяет свойств многомерных распределений, которые в корреляционной теории не фигурируют, и поэтому не означает строгой стационарности процесса. Случайные процессы, стационарные оттого, конечно всегда стационарны в широком смысле, но обратное справедливо далеко не всегда. Стационарность в широком смысле называют также слабой стационарностью.

5.2. Функция корреляции стационарного процесса

В разделе 2.4 рассматривались общие свойства корреляционной функции. Сформулируем их применительно к слабостационарным процессам.

1. Корреляционная функция стационарного процесса является четной функцией разности переменных $\tau = t_2 - t_1$,

$$K(\tau) = K(-\tau) \quad (5.2)$$

2. При $\tau = 0$ корреляционная функция достигает максимального значения

$$|K(\tau)| \leq K(0) = \sigma^2 \quad (5.3)$$

3. Положительная определенность корреляционной функции определяется неравенством

$$\iint_{-T/2}^{T/2} g(t') dt' K(t' - t'') dt'' g(t'') > 0, \quad (5.4)$$

справедливым для произвольной действительной функции $g(t)$, определенной и квадратично интегрируемой на интервале $(-T/2, T/2)$. Коэффициент корреляции стационарного процесса равен

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{\sigma^2}, \quad 0 \leq |R(\tau)| \leq 1$$

При увеличении τ статистическая зависимость значений случайного процесса в двух сечениях ослабевает и коэффициент корреляции уменьшается

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$$

Уменьшение может быть монотонным, но может иметь осциллирующий характер - в этом отражаются свойства случайного процесса, например, присущая ему квазипериодичность временных флуктуаций.

Как в теории случайных процессов, так и в приложениях широко используется понятие интервала корреляции (времени корреляции) как такого временного интервала τ_0 при разnose на который двух сечений можно пренебречь корреляцией принадлежащих им значений случайного процесса, то есть

$$|R(\tau)| \ll 1 \quad \text{при} \quad \tau > \tau_0$$

Покольку характер зависимости коэффициента корреляции от временного интервала τ может быть различным, интервал корреляции может по-разному определяться в зависимости от условий и целей задачи. Например, для монотонно убывающих функций $R(\tau) \geq 0$ часто задают малый по сравнению с единицей предельный уровень коэффициента корреляции $R_n > 0$ и считают значения случайного процесса практически некоррелированными, если $R(\tau) < R_n$. Временной интервал между сечениями, соответствующий этому уровню, называют интервалом корреляции $R(\tau_0) = R_n$ (рис. 5.1)

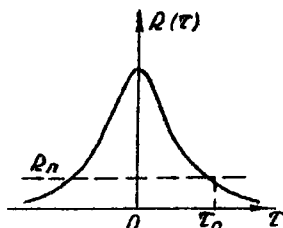


Рис. 5.1

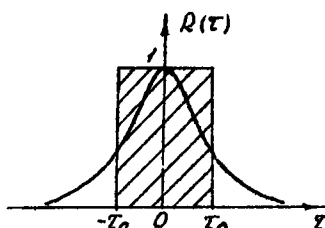


Рис. 5.2

Интегральное время корреляции (интегральный масштаб корреляции) определяют как половину основания прямоугольника единичной высоты, площадь которого равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $R(\tau) \geq 0$ и осью τ (рис. 5.2).

При этом

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau \quad (5.5)$$

Если зависимость $R(\tau)$ не монотонная, если $R(\tau)$ может принимать отрицательные значения, интегральное время корреляции определяется одним из двух способов

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau \quad \text{или} \quad \tau_0 = \int_0^{\infty} R^2(\tau) d\tau \quad (5.6)$$

Независимо от способа определения обычно применяют для τ_0 одно общее название - время (интервал, масштаб) корреляции.

5.3. Доверительный интервал для коэффициента корреляции

Статистическое распределение выборочного коэффициента корреляции \bar{R} отличается от нормального (R может принимать значения от -1 до 1 , а границы изменения нормально распределенной величины от $-\infty$ до ∞) Поэтому при построении доверительного интервала истинного коэффициента корреляции R нельзя использовать статистику $\frac{\bar{R} - R}{S_R}$ аналогичную статистике $\frac{\bar{x} - \langle x \rangle}{S_{\bar{x}}}$

для среднего значения, которая подчиняется распределению Стьюдента.

Для построения доверительных границ коэффициента корреляции строят статистику Z

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R} = \operatorname{Arth} R$$

Оказывается, что статистика Z распределена приблизительно нормально при $n \geq 20$ со средним значением

$$\langle Z \rangle = \operatorname{Arth} R$$

и дисперсией

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n-3}$$

здесь n - объем выборки, по которому проводится усреднение. Это приближение тем точнее, чем больше объем выборки.

Таким образом, статистика

$$z = \operatorname{Arth} R) \sqrt{n-3}$$

будет распределена по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией ($N(0, 1)$) и доверительные границы для нее при доверительной вероятности $D = 1 - \alpha$ будут квантили нормального распределения $U_{\alpha/2}$ и $U_{1-\alpha/2}$ для которых выполняется соотношение

$$U_{\alpha/2} = -U_{1-\alpha/2}$$

Следовательно, с вероятностью D

$$\operatorname{Arth} \bar{R} - \frac{U_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} < \operatorname{Arth} R < \operatorname{Arth} \bar{R} + \frac{U_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}$$

Далее по таблицам $L_{\alpha\beta}$ находят доверительные границы для коэффициента корреляции.

5.4. Средние по времени характеристики реализаций

В эксперименте время наблюдения всегда ограничено, а число реализаций случайного процесса - выборочных функций, которые можно зарегистрировать, невелико. Для стационарного процесса конкретная форма выборочной функции, как правило, не представляет интереса. По ней составляют представление о среднем уровне, частоте флуктуаций, длительности и амплитуде выбросов и т. д. Для этого используют средние по времени характеристики каждой выборочной функции.

Предположим, что стационарный случайный процесс наблюдался в течение времени T при этом произведена запись n выборочных функций $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$. Примем за начало отсчета среднюю точку интервала наблюдения и определим среднее за время T выборочной функции $\xi_i(t)$:

$$\widetilde{\xi_i(t)}_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi_i(t) dt, \quad (5.7)$$

квадрата выборочной функции

$$\widetilde{\xi_i^2(t)}_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi_i^2(t) dt, \quad (5.8)$$

произведения двух значений выборочной функции

$$\widetilde{\xi_i(t)\xi_i(t+\tau)}_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi_i(t)\xi_i(t+\tau) dt \quad (5.9)$$

и так далее.

Если при увеличении длительности T регистрации выборочной функции возможен предельный переход $T \rightarrow \infty$ для характеристик (5.7) - (5.9), то значения этих пределов назовем средними по времени характеристиками этой выборочной функции. Таким образом, например, временное среднее одной выборочной функции есть

$$\widetilde{\xi}_i(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi_i(t) dt, \quad (5.10)$$

а временную корреляционную функцию определим так

$$\widetilde{K}_i(\tau) = \widetilde{\xi}_i(t) \widetilde{\xi}_i(t+\tau) - \widetilde{\xi}_i(t)^2$$

Подчеркнем, что, вообще говоря, временные средине разных реализаций случайного процесса $\xi_i(t)$ различны, и если они существуют, то в совокупности определяют ансамбль реализаций случайной величины $\widetilde{\xi}_i(t)$. Точно так же множество временных корреляционных функций всех возможных реализаций процесса определяют случайную временную корреляционную функцию

$$\widetilde{K}(\tau) = \widetilde{\xi}(t) \widetilde{\xi}(t+\tau) - \{\widetilde{\xi}(t)\}^2. \quad (5.11)$$

Наряду со средними по времени характеристиками одной выборочной функции можно рассматривать распределение ее значений, или же относительное время пребывания реализации ниже заданного порога ξ_1 . Чтобы рассчитать относительное время, когда

$$\xi_i(t) < \xi_1,$$

воспользуемся ступенчатой функцией Хевисайда от аргумента $\xi_1 - \xi_i(t)$

$$\chi(\xi_1 - \xi_i(t)) = \begin{cases} 1, & \xi_i(t) < \xi_1; \\ 0, & \xi_i(t) > \xi_1. \end{cases}$$

Выделяя все промежутки времени, в которые $\xi_i(t)$ не превышало порогового значения, функция Хевисайда позволяет подсчитать (см. рис. 5.3) за время наблюдения T их суммарную длительность

$$\widetilde{T}_i(\xi_1) = \int_{-T/2}^{T/2} \chi(\xi_1 - \xi_i(t)) dt$$

Назовем относительным временем пребывания $\xi_i(t)$ ниже порога ξ_1 , предел отношения

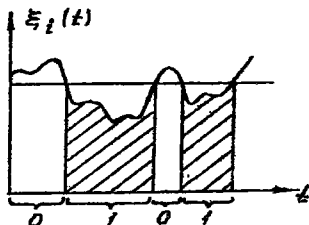


Рис. 5.3

$$Q_i(\xi_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{T}_i(\xi_i)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \chi(\xi_i - \xi_i(t)) dt \quad (5.12)$$

Функцию $Q_i(\xi_i)$ называют одноточечным распределением значений выборочной функции $\xi_i(t)$

Аналогично можно определить двухточечное распределение

$$Q_i(\xi_1, \xi_2; \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \chi(\xi_1 - \xi_i(t)) \chi(\xi_2 - \xi_i(t+\tau)) dt \quad (5.13)$$

и вообще многоточечные распределения выборочной функции

$Q_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{K-1})$, $K = 1, 2, \dots$,
удовлетворяющие очевидным условиям согласованности

1. $0 \leq Q_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{K-1}) \leq 1$;
2. $Q_i(\infty, \infty, \dots, \infty; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{K-1}) = 1$;
3. $Q_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \infty, \dots, \infty; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, \tau_j, \dots, \tau_K) =$
 $= Q_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1})$ - $j < K$

Для разных выборочных функций случайного процесса многоточечные распределения, вообще говоря, различны.

5.5. Эргодические случайные процессы

5.5.1. Свойство эргодичности процесса

Определение. Случайный процесс называется эргодическим, если любая его вероятностная характеристика, полученная усреднением по ансамблю реализаций, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равна соответствующей средней по времени характеристике любой его реализации.

Как правило, экспериментатор не располагает достаточно большим числом реализаций процесса, хотя время регистрации одной реализа-

ции он часто может сделать продолжительным. Поэтому свойство эргодичности случайных процессов является важным. Необходимыми и достаточными условиями эргодичности случайного процесса является его строгая стационарность и неразложимость на другие процессы*).

Первое условие очевидно. Поясним второе. Пусть некоторый стационарный случайный процесс $\xi(t)$ определяется множеством возможных реализаций $\{\xi_{\kappa}(t)\}$. Выделим некоторое подмножество реализаций $\{\xi_{\kappa}^{(p)}(t)\} \subset \{\xi_{\kappa}(t)\}$ и назовем его вероятностью P_p - вероятностью того, что какая-либо реализация является элементом этого подмножества. Будем говорить, что стационарный случайный процесс неразложим на другие процессы, если исключение из его ансамбля любого подмножества реализаций конечной вероятности $0 < P_p < 1$ нарушает его стационарность.

Приведем два примера стационарных, но неэргодических случайных процессов.

1. Пусть $Z(t) = \alpha \xi(t) + (1-\alpha) \eta(t)$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ - стационарные эргодические случайные процессы, статистические характеристики которых отличаются, а α - случайная величина, принимающая значение 0 с вероятностью P_0 и 1 с вероятностью $P_1 = 1 - P_0$. Очевидно, ансамбль реализаций $\{Z_{\kappa}(t)\}$ включает в себя два стационарных подмножества $\{\xi_{\kappa}(t)\}$ и $\{\eta_{\kappa}(t)\}$ вероятностью которых P_0 и P_1 . Выборочные функции одного из подмножеств не отражают свойств другого подмножества, а значит, и ансамбля в целом. Процесс является неэргодическим.

2. Пусть $Z(t) = \xi(t) + \eta$, где $\xi(t)$ - стационарный эргодический процесс, а η - непрерывная случайная величина. Каждому возможному значению случайной величины $\eta^{(p)}$ соответствует стационарное подмножество выборочных функций $\{Z_{\kappa}^{(p)}(t)\}$ с элементами $Z_{\kappa}^{(p)}(t) = \xi_{\kappa}(t) + \eta^{(p)}$ вероятностью каждого такого подмножества бесконечно мала, но их число бесконечно велико, так что в сумме они образуют ансамбль реализаций, вероятность которого равна единице. Таким образом, ансамбль реализаций разбиваем на сколь угодно большее число стационарных подмножеств, процесс не является эргодическим.

По определению, если процесс эргодический, то средние по времени характеристики любых его выборочных функций совпадают и рав-

*В теории случайных процессов это условие называется условием метрической транзитивности [4]

ны средним по ансамблю с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, т.е., например,

$$\widetilde{\xi}(t) = \langle \xi(t) \rangle; \quad \widetilde{\xi}^2(t) = \langle \xi^2(t) \rangle; \quad \widetilde{K}(\tau) = K(\tau)$$

и т. д. Это также означает, что с вероятностью 1 многоточечные распределения значений любых выборочных функций совпадают и равны соответствующим конечномерным распределениям случайного процесса, т.е. для любых $n = 1, 2, \dots$

$$Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}).$$

5.5.2. Дисперсия временного среднего

Во многих случаях доказательство строгой эргодичности случайного процесса оказывается затруднительным, но часто в этом и не возникает необходимости. Очевидно, в рамках корреляционной теории достаточно знать лишь условия, при которых первые два момента могут быть получены как средние по времени, т.е. условия вероятностной сходимости, например, среднего за время T какой-либо реализации $\widetilde{\xi}_K(t)_T$ к среднему по ансамблю $\langle \xi(t) \rangle$ при $T \rightarrow \infty$. Рассмотрим условия сходимости в среднеквадратическом $\widetilde{\xi}(t)_T$ к $\langle \xi(t) \rangle$ для стационарного или слабостационарного процесса. Среднее значение $\widetilde{\xi}(t)_T$ равно

$$\langle \widetilde{\xi}(t)_T \rangle = \langle \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) dt \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle \xi(t) \rangle dt = \langle \xi(t) \rangle,$$

поскольку для стационарного и слабостационарного процессов $\langle \xi(t) \rangle$ не зависит от времени. Дисперсия среднего за время T равна

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi T}^2 &= \langle [\widetilde{\xi}(t)_T - \langle \xi \rangle]^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} dt' \int_{-T/2}^{T/2} dt'' \langle [\xi(t') - \langle \xi \rangle][\xi(t'') - \langle \xi \rangle] \rangle = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} dt' \int_{-T/2}^{T/2} dt'' K(t' - t'').$$

где $K(t' - t'')$ - корреляционная функция процесса $\xi_t(t)$. Сделаем замену переменных $t' - t'' = \tau$; $t' + t'' = \chi$, отобразив область интегрирования $t' \in (-T/2, T/2)$; $t'' \in (-T/2, T/2)$ на область (рис. 5.4)

$$\begin{cases} \tau \in (-T, 0), \chi \in (-T-\tau, T+\tau); \\ \tau \in (0, T), \chi \in (-T+\tau, T-\tau). \end{cases}$$

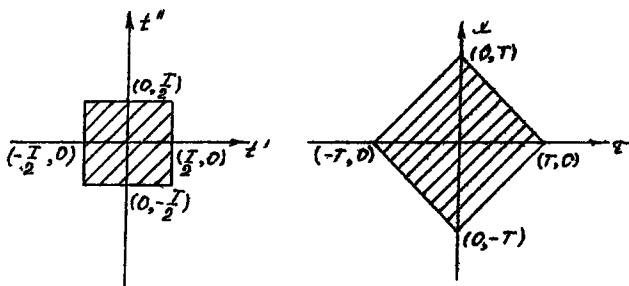


Рис. 5.4

и вычислим внутренний интеграл по переменной χ тогда, учитывая четность функции корреляции $K(\tau)$ получим

$$\sigma_{\xi_T}^2 = \frac{2}{T^2} \int_0^T d\tau K(\tau)(T-\tau). \quad (5.14)$$

Введем безразмерную переменную интегрирования $y = \tau/T$

$$\sigma_{\xi_T}^2 = \frac{2}{T^2} \int_0^T dy (1-y) K(Ty)$$

Для того, чтобы $\tilde{\xi}_T(t)$ сходилось в среднеквадратическом к $\xi(t)$ при $T \rightarrow \infty$ должно выполняться условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_{\xi_T}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} 2 \int_0^1 dy (1-y) K(Ty) = 0, \quad (5.15)$$

накладывающее ограничение на свойства корреляционной функции случайного процесса. Условие (5.15) выполняется, если

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0, \quad (5.16)$$

но последнее требование (5.16) является более жестким, чем (5.15). Например, для периодической функции корреляции вида $K(\tau) = a \cos \omega \tau$ при больших значениях τ

$$\int_0^T dy (1-y) a \cos(\omega T y) = O\left(\frac{1}{T}\right),$$

то есть условие (5.15) выполняется, в то время как (5.16) неприменимо.

5.5.3. Длительность интервала временного усреднения

Установим связь между временем корреляции τ_0 , дисперсией σ^2 случайного процесса и дисперсией временного среднего $\sigma_{\xi T}^2$. Запишем формулу (5.14) в следующем виде

$$\frac{\sigma_{\xi T}^2}{\sigma^2} = \frac{2}{T} \int_0^T d\tau R(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)$$

Предположим, что $R(\tau)$ - монотонно убывающая функция и интервал корреляции можно определить интегралом

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau$$

Предположим также, что время наблюдения значительно превышает время корреляции

$$T \gg \tau_0$$

Так как $R(\tau) \ll 1$ при $\tau > \tau_0$, то основной вклад в интеграл вносит окрестность $(0, \tau_0)$ точки 0. В пределах этой окрестности $\tau \ll \tau_0 \ll T$ то есть отношение $\tau/T \ll 1$ и им в подынтегральной функции можно пренебречь. В результате при $T \gg \tau_0$

$$\frac{\sigma_{\xi T}^2}{\sigma^2} \approx \frac{2}{T} \int_0^T d\tau R(\tau) \approx \frac{2}{T} \int_0^{\infty} d\tau R(\tau) = \frac{2\tau_0}{T},$$

или

$$\sigma_{\xi_T}^2 \approx \frac{2\tau_0}{T} \sigma^2$$

Чтобы временное среднее одной выборочной функции эргодического процесса было близко к среднему по ансамблю реализаций, время наблюдения - а оно здесь выступает как время усреднения выборочной функции - должно выбираться с учетом условия

$$T \gg 2\tau_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\xi_T}} \right)^2, \quad (5.17)$$

где $\sigma^2/\sigma_{\xi_T}^2$ - желаемое отношение дисперсий, определяющее степень соответствия среднего и среднего по времени значений. Соотношение (5.17) имеет качественный характер, его конкретная форма зависит от вида корреляционной функции и в каждом случае должна уточняться.

5.6. Задачи

1. Найти корреляционную функцию $K_{\xi}(\tau)$ для стационарного случайного сигнала

$$\xi(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

где A_m и ω_0 - постоянные амплитуда и угловая частота; φ - случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $[-\pi, \pi]$

Решение. По определению корреляционной функции (2.10) имеем

$$K_{\xi}(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle - \langle \xi(t) \rangle^2$$

Поскольку

$$\langle \xi(t) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} A_m \sin(\omega_0 t + \varphi) f(\varphi) d\varphi = 0, \quad (f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}),$$

$$K_{\xi}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} A_m^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) f(\varphi) d\varphi.$$

Учитывая, что $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, находим

$$K_{\xi}(\tau) = \frac{Am^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

2. Найти коэффициент корреляции R_{xy} двух функций случайной переменной φ : $x = \cos \varphi$ и $y = \sin \varphi$ если φ распределена равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$

Ответ: $R_{xy} = 0$, т.е. x и y некоррелированы, хотя между ними есть жесткая связь ($x^2 + y^2 = 1$) но связь эта нелинейная.

3. Два радиотелескопа ведут наблюдения за источниками x и y для выяснения коррелированности их радиоизлучения. Напряжения на выходах радиотелескопов имеют вид

$$u(t) = x(t) + \alpha y(t); v(t) = \alpha x(t) + y(t).$$

Коэффициент α определяет возможность попадания сигнала от соседнего источника в канал другого радиотелескопа. Определить, при каком значении коэффициента α может быть сделан неверный вывод о некоррелированности радиоисточников x и y

Ответ: Из условия некоррелированности сигналов $K_{xy} = 0$ следует

$$\alpha = - \frac{[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2 - 4K_{xy}^2}]}{2K_{xy}}$$

4. Доказать, что случайный процесс

$$x(y) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$$

является стационарным в широком смысле в том случае, когда случайные величины a и b взаимно некоррелированы, имеют нулевые средние и равные дисперсии.

5. Даны корреляционные функции, описываемые выражениями

$$K(\tau) = A e^{-\alpha|\tau|}; A e^{-\alpha^2 \tau^2}; A/[1 + \alpha^2 \tau^2];$$

$$[A \sin \alpha \tau]/\alpha \tau$$

Найти время корреляции для указанных корреляционных функций.

Ответ: $2/\alpha$; π/α ; $\sqrt{\pi}/\alpha$; π/α

6. Дискретный случайный стационарный процесс представляет собой последовательность прямоугольных импульсов одинаковой высоты и случайной длительности. Возможные значения процесса 0 и 1. Точки,

в которых происходит смена значений, - точки "опрокидывания" - образуют последовательность, подчиняющуюся закону Пуассона, т.е. вероятность $P_n(t)$ того, что за время t произойдет ровно n "опрокидываний" равна

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

где λ - среднее число "опрокидываний" в единицу времени. Найти корреляционную функцию, коэффициент корреляции и время корреляции процесса.

Ответ: $K(\tau) = 0,25 e^{-2\lambda|\tau|}$

7. Найти корреляционную функцию и дисперсию случайного телеграфного сигнала, который может принимать только два значения Q и $-Q$. Смена знака происходит в случайные моменты времени, распределенные по закону Пуассона (см. задачу 6)

8. Определить корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса

$$x(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_k t + \beta_k),$$

где ω_k - известные величины, A_1, A_2, \dots, A_n и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ взаимно независимые случайные величины. Начальные фазы β_k $k = 1, 2, \dots, n$ распределены равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$. Средние квадраты амплитуд $\langle A_k^2 \rangle$ $k = 1, 2, \dots, n$ известны.

Ответ:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=1}^n \langle A_k^2 \rangle \cos \frac{\omega_k \tau}{2}$$

9. Найти корреляционную функцию сигнала вида $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, если его случайная амплитуда распределена по закону Рэлея

$$f(A) = \frac{A}{\sigma^2} e^{-A^2/2\sigma^2} \quad 0 \leq A < \infty$$

a случайная фаза φ распределена равномерно на интервале $[0, 2\pi]$; A и φ статистически независимы.

Ответ:

$$K_x(\tau) = \sigma^2 \cos \omega \tau$$

10. Найти корреляционную функцию сигнала

$$x(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega t + \varphi_k),$$

где A_1, A_2, \dots, A_n и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ - взаимно независимы, $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ распределены по закону Рэлея, φ_k - равномерно на интервале $[0, 2\pi]$, $\langle A_k^2 \rangle = \sigma^2$.

Ответ:

$$K_x(\tau) = n \sigma^2 \cos \omega \tau.$$

11. Найти корреляционную функцию колебания, обладающего случайной амплитудной модуляцией

$$x(t) = A_0 [1 + \alpha(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где $\alpha(t)$ - стационарный случайный процесс с функцией корреляции $K_\alpha(\tau)$ φ - случайная фаза, имеющая равномерное распределение на интервале $[0, 2\pi]$ $\langle \alpha \rangle = 0$; α и φ статистически независимы.

Ответ:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2} A_0^2 [1 + K_\alpha(\tau)] \cos \omega_0 \tau$$

12. Даны два случайных нормальных процесса $x(t)$ и $y(t)$. Известны их дисперсии $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$ и коэффициент корреляции R_{xy} . Показать, что процессы $x(t)$ и $v(t) = y(t) - a x(t)$ становятся статистически независимыми при $a = R_{xy}$.

13. Найти взаимную корреляционную (ВКФ) функцию ограниченного сигнала $x_1(t)$ произвольной формы и "узкого" импульса, который может быть представлен функцией $x_2(t) = S_0 \delta(t - t_0)$

Ответ: $K_{12}(\tau) = S_0 x_1(t_0 + \tau)$ т.е. ВКФ δ -импульса и сигнала $x_1(t)$ повторяет форму сигнала, но со смещением, равным t_0 .

14. Процесс $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$A > 0$ - случайная амплитуда с известной плотностью распределения $f_A(A)$; φ - случайная фаза, равномерно распределенная на $[-\pi, \pi]$ и статистически независимая от A

Является ли процесс $x(t)$ эргодическим по отношению к

- а) среднему значению,
- б) корреляционной функции?

Решение.

- а) Среднее по ансамблю реализаций равно

$$\langle x \rangle = \langle A \rangle \langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0$$

Среднее за время T равно

$$\bar{x} = \frac{A}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{A}{\omega T} [\sin(\omega T + \varphi) - \sin \varphi]$$

Таким образом, $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{x} = 0$ следовательно, процесс $x(t)$ - эргодический по отношению к среднему значению.

б)

$$K_x(\tau) = \frac{\langle A^2 \rangle}{2} \cos \omega \tau ;$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_x(t, t+\tau) &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \omega \tau + \varphi) dt = \\ &= \frac{A^2}{2\omega T} [\sin(2\omega T + \omega \tau + 2\varphi) - \sin(\omega \tau + 2\varphi)] + \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{K}_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau \neq \frac{\langle A^2 \rangle}{2} \cos \omega \tau$$

Следовательно, процесс $x(t)$ не эргодический по отношению к корреляционной функции.

15. Является ли случайное гармоническое колебание

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi),$$

где a - постоянная амплитуда, а φ - случайная фаза, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$ эргодическим по отношению к корреляционной функции?

Ответ: Процесс $x(t)$ - эргодический по отношению к корреляционной функции.

16. Исследовать на эргодичность по отношению к среднему значению случайные процессы со следующими корреляционными функциями:

а) $K(\tau) = A e^{-\alpha|\tau|};$

б) $K(\tau) = W_0 \delta(\tau),$ ("белый" шум)

Ответ: Оба процесса эргодические по отношению к среднему значению.

17. Классифицировать по признакам стационарности и эргодичнос-

ти процесс $\tilde{x}(t) = x(t) + y$ в котором $x(t)$ - стационарный эргодический процесс, а y - случайная величина.

Ответ: Процесс $\tilde{x}(t)$ - стационарный, не эргодический.

18. Выборочный коэффициент корреляции, вычисленный по выборке объема $n=10$, равен $\bar{R} = -0,64$. Найти 90%-ный доверительный интервал для коэффициента корреляции R

Решение.

По таблицам $\text{Arth } x$ находим

$$\bar{x} = \text{Arth } \bar{R} = \text{Arth}(-0,64) = -\text{Arth}(0,64) = -0,76.$$

По таблицам нормального распределения

$$U_{1-\frac{\rho}{2}} = U_{0,95} = 1,65$$

Следовательно,

$$-0,76 - \frac{1,65}{\sqrt{10-3}} < \text{Arth } R < -0,76 + \frac{1,65}{\sqrt{10-3}}$$

или

$$-1,38 < \text{Arth } R < -0,14$$

Снова по таблицам $\text{Arth } x$ находим

$$-0,881 < R < -0,139$$

19. Построить доверительный интервал для коэффициента корреляции по следующим данным:

а) $\bar{R} = 0,687$ (выборочный коэффициент корреляции);

$n = 50$ (объем выборки);

$\rho = 1 - \alpha = 0,95$ (доверительная вероятность);

б) $\bar{R} = 0,71$; $n = 28$; $\rho = 0,95$,

в) $\bar{R} = -0,36$; $n = 28$ $\rho = 0,99$,

г) $\bar{R} = 0,14$; $n = 300$; $\rho = 0,99$.

5.7. Корреляционный анализ случайного процесса

Раздел содержит описание лабораторной работы, целью которой является моделирование на ЭВМ случайного процесса и анализ его

корреляционных свойств. Работа выполняется с применением диалого-вычислительного комплекса. Первая часть работы теоретическая, содержит краткие сведения, необходимые для выполнения второй, практической части. Приведенные базовые программы составлены на языке Бейсик.

5.7.1. Моделирование случайных процессов с заданной корреляционной функцией

Наиболее широко известным методом моделирования случайного процесса $x(t)$ с заданными корреляционными свойствами является метод линейного преобразования. В основе этого метода лежат следующие соображения. Предположим, что преобразуемый сигнал $\xi(t)$ подается на вход линейного фильтра, свойства которого описываются переходной функцией $h(t)$. На выходе фильтра регистрируется сигнал

$$x(t) = \int_0^t h(t-t') dt' \xi(t')$$

Если $\xi(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс, среднее значение которого равно нулю $\langle \xi(t) \rangle = 0$ а масштаб корреляции пренебрежимо мал (шумовой сигнал), то можно принять

$$\langle \xi(t') \xi(t'') \rangle = \sigma^2 \delta(t' - t'')$$

то есть считать $\xi(t)$ дельта-коррелированным случайным процессом. В этом случае корреляционные свойства выходного сигнала будут полностью определяться переходной функцией фильтра. Действительно,

$$\langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \int_0^{t_1} h(t_1-t') dt' \int_0^{t_2} h(t_2-t'') dt'' \langle \xi(t') \xi(t'') \rangle,$$

и если учесть дельта-коррелированность $\xi(t)$, то для $t_2 > t_1$

$$\langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \int_0^{t_1} h(t_1-t') dt' h(t_2-t') \sigma^2,$$

то есть функция корреляции выходного сигнала определяется сверткой переходной функции фильтра. Очевидно, что при этом масштаб корреляции $x(t')$ зависит от длительности отклика линейного фильтра на импульсное возбуждение или от инерционности фильтра.

При цифровой обработке результатов измерений каждая реализа-

ция процесса характеризуется дискретной выборкой значений в моменты времени t_n $n = 1, 2, \dots, N$. В рассматриваемой задаче отсчетные моменты нужно выбирать так, чтобы интервал дискретизации превышал интервал корреляции процесса $\xi(t)$ но при этом оставался малым по сравнению с интервалом корреляции $x(t)$ или по сравнению с длительностью отклика фильтра на однократный короткий импульс. Будем считать, что выборки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ и $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ полученные в отсчетные моменты t_1, t_2, \dots, t_N построены с учетом этого условия. Заменяем приближенно операции интегрирования суммированием и запишем линейное преобразование в следующей форме

$$x_i = \sum_{l=1}^N a_{il} \xi_l \quad a_{il} = 0 \text{ для } l > i,$$

или $\vec{x} = \hat{A} \vec{\xi}$

Поскольку значение моделируемого процесса x_i в момент времени t_i определяется реализовавшимися к этому моменту значениями $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i)$ то матрица \hat{A} является треугольной

$$x_1 = a_{11} \xi_1; \tag{5.18}$$

$$x_2 = a_{21} \xi_1 + a_{22} \xi_2;$$

$$x_3 = a_{31} \xi_1 + a_{32} \xi_2 + a_{33} \xi_3 \quad \text{и т.д.}$$

Метод цифрового моделирования процесса $x(t)$ с заданной корреляционной связью $R(t_n, t_m) = R_{nm}$ между значениями в моменты t_n $n = 1, 2, \dots, N$ состоит в подборе такого преобразования \hat{A} случайных некоррелированных величин $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$, чтобы получившиеся из них величины (x_1, x_2, \dots, x_N) имели заданную корреляционную связь R_{nm} . Элементы a_{nm} матрицы \hat{A} найдём из условий

$$\langle x_n x_m \rangle = R_{nm};$$

$$\langle \xi_n \xi_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ 1, & n = m \end{cases}$$

или

$$\langle x_n x_m \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^N a_{nl} \xi_l \sum_{k=1}^N a_{mk} \xi_k \right\rangle =$$

$$= \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N a_{nl} a_{mk} \langle \xi_l \xi_k \rangle = \sum_{l=1}^N a_{nl} a_{ml}$$

Пусть $\langle \xi \rangle = 0$. Тогда $\langle \chi \rangle = 0$ и

$$\sum_{l=1}^N a_{nl} a_{ml} = R_{nm}$$

В развернутом виде предлагаемый алгоритм сводится к последовательности вычислений:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{R_{11}} ; \\ \sum_{l=1}^2 a_{2l} a_{2l} &= R_{22} ; & a_{22} &= \sqrt{R_{22} - a_{21}^2} ; \\ \sum_{l=1}^1 a_{2l} a_{1l} &= R_{21} ; & a_{21} &= R_{21} / a_{11} ; \\ \sum_{l=1}^1 a_{3l} a_{1l} &= R_{31} ; & a_{31} &= R_{31} / a_{11} ; \\ \sum_{l=1}^2 a_{3l} a_{2l} &= a_{31} a_{21} + a_{32} a_{22} = & a_{32} &= (R_{32} - a_{31} a_{21}) / a_{22} ; \\ &= R_{32} ; \\ \sum_{l=1}^3 a_{3l} a_{3l} &= R_{33} ; & a_{33} &= \sqrt{R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} ; \end{aligned}$$

и т.д. [8]

5.7.2. Моделирование процесса с экспоненциальной корреляционной функцией

Для экспоненциальной корреляционной функции $H(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ при равномерном шаге опроса $H(t_1 - t_2)$; $t_1 = nH$; $t_2 = mH$)

элементы корреляционной матрицы запишутся в виде $R_{nm} = E^{-n-m}$

где $E = e^{-\alpha H}$, $n \geq m$ Тогда для элементов матрицы преобразования $\hat{A} = \{a_{ij}\}$ получим следующие выражения

$$a_{11} = 1 ;$$

$$a_{21} = R_{21}/a_{11} = E;$$

$$a_{22} = \sqrt{1-E^2} = Q;$$

$$a_{31} = E^2;$$

$$a_{32} = (E-E^3)/Q = E(1-E^2)/Q = EQ;$$

$$a_{33} = \sqrt{1-E^4-E^2Q^2} = \sqrt{(1-E^2)(1+E^2)-E^2Q^2} = \\ = \sqrt{Q^2(1+E^2)-E^2Q^2} = Q$$

и т.д.

Моделирование отсчетов случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией сводится теперь к последовательности преобразований (5.18) следующего вида:

$$x_1 = \xi_1;$$

$$x_2 = \xi_1 E + \xi_2 Q;$$

$$x_3 = \xi_1 E^2 + \xi_2 QE + \xi_3 Q^2;$$

$$x_4 = \xi_1 E^3 + \xi_2 QE^2 + \xi_3 QE + \xi_4 Q^3;$$

.....

$$x_i = \xi_1 E^{i-1} + \xi_2 QE^{i-2} + \dots + \xi_i Q^{i-1}$$

Таким образом,

$$x_1 = \xi_1;$$

$$x_2 = x_1 E + \xi_2 Q;$$

$$x_3 = x_2 E + \xi_3 Q;$$

.....

$$x_i = x_{i-1} E + \xi_i Q$$

(5.19)

- Генератор случайных чисел по команде $RND(x)$ выдает равномерно распределенные случайные числа в интервале $[0,1]$. Числа некоррелированы, а их дисперсия равна

$$\sigma_{\xi}^2 = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2 = \int_0^1 \xi^2 d\xi - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

(т.к. $f_{\xi}(\xi) = 1$ и $\langle \xi \rangle = 1/2$)

Нам же для моделирования отсчетов x_i по формуле (5.19) нужно иметь некоррелированные отсчеты ξ_i центрированного ($\langle \xi \rangle = 0$) случайного процесса с единичной дисперсией, т.е. должно быть

$$\langle \xi_n \xi_m \rangle = \delta_{nm}$$

Преобразование

$$\xi_i = 2RND(\theta) - 1$$

моделирует отсчеты случайного процесса с нулевым средним значением

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \xi \in [-1, 1]$$

с дисперсией

$$\sigma_{\xi}^2 = \int_{-1}^1 \xi^2 f_{\xi}(\xi) d\xi = 1/3$$

т.е. $\sigma_{\xi} = 1/\sqrt{3}$.

Наконец, преобразование

$$\xi_i = \xi_i \sqrt{3}$$

моделирует отсчеты центрированного случайного процесса с единичной дисперсией ($\sigma_{\xi}^2 = 1$) что нам и было нужно.

Теперь по формуле (5.19) можно моделировать реализацию случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией.

5.7.3. Авткорреляционная функция

Полученную выборку x_1, x_2, \dots, x_N объемом N будем теперь рассматривать как N последовательных отсчетов реализации случайного процесса $x(t)$ длительностью $T = NH$ полученных в моменты времени

$$t_i = iH, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

где H - шаг опроса.

Будем считать, что процесс $x(t)$ обладает свойством эргодичности. Действительно, $x(t)$ получено линейным преобразованием стационарного случайного процесса $\xi(t)$ неразложимого на какие-либо составные процессы, т.е. эргодического. Линейное преобразование не нарушает свойство эргодичности. Числовые характеристики эргодического случайного процесса могут быть приближенно определены не как средние по множеству наблюдений, а как средние по времени t . В частности, выборочное среднее значение может

быть вычислено по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(iH).$$

Аналогично можно вычислить автокорреляционную функцию для значений $\tau = 0, H, 2H$ и т.д.

Для этого удобно предварительно "центрировать" заданную реализацию, т.е. вычесть из нее среднее значение

$$y(t) = x(t) - \bar{x}$$

Тогда выборочная автокорреляционная функция может быть вычислена по формуле

$$K_y(iH) = \frac{1}{N-i} \sum_{j=1}^{N-i} y(jH)y[(j+i)H] \quad (5.20)$$

Число слагаемых в сумме равно не N а $N-i$ так как в нашем распоряжении только $N-i$ отсчетов второго сомножителя

$$y[(j+i)H]$$

Следовательно, увеличение разнosa iH моментов времени в аргументе автокорреляционной функции сокращает объем выборки, по которой ведется усреднение. Это обстоятельство накладывает ограничение на величину разнosa

$$i \ll N \quad \text{или} \quad \tau \ll T$$

где T - время регистрации реализации процесса и интервал временного усреднения.

5.7.4. Выбор интервала временного усреднения

Итак, будем считать, что N отсчетов произведено на интервале $[0, T]$ с постоянным шагом H так что $T = N \cdot H$. Выборка объемом N характеризует реализацию случайного процесса $y(t)$ имеющего интервал корреляции $\tau_0 = 1/\alpha$

Нужно по измеренным значениям рассчитать автокорреляционную функцию

$$\langle y(t_1)y(t_2) \rangle = K_y(\tau)$$

$$\tau = t_1 - t_2 \quad \tau_i = iH, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Определим необходимый размер выборки и процедуру усреднения. В нашем распоряжении одна реализация, поэтому среднее по выборке, характеризующей ее, это фактически среднее по времени, близкое к среднему по ансамблю реализаций только в том случае, если процесс эргодичекий, а интервал усреднения достаточно велик. Как известно, интервал временного усреднения должен определяться, исходя из неравенства $T \gg \tau_0 \sigma^2$ где σ^2 - дисперсия процесса. Это значит, что длительность регистрируемой реализации должна во много раз превышать интервал корреляции. Действительно, процедура усреднения по конечной выборке значений будет давать достаточно точный результат, если число значений велико и все они статистически независимы. Статистическую независимость значений можно грубо обеспечить, выбирая отсчеты, отстоящие друг от друга на интервалы, превышающие τ_0 .

При единичной дисперсии процесса ($\sigma_y^2 = 1$) таких статистически независимых значений можно взять 50-100. Поскольку каждое значение должно отстоять от соседних во времени по крайней мере на интервал корреляции τ_0 то отсюда заключаем, что длительность реализации должна равняться $(50-100)\tau_0$.

Пусть для определенности $T = 50 \tau_0$. В то же время, чтобы достаточно точно воспроизвести форму функции корреляции, нужно на интервале корреляции иметь, как минимум, 3-4 точки. Ограничимся тремя точками, разнесенными с дискретом H . Это значит, что, к примеру, $\tau_0 = 3H$ $T = 50\tau_0 = 150H$ так что выборка должна включать в себя значения процесса $y(t)$ в 150 точках ($N = 150$).

5.7.5. Задание к работе

1. Используя функцию $RND(x)$ смоделировать реализацию случайного процесса, корреляционная функция которого имеет вид

$$K(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$$

определив ее выборкой значений объемом N

Построить графики реализаций при трех различных значениях масштаба корреляции $\tau_0 = 1/\alpha$ например, $\tau_0 = 3; 5; 7$.

Сопоставить полученные реализации и грубо оценить масштаб флуктуаций.

2. Выбрать интервал временного усреднения (объем выборки) для

расчета автокорреляционной функц. л смоделированного процесса.

3. Рассчитать автокорреляционную функцию смоделированного процесса. Построить график.

Рассчитать и указать на графике доверительный интервал. Сравнить полученные значения с теоретически ожидаемыми. Объяснить причины расхождений.

5.7.6. Форма отчета

Отчет должен содержать:

- задание к работе;
- программы моделирования случайного процесса и расчета автокорреляционной функции;
- графики реализаций случайного процесса;
- оценку интервала временного усреднения;
- графики автокорреляционной функции смоделированного процесса с указанием доверительного интервала и теоретической корреляционной функции.

5.7.7. Базовые программы

Подпрограмма (600-699) генерирует N отсчетов центрированного случайного процесса с заданной корреляционной функцией

$$K(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} = e^{-\alpha I H} \equiv R(I)$$

и заносит их в массив $Y(N)$

```
600 REM МОДЕЛИРОВАНИЕ
610 S = SQR(3) \ S1 = S * Q
620 Y(0) = 2 * RND(0) * S - S
630 FOR I=1 TO N \ Y(I) = Y(I-1) * E +
        2 * RND(0) * S1 - S1
640 PRINT "Y(" I ") = " Y(I) \ NEXT I
699 RETURN
```

Подпрограмма (700-750) вычисляет массив объемом $N1$ значений автокорреляционной функции $K(N1)$

```

700 REM АВТОКОР.
710 FOR I=0 TO N1\2 S=0\I1-N-I
720 FOR J=0 TO I1\2 S=S+Y(J)*Y(J+I)\NEXT J
730 K(I)=S/I1\NEXT I
750 RETURN
    
```

Главная программа

```

10 REM ГЛАВНАЯ ПРОГРАММА
15 DIM K(20),Y(200)
20 RANDOMIZE
30 PRINT "ОБЪЕМ ВЫБОРКИ N=",\INPUT N
35 PRINT "ШАГ H=,ВРЕМЯ КОР-ЦИИ A="\INPUT H,A
40 E=EXP(-H/A)\Q=SQR(1-E*E)
50 PRINT "ОБЪЕМ МАССИВА КОР.Ф-ЦИИ N1="\INPUT M
60 GOSUB 600\REM МОДЕЛИРОВАНИЕ
70 GOSUB 700\REM ВЫЧИСЛЕНИЕ КОР.Ф-ЦИИ
80 PRINT "ТЕОРЕТИЧ. R И ВЫБОРЧ. К КОР.Ф-ЦИИ"
85 R=1\FOR I=0 TO N1\PRINT "R(I)"="R,"K(I)"="K(I)
90 R=R*E\NEXT I
95 STOP
    
```

5.8. Спектральное представление стационарного случайного процесса

Степень корреляции и статистическая зависимость значений случайного процесса в разных сечениях, разнесенных на интервал, непосредственно связаны с представлением о некоторой средней частоте флуктуаций, которую после введения времени корреляции мож-

но рассматривать как величину, обратную \mathcal{E}_0 . Это первый шаг к рассмотрению спектрального состава случайного процесса, к анализу того, какие частоты ω в каких соотношениях преобладают в его структуре. Спектральные представления процессов играют важную роль в радиофизике, на их основе созданы физически наглядные и эффективные методы анализа детерминированных сигналов и полей. Представляется естественным расширить их на случайные процессы. Однако то обстоятельство, что амплитуды и фазы спектральных составляющих при этом оказываются случайными, вносит существенные отличия в методы и придает иной физический смысл результатам. Рассмотрим спектральное представление и свойства стационарных случайных процессов.

Пусть $\xi(t)$ - стационарный случайный процесс, наблюдаемый на отрезке времени $[0, T]$. Для удобства будем считать его центрированным $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Выделим одну его реализацию $\xi_K(t)$ и применим к ней в пределах времени T преобразование Фурье, приняв за начало отсчета времени t среднюю точку интервала

$$S_{KT}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \xi_K(t) e^{i\omega t} dt \quad \omega \in (-\infty, \infty). \quad (5.21)$$

Заметим, что обратное преобразование восстановит реализацию только на интервале наблюдения

$$\xi_K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{KT}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad t \in [-T/2, T/2],$$

а за его пределами даст нулевой результат. Функция $S_{KT}(\omega)$ - спектр одной реализации за время T . Если таким образом определить спектры всех возможных реализаций, образующих ансамбль случайного процесса $\xi(t)$ то получим множество реализаций случайного спектра $S_T(\omega)$ за время T . В совокупности этот результат представим следующей записью

$$S_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{i\omega t} dt \quad (5.22)$$

Функция $S_T(\omega)$ - комплексная случайная функция. Ее среднее значение равно

$$\langle S_T(\omega) \rangle = \left\langle \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{i\omega t} dt \right\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} \langle \xi(t) \rangle e^{i\omega t} dt$$

поскольку операции интегрирования по переменной t и усреднения по ансамблю реализаций обладают свойством аддитивности и порядок их выполнения можно менять. Для центрированного процесса $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и, следовательно, $\langle S_T(\omega) \rangle = 0$. Комплексное сопряжение случайного спектра меняет знак у переменной ω :

$$S_T^*(\omega) = S_T(-\omega).$$

Если $T \gg \tau_0$ то интеграл (5.22) можно представить суммой большого числа интегралов, статистически слабо связанных друг с другом. Для этого достаточно разбить интервал $[-T/2, T/2]$ на отрезки длиной примерно τ_0 и по каждому из них выполнить интегрирование отдельно. Следовательно, согласно центральной предельной теореме, случайный спектр является асимптотически нормальной функцией ω и его свойства в значительной степени определяются средним значением $\langle S_T(\omega) \rangle$ и функциями частотной корреляции $\langle S_T(\omega_1) S_T(\omega_2) \rangle$ и $\langle S_T(\omega_1) S_T^*(\omega_2) \rangle$

5.8.1. Корреляция спектральных составляющих процесса

Рассмотрим корреляцию двух спектральных составляющих, рассчитав значение функции

$$\langle S_T(\omega_1) S_T^*(\omega_2) \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} dt' \int_{-T/2}^{T/2} dt'' \langle \xi(t') \xi(t'') \rangle e^{i\omega_1 t' - i\omega_2 t''}$$

Если стационарный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $K(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$ то

$$\langle S_T(\omega_1) S_T^*(\omega_2) \rangle = \iint_{-T/2}^{T/2} dt' dt'' K(t' - t'') e^{i\omega_1 t' - i\omega_2 t''}$$

Перейдем к новым переменным (см. раздел 5.4.2)

$$\tau = t' - t'', \quad \lambda = t' + t''$$

Область интегрирования в плоскости (t', t'') и ее отображение на плоскость (τ, λ) показаны на рис. 5.4. После вычисления внутреннего интеграла по переменной λ получим

$$\langle \mathcal{S}_T(\omega_1) \mathcal{S}_T^*(\omega_2) \rangle = \int_{-T}^T d\tau K(\tau) e^{i \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau} \frac{\sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} (T - |\tau|)}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}$$

Если $T \gg T_0$ (а это условие, как правило, во многих задачах выполняется), то размер окрестности $|\tau| \leq T_0$ вносящей основной вклад в интеграл, относительно невелик, в ее пределах $T/T \ll 1$, и это позволяет пренебречь в подынтегральном выражении $|\tau|$ по сравнению с T а также заменить пределы интегрирования на $\pm \infty$. Обозначим

$$\delta_T(\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} T}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}} \quad (5.23)$$

Как известно [20] это один из непрерывных аналогов дельта-функции, обладающий свойством

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \delta_T(y - y_0) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \delta(y - y_0) dy = g(y_0),$$

где $g(y)$ - любая непрерывная абсолютно интегрируемая функция. Тогда

$$\langle \mathcal{S}_T(\omega_1) \mathcal{S}_T^*(\omega_2) \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\tau K(\tau) e^{i\omega_1 \tau} \delta_T(\omega_1 - \omega_2)$$

Введем в рассмотрение преобразование Фурье корреляционной функции, определяемое двойственным соотношением

$$\begin{cases} W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \\ K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega. \end{cases} \quad (5.24)$$

С учетом (5.24) корреляционная функция комплексного спектра случайного процесса за время наблюдения T равна

$$\langle \mathcal{S}_T(\omega_1) \mathcal{S}_T^*(\omega_2) \rangle = 2\pi W(\omega_1) \delta_T(\omega_1 - \omega_2). \quad (5.25)$$

Функция (5.23) имеет ярко выраженный главный максимум, ширина которого равна $\Delta\omega = 2\pi/T$ и определяет в (5.25) частотный интервал корреляции спектральных составляющих. При увеличении времени наблюдения интервал корреляции уменьшается и в пределе должен был бы обратиться в нуль. Однако предельный переход невозможен для случайного спектра $S_T(\omega)$: процесс $\xi(t)$ стационарный, дисперсия его флуктуаций с течением времени остается неизменной, так что предельное значение интеграла (5.22) не осуществляется. Однако в любой конкретной задаче всегда можно указать минимальный частотный интервал $\Delta\omega_m$ начиная с которого меньшие различия двух частот несущественны и практически считаются нулевыми. Если время наблюдения $T > 2\pi/\Delta\omega_m$ то интервал частотной корреляции становится пренебрежимо мал, и спектральные составляющие на любых двух различных частотах оказываются некоррелированными - статистически независимыми при их нормальности. В этом смысле принято говорить о дельта-коррелированности (некоррелированности на несовпадающих частотах) спектральных составляющих стационарного случайного процесса.

5.8.2. Энергетический спектр процесса

Формула (5.25) отражает замечательное свойство стационарных случайных процессов, придающее важный физический смысл преобразованию Фурье $W(\omega)$ корреляционной функции как средней спектральной плотности флуктуаций.

Рассмотрим (5.25) при совпадающих частотах $\omega_1 = \omega_2$. Из (5.23) следует, что

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \omega_2} \delta_T(\omega_1, -\omega_2) = \frac{T}{2\pi},$$

поэтому

$$\langle |S_T(\omega_1)|^2 \rangle = TW(\omega_1)$$

Напомним, что этот результат получен при условии $T \gg \tau_0$.

Средняя интенсивность спектральной составляющей $S_T(\omega)$, накопленная за время наблюдения, возрастает линейно при увеличении T . Отношение

$$\frac{1}{T} \langle |S_T(\omega)|^2 \rangle = W(\omega), \quad T \gg \tau_0 \quad (5.26)$$

остается при этом конечным и определяет $W(\omega)$ как среднюю спектр-

ральную интенсивность флуктуаций, накопленную за единичный отрезок времени, то есть спектральную плотность флуктуаций.

Этот фундаментальный результат оставляет содержание теоремы Винера-Хинчина и дает основание назвать $W(\omega)$ энергетическим спектром флуктуаций случайного процесса: энергетический спектр флуктуаций и корреляционная функция стационарного случайного процесса связаны интегральным преобразованием Фурье (5.24).

Из (5.24) и (5.26) следуют основные свойства энергетического спектра флуктуаций.

1. Значения энергетического спектра действительны и неотрицательны

$$W(\omega) \geq 0; \quad \omega \in (-\infty, \infty) \quad (5.27)$$

Это очевидно из (5.26). Но обращаясь к (5.24), мы приходим к заключению, что не всякая четная функция, достигающая абсолютного максимума при $\tau = 0$ и убывающая при $\tau \rightarrow \infty$ может считаться корреляционной. Непременным условием, которому должна удовлетворять корреляционная функция, должно быть то, что ее преобразование Фурье - функция действительная и неотрицательная. Заметим, что это соответствует свойству положительной определенности (5.4) корреляционной функции, которое для произвольной комплексной функции $g(\tau)$, определенной и квадратично интегрируемой на интервале $[-T/2, T/2]$, записывается в виде

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt' \int_{-T/2}^{T/2} dt'' g(t') K(t'-t'') g^*(t'') \geq 0 \quad (5.28)$$

2. Интеграл от энергетического спектра по всем частотам определяет интенсивность флуктуаций - дисперсию процесса

$$\sigma^2 = K(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega \quad (5.29)$$

3. Из четности корреляционной функции стационарного процесса следует четность энергетического спектра

$$W(\omega) = W(-\omega). \quad (5.30)$$

Заметим, что физический смысл имеют только положительные частоты $\omega \geq 0$. Применение показательной формы интеграла Фурье приводит к разложению спектральной плотности на две составляющих и чет-

ному продолжению энергетического спектра на отрицательные частоты. В целом спектральная плотность флуктуаций на частоте ω определяется суммой

$$W(\omega) + W(-\omega) = 2W(\omega).$$

4. Ширина энергетического спектра флуктуаций Ω_0 и интервал корреляции τ_0 связаны обратно пропорциональной зависимостью. Определим интегральный масштаб, т.е. ширину энергетического спектра флуктуаций Ω_0 стационарного случайного процесса как основание прямоугольника, высота которого равна максимальному значению спектра $W(\omega_0)$, достигаемому в точке ω_0 а площадь равна площади фигуры, ограниченной кривой $W(\omega)$ при $\omega \geq 0$ и осью $O\omega$

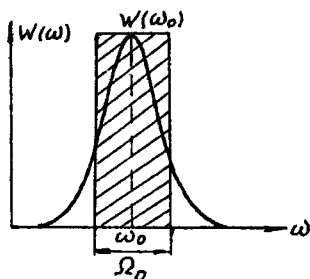


Рис. 5.5

(рис. 5.6):

$$\Omega_0 = \frac{\int_0^{\infty} W(\omega) d\omega}{W(\omega_0)} = \frac{\pi \sigma^2}{W(\omega_0)} \quad (5.31)$$

Здесь учтено равенство (5.29). Примем определение (5.5) интервала корреляции τ_0 и, учитывая определение (5.24) энергетического спектра, запишем

$$\tau_0 = \frac{W(0)}{2\sigma^2}; \quad (5.32)$$

теперь очевидно, что

$$\Omega_0 \tau_0 = \frac{\pi}{2} \frac{W(0)}{W(\omega_0)} = const. \quad (5.33)$$

Если энергетический спектр флуктуаций сосредоточен в области низких частот и достигает максимального значения в точке $\omega = 0$, то $\Omega_0 \tau_0 = \pi/2$. Значение константы в правой части (5.33) зависит от принятого определения масштабов Ω_0 и τ_0 и от формы энергетического спектра. Но обратная пропорциональность Ω_0 и τ_0 вытекает из общих свойств преобразования Фурье (5.24), то есть чем "шире" спектр, тем "уже" корреляционная функция.

В заключение рассмотрим стационарный случайный процесс с отличием от нуля средним значением. Представляя его в виде суммы регулярной составляющей $\langle \xi(t) \rangle$ и флуктуационной добавки

$$\delta \xi(t) = \xi(t) - \langle \xi(t) \rangle,$$

вычислим начальный момент второго порядка

$$\langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = \langle \xi \rangle^2 + K_{\xi}(t_1 - t_2) = m_2(t_1 - t_2).$$

Применим преобразование Фурье по переменной $\tau = t_1 - t_2$ в результате получим полный энергетический спектр процесса

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_2(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \langle \xi \rangle^2 \delta(\omega) + W_{\xi}(\omega). \quad (5.34)$$

где первое слагаемое включает дельта-функцию и, таким образом, описывает дискретную линию энергетического спектра процесса на нулевой частоте, соответствующую регулярной составляющей, а второе слагаемое - энергетический спектр флуктуаций, связанный по теореме Винера-Хинчина с функцией корреляции $K_{\xi}(\tau)$.

5.9. Линейные преобразования стационарного случайного процесса

Шумовые помехи, накладываясь на полезный сигнал, подвергаются вместе с ним преобразованиям в устройствах различной сложности. В наиболее простых случаях это, например, линейное усиление сигнала, дифференцирование или интегрирование. Названные преобразования относятся к классу линейных, которые в общем случае описываются линейными дифференциальными или интегральными уравнениями. На практике преобразования, осуществляемые многими системами, можно рассматривать как линейные или при определенных условиях допускающие линеаризацию.

5.9.1. Производная случайного процесса

Для стационарного случайного процесса, корреляционная функция которого зависит лишь от разности аргументов, условия непрерывности и дифференцируемости в среднеквадратическом (см. раздел 2.9) сводятся к непрерывности и дифференцируемости функции одного аргумента - $K_{\xi}(\tau)$ в точке $\tau = 0$; для существования производной порядка n необходимо и достаточно существования производной корреляционной функции $K_{\xi}^{(2n)}(\tau)$ при $\tau = 0$. Дифференцируемость стационарного процесса $\xi(t)$ в какой-либо одной точке, очевидно,

означает его дифференцируемость при любых значениях t

Среднее значение производной стационарного процесса равно нулю

$$\langle \xi'(t) \rangle = \frac{d \langle \xi \rangle}{dt} = 0. \quad (5.35)$$

Корреляционная функция производной, согласно (2.37), равна

$$K_{\xi'}(\tau) = -K_{\xi}''(\tau), \quad (5.36)$$

дисперсия

$$\sigma_{\xi'}^2(\tau) = -K_{\xi}''(0). \quad (5.37)$$

В совпадающие моменты времени стационарный процесс и его производная некоррелированы

$$K_{\xi \xi'}(\tau) \Big|_{\tau=0} = - \frac{d}{d\tau} K_{\xi}(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (5.38)$$

Энергетические спектры производной $\xi'(t)$ и исходного процесса $\xi(t)$ связаны соотношением

$$W_{\xi'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}''(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \omega^2 W_{\xi}(\omega). \quad (5.39)$$

Поскольку дисперсия производной, как следует из (5.39), может быть представлена интегралом

$$\sigma_{\xi'}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_{\xi}(\omega) d\omega \quad (5.40)$$

то для дифференцируемого процесса спектральная плотность $W_{\xi}(\omega)$ должна убывать при высоких частотах быстрее, чем ω^{-3} ; в противном случае процесс будет недифференцируемым.

В заключение отметим, что дифференцирование процесса не нарушает его стационарности.

5.9.2. Линейная инерционная система

Пусть линейная система, параметры которой не меняются во времени, осуществляет преобразование входного случайного процесса $\xi(t)$ описываемое линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L} \zeta(t) = \xi(t),$$

где L - соответствующий дифференциальный оператор. Это уравнение при заданных начальных условиях определяет краевую задачу, решение которой $Z(t)$ описывает процесс на выходе системы. Если сформулировать вспомогательную краевую задачу для уравнения

$$L h(t) = \delta(t)$$

при тех же начальных условиях и найти ее решение $h(t)$, которое в теории дифференциальных уравнений называется функцией Грина, то процесс $Z(t)$ после преобразования может быть определен интегралом

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t') \xi(t') dt' \quad (5.41)$$

Функцию Грина $h(t)$ называют также откликом системы на мгновенное импульсное воздействие или импульсной переходной функцией. Отклик системы в соответствии с принципом причинности не может возникнуть раньше момента $t = 0$, в который на вход системы поступает импульсный сигнал, поэтому $h(t) = 0$ при $t < 0$ и формулу (5.41) можно записать в виде

$$Z(t) = \int_{-\infty}^t h(t-t') \xi(t') dt'$$

Назовем частотной характеристикой системы или передаточной функцией преобразование Фурье ее отклика на δ -импульс

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{i\omega t} dt \quad (5.42)$$

Отметим два свойства частотной характеристики. Во-первых, поскольку отклик $h(t)$ - функция действительная, то

$$H(\omega) = H^*(-\omega). \quad (5.43)$$

Во-вторых, $h(t) = 0$ при $t < 0$ а это значит, что

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{i\omega t} dt$$

есть функция аналитическая в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega > C[20]$, где C выбирается с таким расчетом, чтобы прямая $\text{Im } \omega = C$ в плоскости комплексной переменной ω проходила выше всех особых точек частотной характеристики $H(\omega)$. При этом обратное преобразование Фурье имеет вид

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{ic' - \infty}^{ic' + \infty} H(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (5.44)$$

где $c' > c$ [20].

5.9.3. Энергетические характеристики процесса после линейного инерционного преобразования

Среднее значение процесса $\zeta(t)$ (5.41) на выходе линейной инерционной системы определяется интегралом вида (2.39), который при преобразовании стационарного процесса $\xi(t)$ системой с постоянными параметрами равен некоторой постоянной величине

$$\langle \zeta \rangle = \langle \xi \rangle \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \quad (5.45)$$

Корреляционная функция $K_{\zeta}(t_1, t_2)$ для этого случая определяется интегралом (2.41), в котором функция $h(t_1, t_2)$ имеет смысл импульсной переходной функции и зависит от разности переменных $t_1 - t_2$

$$K_{\zeta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' h(t_1 - t') h(t_2 - t'') K_{\xi}(t' - t'')$$

Сделаем замену переменных интегрирования $t_1 - t' = \tau'$, $t_2 - t'' = \tau''$ и преобразуем интеграл к виду

$$K_{\zeta}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') h(\tau'') K_{\xi}(t_1 - t_2 - \tau' + \tau'') d\tau' d\tau'' = K_{\zeta}(t_1 - t_2). \quad (5.46)$$

Формулы (5.45) и (5.46) показывают, что стационарный случайный процесс в широком смысле преобразуется системой с постоянными параметрами также в стационарный в широком смысле процесс.

Учитывая определение (5.42) частотной характеристики системы, запишем (5.45) в следующем виде:

$$\langle \zeta \rangle = H(0) \langle \xi \rangle \quad (5.47)$$

Заметим, что согласно (5.43) значение $H(0)$ является действительным. Это соответствует определению $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ как действительных процессов.

Преобразование Фурье $K_{\zeta}(t_1 - t_2)$ по переменной $\tau = t_1 - t_2$

определяет энергетический спектр выходного процесса

$$W_{\zeta}(\omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\tau') h(\tau'') d\tau' d\tau'' W_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau' - i\omega\tau''} = |H(\omega)|^2 W_{\xi}(\omega). \quad (5.48)$$

Модуль частотной характеристики $|H(\omega)|$ называют амплитудно-частотной характеристикой системы. Придавая различные "веса" спектральным составляющим сигнала, она характеризует частотную избирательность системы и определяет ее полосу пропускания. Введем понятие эффективной ширины полосы пропускания системы. Пусть $|H(\omega_m)|$ максимальное значение амплитудно-частотной характеристики. Построим прямоугольник высотой $|H(\omega_m)|^2$ и шириной Ω_c , такой, что

$$|H(\omega_m)|^2 \Omega_c = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

и интегральный масштаб

$$\Omega_c = \frac{2 \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{|H(\omega_m)|^2} \quad (5.49)$$

примем за эффективную ширину полосы пропускания. Данное определение, очевидно, аналогично определению интегрального масштаба энергетического спектра случайного процесса (см. 5.8.2.)

Пусть интегральный масштаб Ω_0 энергетического спектра $W_{\xi}(\omega)$ входного процесса значительно превышает ширину полосы пропускания системы Ω_c т.е. $\Omega_0 \gg \Omega_c$, так что в пределах полосы пропускания энергетический спектр $W_{\xi}(\omega)$ можно считать практически неизменным и равным $W_{\xi}(\omega) = W_0$. Такое упрощение приводит нас к задаче о преобразовании линейной инерционной системой белого шума с энергетическим спектром W_0 и, соответственно, функцией корреляции $W_0 \delta(\tau)$. В этом случае (5.48) принимает вид

$$W_{\zeta}(\omega) = |H(\omega)|^2 W_0,$$

т.е. энергетический спектр процесса на выходе линейной системы, когда на ее вход поступает белый шум, с точностью до постоянного множителя совпадает с квадратом амплитудно-частотной характеристики системы. Интересен также результат вычисления функции взаимной корреляции белого шума $\xi(t)$ поступающего на вход системы, и выходного процесса $\zeta(t)$

$$K_{z\bar{z}}(t_1, t_2) = W_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - t') \delta'(t' - t_2) dt' = W_0 h(t_1 - t_2).$$

то есть функция взаимной корреляции с точностью до постоянного множителя совпадает с импульсной переходной функцией системы.

Отметим еще одно замечательное свойство инерционной системы. Если на вход узкополосного низкочастотного фильтра поступает широкополосный случайный процесс; то процесс на выходе фильтра всегда имеет тенденцию к нормализации. Это положение является прямым следствием центральной предельной теоремы. Действительно, если $\Omega_0 \gg \Omega_c$ то, соответственно, длительность отклика системы на мгновенное импульсное воздействие

$$\tau_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau) d\tau}{h_{max}^2}, \quad \text{где } h_{max}^2 = \max h^2(\tau), \quad (5.50)$$

во много раз превышает интервал корреляции входного процесса $\tau_c \gg \tau_0$. Это значит, что отклики системы на случайные флуктуации входного процесса, разнесенные во времени больше, чем на τ_0 и поэтому практически независимые, будут накладываться друг на друга. Чем больше τ_c по сравнению с τ_0 тем больше в каждый момент времени будет суммироваться в выходном процессе независимых откликов, то есть тем ближе будут условия формирования выходного сигнала к предельным условиям центральной предельной теоремы.

5.9.4. Стационарный узкополосный процесс

Рассмотрим линейную систему с ограниченной полосой пропускания и с ограниченной длительностью отклика на мгновенное импульсное воздействие. Если ширина полосы пропускания Ω_c (5.49) и средняя частота полосы ω_0 находятся в соотношении $\omega_0 \gg \Omega_c$ то линейную систему называют узкополосной. Выберем Δ ограниченное по величине неравенствами $\omega_0 \gg \Delta > \Omega_c$ и такое, чтобы за пределами интервала $(\omega_0 - \Delta, \omega_0 + \Delta)$ частотная характеристика си-

семы была практически равной нулю в области положительных частот и, соответственно, была пренебрежимо малой за пределами интервала $(-\omega_0 - \Delta, -\omega_0 + \Delta)$ на отрицательной частотной полуоси. Длительность отклика системы τ_c (5.50) ограничим неравенством $T \gg \tau_c$ считая, что по прошествии времени T от момента воздействия на систему возбуждавшиеся в ней колебания полностью затухнут. Для такой системы выходной сигнал (5.41) в соответствии с принципом причинности ($h(\tau) = 0$ при $\tau < 0$) представляется интегралом

$$z(t) = \int_{t-T}^t h(t-t') \xi(t') dt' \quad (5.51)$$

Воспользуемся спектральным представлением (5.44) импульсной переходной функции

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega H(\omega) e^{-i\omega t} \int_{t-T}^t \xi(t') e^{i\omega t'} dt',$$

обозначим

$$s_T(\omega; t) = \int_{t-T}^t \xi(t') e^{i\omega t'} dt'$$

и учтем ограниченность полосы пропускания линейной системы. В результате получим

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\omega_0 - \Delta}^{-\omega_0 + \Delta} + \int_{\omega_0 - \Delta}^{\omega_0 + \Delta} \right\} H(\omega) s_T(\omega; t) e^{-i\omega t} d\omega$$

Как частотная характеристика системы $H(\omega)$; так и случайный комплексный спектр $s_T(\omega; t)$ входного процесса обладают свойством (5.43), то есть

$$H(-\omega) = H^*(\omega), \quad s_T(-\omega; t) = s_T^*(\omega; t),$$

поэтому интеграл несложно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} z(t) &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} H(\omega_0 + \Omega) s_T(\omega_0 + \Omega; t) e^{-i\Omega t} d\Omega e^{-i\omega_0 t} \\ &= \operatorname{Re} z(t) e^{-i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где $z(t)$ - медленно меняющаяся функция. Отсюда следует два возможных представления. С одной стороны,

$$z(t) = |z(t)| \cos(\omega_0 t - \alpha(t)), \quad z(t) = |z(t)| e^{i\alpha(t)}, \quad (5.53)$$

где $|z(t)|$ и $\alpha(t)$ - медленно меняющиеся амплитуда и фаза случайного процесса, а с другой стороны,

$$z(t) = a(t) \cos \omega_0 t + b(t) \sin \omega_0 t \quad (5.54)$$

где

$$a(t) = \text{Re } z(t) = |z(t)| \cos \alpha(t);$$

$$b(t) = \text{Im } z(t) = |z(t)| \sin \alpha(t)$$

- случайные квадратурные составляющие.

Представления (5.53) и (5.54) указывают на близость узкополосного процесса к гармоническому колебанию и объясняют другое его название - квазигармонический процесс.

Пусть $\xi(t)$ - стационарный центрированный процесс. В этом случае $z(t)$ - тоже стационарный процесс с нулевым средним значением $\langle z(t) \rangle = 0$, и как следует из (5.54), $\langle a(t) \rangle = \langle b(t) \rangle = 0$.

Специфическую форму имеет функция корреляции $K_z(\tau)$ которой привычно исследуют с частотой ω_0 . Вычислим преобразование Фурье энергетического спектра (5.48), учитывая вначале четность $W_z(\omega)$

$$K_z(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_z(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

а затем ограничить его ширины

$$K_z(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} W_z(\omega_0 + \Omega) \cos(\omega_0 + \Omega) \tau d\Omega$$

и представим корреляционную функцию в виде

$$K_z(\tau) = k_1(\tau) \cos \omega_0 \tau + k_2(\tau) \sin \omega_0 \tau, \quad (5.55)$$

где $k_1(\tau)$ и $k_2(\tau)$ - медленно меняющиеся функции

$$k_1(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} W_z(\omega_0 + \Omega) \cos \Omega \tau d\Omega;$$

$$k_2(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} W_{\zeta}(\omega_0 + \Omega) \sin \Omega \tau d\Omega$$

Сопоставим функции $k_1(\tau)$ и $k_2(\tau)$ с корреляционными функциями квадратурных компонент. Для этого воспользуемся представлением (5.54) и запишем

$$K_{\zeta}(t_1, t_2) = \langle [a(t_1) \cos \omega_0 t_1 + b(t_1) \sin \omega_0 t_1] [a(t_2) \sin \omega_0 t_2 + b(t_2) \sin \omega_0 t_2] \rangle$$

Перемножив выражения в скобках и почленно усреднив результат, сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$K_{\zeta}(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ [K_a(\tau) + K_b(\tau)] \cos \omega_0 \tau + [K_{ab}(-\tau) - K_{ab}(\tau)] \sin \omega_0 \tau + [K_a(\tau) - K_b(\tau)] \cos \omega_0 \tau + [K_{ab}(-\tau) + K_{ab}(\tau)] \sin \omega_0 \tau \right\},$$

где $\tau = t_1 - t_2$ $\chi = t_1 + t_2$ $K_a(\tau)$ и $K_b(\tau)$ - функции корреляции квадратурных компонент $a(t)$ и $b(t)$ $K_{ab}(\tau)$ - функция χ взаимной корреляции. Поскольку $K_{\zeta}(\tau)$ не зависит от χ то

$$K_a(\tau) = K_b(\tau); K_{ab}(-\tau) = -K_{ab}(\tau)$$

Дальнейшее сопоставление с (5.55) полностью определяет эти функции

$$K_a(\tau) = K_b(\tau) = k_1(\tau); K_{ab}(\tau) = -k_2(\tau)$$

и вместе с тем придает $k_1(\tau)$ четкий смысл функции корреляции квадратурных компонент, а $k_2(\tau)$ - функции взаимной корреляции квадратурных составляющих. Как следствие этого результата укажем, что дисперсии квадратурных компонент одинаковы и равны дисперсии процесса $\zeta(t)$

$$K_{\zeta}(0) = \sigma_{\zeta}^2 = k_1(0) = \sigma_a^2 = \sigma_b^2,$$

а поскольку $k_2(0) = 0$, то в совпадающие моменты времени квадратурные составляющие некоррелированы.

5.9.5. Взаимная корреляция шумов на выходе двух линейных систем

Рассмотрим случай, когда стационарный случайный процесс $\xi(t)$

поступает одновременно на вход двух линейных систем, импульсные переходные функции которых есть $h_1(\tau)$ и $h_2(\tau)$. Случайные процессы, получаемые на выходах этих систем, будут описываться следующими выражениями

$$\zeta_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-t') d\xi(t'), \quad \zeta_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t-t') d\xi(t').$$

Вычислим функцию взаимной корреляции этих двух процессов, представив ее аналогично (5.46)

$$K_{\zeta_1, \zeta_2}(t_1 - t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau') h_2(\tau'') K_{\xi}(t_1 - t_2 - \tau' + \tau'') d\tau' d\tau''$$

Применяя теорему о свертке интегрального преобразования Фурье, получим

$$K_{\zeta_1, \zeta_2}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega) H_2^*(\omega) W_{\xi}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad \tau = t_1 - t_2$$

Очевидно, если полосы пропускания двух систем не перекрываются, то интеграл равен нулю и процессы $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ оказываются некоррелированными. Степень корреляции процессов будет зависеть от степени перекрытия частотных характеристик системы. Заметим, что если процесс $\xi(t)$ нормальный, то нормальными будут также процессы $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$, и их некоррелированность на выходе систем с неперекрывающимися частотными характеристиками будет означать их статистическую независимость.

5.10. Нелинейные безинерционные преобразования стационарного процесса

Сигнал $\zeta(t)$ на выходе безинерционной системы в какой-либо момент времени t полностью определяется входным сигналом $\xi(t)$ в тот же момент, то есть преобразование является функциональным

$$\zeta(t) = g[\xi(t)]$$

и описывается детерминированной функцией $g(x)$ (см. раздел 3).

Реальные нелинейные преобразования в различных системах радиотехники и радиофизики являются инерционными, но в ряде задач при приближенном описании выходных процессов задержкой и длительно-

стью отклика системы на мгновенное импульсное воздействие можно пренебречь; часто приемлемым оказывается представление нелинейного инерционного преобразования как последовательно осуществляемых нелинейного безынерционного и линейного инерционного преобразований.

В нелинейных системах происходит существенное изменение законов распределения флуктуаций. Представление об этом дают функциональные преобразования, рассмотренные в разделе 3. Здесь мы рассмотрим преобразования спектров и корреляционных функций, при этом будем считать, что случайный процесс имеет ограниченный по ширине энергетический спектр флуктуаций.

Нелинейное безынерционное преобразование узкополосного случайного процесса разделяет его энергетический спектр по последовательности спектральных полос, которые расположены в области низких частот (видеочастот), около средней частоты ω_0 и в высокочастотных областях около гармоник, частоты которых кратны ω_0 . Интенсивность флуктуаций, соответствующая каждой полосе, существенно зависит от вида характеристики нелинейного элемента $\zeta = g(\varepsilon)$. Покажем это на примере нелинейного безынерционного преобразования нормального случайного процесса.

5.10.1. Функция корреляции преобразованного процесса

Чтобы установить соотношение между энергетическим спектром процесса на входе преобразователя и энергетическим спектром процесса на выходе, разложим $K_{\zeta}(\tau)$ в ряд по степеням корреляционной функции $K_{\varepsilon}(\tau)$, $\tau = t_1 - t_2$. После этого

$$\langle \zeta(t_1) \zeta(t_2) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon_1) g(\varepsilon_2) f(\varepsilon_1, \varepsilon_2; \tau) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2$$

то для этого нужно разложить в ряд по степеням $K_{\varepsilon}(\tau)$ плотность вероятности $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2; \tau)$, для которой $K_{\varepsilon}(\tau)$ является кумулянтном второго порядка. Вычислим производную

$$\frac{\partial f(\varepsilon_1, \varepsilon_2; \tau)}{\partial K_{\varepsilon}(\tau)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_{\varepsilon}(\mu_1, \mu_2; \tau)}{\partial K_{\varepsilon}(\tau)} e^{-i\mu_1 \varepsilon_1 - i\mu_2 \varepsilon_2} d\mu_1 d\mu_2$$

воспользовавшись кумулянтным разложением логарифма характери-

ческой функции $\varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2, \tau)$ (см. раздел 2.6)

$$\frac{\partial f(\xi_1, \xi_2; \tau)}{\partial K_{\xi}(\tau)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} (i\mu_1)(i\mu_2) \varphi_{\xi}(\mu_1, \mu_2; \tau) e^{-i\mu_1 \xi_1 - i\mu_2 \xi_2} d\mu_1 d\mu_2.$$

Если операции, выполненные нами формально, возможны, то

$$\frac{\partial f(\xi_1, \xi_2, \tau)}{\partial K_{\xi}(\tau)} = \frac{\partial^2 f(\xi_1, \xi_2, \tau)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}$$

причем это равенство легко обобщается на случай производной порядка n

$$\frac{\partial^n f(\xi_1, \xi_2, \tau)}{\partial K_{\xi}^n(\tau)} = \frac{\partial^{2n} f(\xi_1, \xi_2; \tau)}{\partial \xi_1^n \partial \xi_2^n}$$

Но тогда

$$\frac{\partial^n \langle \zeta(t_1) \zeta(t_2) \rangle}{\partial K_{\xi}^n(\tau)} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1) g(\xi_2) \frac{\partial^{2n} f(\xi_1, \xi_2; \tau)}{\partial \xi_1^n \partial \xi_2^n} d\xi_1 d\xi_2,$$

и если выполнять интегрирование по частям, то получим соотношения, связывающие корреляционные функции входного и выходного процессов и характеристику нелинейного элемента [3 4]

$$\frac{\partial^n K_{\zeta}(\tau)}{\partial K_{\xi}^n(\tau)} = \left\langle \frac{d^n g(\xi_1)}{d\xi_1^n} \frac{d^n g(\xi_2)}{d\xi_2^n} \right\rangle = \langle g^{(n)}(\xi_1) g^{(n)}(\xi_2) \rangle. \quad (5.56)$$

Соотношение (5.56) справедливо для любого вероятностного распределения входного случайного процесса. Воспользуемся им и построим степенной ряд для $K_{\zeta}(\tau)$

$$K_{\zeta}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle g^{(n)}[\xi(t_1)] g^{(n)}[\xi(t_2)] \rangle}{n!} \Bigg|_{K_{\xi}(\tau)=0} K_{\xi}^n(\tau)$$

В общем случае коэффициенты ряда зависят от временного параметра τ который входит в них через кумулянтные функции высоких порядков. Если же входной процесс нормальный, то по свойству этого предельного распределения кумулянтные функции порядка выше 2 равны нулю тождественно при любых τ , поэтому условие $K_{\xi}(\tau) = 0$ означает в этом случае, что все коэффициенты постоянны. Кроме того, для нормального процесса некоррелированность $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ означает статистическую независимость $g^{(n)}[\xi(t_1)]$ и $g^{(n)}[\xi(t_2)]$. В ре-

зультате

$$K_z(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g^{(n)}(\xi) \rangle^2}{n!} K_{\xi}^{(n)}(\tau) \quad (5.57)$$

5.10.2. Энергетический спектр процесса на выходе нелинейного элемента

Преобразование Фурье корреляционной функции (5.57) определяет энергетический спектр флуктуаций процесса на выходе нелинейного элемента

$$W_z(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g^{(n)}(\xi) \rangle^2}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\omega - \omega_{n-1}) d\omega_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\omega_{n-1} - \omega_{n-2}) d\omega_{n-2} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\omega_2 - \omega_1) d\omega_1 W_{\xi}(\omega_1) \quad (5.58)$$

Рассмотрим последовательно вклад каждого члена разложения. Предположим, что энергетический спектр флуктуаций $W_{\xi}(\omega)$ до нелинейного преобразования отличен от нуля в интервале частот $(\omega_0 - \Delta, \omega_0 + \Delta)$ на положительной полуоси $\omega > 0$ и соответственно в интервале $(-\omega_0 - \Delta, -\omega_0 + \Delta)$ при $\omega < 0$ причем $\omega_0 \gg \Delta$

Первое слагаемое в (5.58) повторяет спектр $W_{\xi}(\omega)$ с весовым коэффициентом $\langle g'(\xi) \rangle^2$ заполняя полосы частот $|\omega - \omega_0| \leq \Delta$ $|\omega + \omega_0| \leq \Delta$

Второе слагаемое

$$\frac{\langle g''(\xi) \rangle^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\omega - \omega_1) d\omega_1 W_{\xi}(\omega_1)$$

не равно нулю, если перекрываются полосы спектров $W_{\xi}(\omega - \omega_1)$ и $W_{\xi}(\omega_1)$. Запишем условие $\omega_0 - \Delta \leq \omega - \omega_1 \leq \omega_0 + \Delta$ при котором $W_{\xi}(\omega - \omega_1) \neq 0$, в форме

$$\omega_1 + \omega_0 - \Delta \leq \omega \leq \omega_1 + \omega_0 + \Delta$$

и рассмотрим его при $-\omega_0 - \Delta \leq \omega_1 \leq -\omega_0 + \Delta$ когда $W_{\xi}(\omega_1) \neq 0$. В результате приходим к выводу, что интеграл отличен от нуля в области низких частот

$$-2\Delta \leq \omega \leq 2\Delta$$

То же условие при $\omega_0 - \Delta \leq \omega_1 \leq \omega_0 + \Delta$ показывает, что интеграл также не равен нулю в полосе

$$2\omega_0 - 2\Delta \leq \omega \leq 2\omega_0 + 2\Delta,$$

симметричной относительно второй гармоники несущей частоты ω_0 . Условие перекрытия второй полосы $-\omega_0 - \Delta \leq \omega - \omega_1 \leq -\omega_0 + \Delta$ спектра $W'_\xi(\omega - \omega_1)$ с двумя полосами спектра $W'_\xi(\omega_1)$ дополняет выделенные интервалы третьим, симметричным относительно $(-2\omega_0)$

$$-2\omega_0 - 2\Delta \leq \omega \leq -2\omega_0 + 2\Delta$$

Аналогичный анализ третьего слагаемого

$$\frac{\langle \varrho'''(\xi) \rangle^2 \int_{-\infty}^{\infty} W'_\xi(\omega - \omega_2) d\omega_2 \int_{-\infty}^{\infty} W'_\xi(\omega_2 - \omega_1) d\omega_1 W'_\xi(\omega_1)}$$

показывает, что оно вносит вклад в частотные полосы, симметричные относительно несущей частоты $\pm \omega_0$ и третьей гармоники $\pm 3\omega_0$, то есть при $\omega > 0$

$$\omega_0 - 3\Delta \leq \omega \leq \omega_0 + 3\Delta \quad \text{и} \quad 3\omega_0 - 3\Delta \leq \omega \leq 3\omega_0 + 3\Delta.$$

и, соответственно, при $\omega < 0$

$$-\omega_0 - 3\Delta \leq \omega \leq -\omega_0 + 3\Delta, \quad -3\omega_0 - 3\Delta \leq \omega \leq -3\omega_0 + 3\Delta$$

Четвертое слагаемое заполняет полосы в окрестности нулевой частоты, второй ($\pm 2\omega_0$) и четвертой ($\pm 4\omega_0$) гармоник и так далее. В целом энергетический спектр $W'_Z(\omega)$ преобразованного процесса

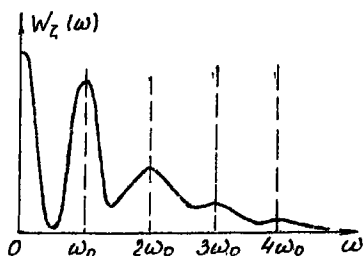


Рис. 5.6

оказывается распределенным по последовательности полос, средние частоты которых совпадают с гармониками ($\pm n\omega_0$) несущей частоты (рис. 5.6). Используя полосовые фильтры, можно выделить нужную гармонику и соответствующие ей флуктуации, однако с ростом номера n ширина полос увеличивается и на высоких частотах они перекрываются. Спектральная интенсивность

флуктуаций в каждой из полос определяется как распределением про-

процесса на входе нелинейного элемента, так и формой его характеристики.

Энергетический спектр флуктуаций $W_z(\omega)$ являющийся преобразованием Фурье корреляционной функции $K_z(\tau)$ при нелинейном преобразовании дополняется спектральной линией постоянной составляющей $\langle z_1(t) \rangle^2$ на нулевой частоте

$$\langle g(\xi) \rangle^2 \delta(\omega)$$

интенсивность которой отлична от нуля даже в том случае, когда на вход нелинейного элемента поступает только шумовой сигнал.

5.10.3. Корреляционная функция и энергетический спектр процесса на выходе квадратичного детектора

Разложение (5.57) для корреляционной функции выходного процесса содержит конечное число членов, если характеристика нелинейного элемента описывается полиномом

$$z_1(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi(t) + \alpha_2 \xi^2(t) + \dots + \alpha_n \xi^n(t).$$

Наиболее простым примером такого элемента является идеальный квадратичный детектор, осуществляющий преобразование

$$z_1(t) = \alpha \xi^2(t) :$$

Если $\xi(t)$ - нормальный случайный процесс с нулевым средним значением $\langle \xi(t) \rangle = 0$, дисперсией $\langle \xi^2(t) \rangle = \sigma^2$ энергетический спектр которого $W_\xi(\omega)$ отличен от нуля в полосе $|\omega - \omega_0| \leq \Delta$ то

$$\langle g'(\xi) \rangle = 0, \quad \langle g''(\xi) \rangle = 2\alpha,$$

а все последующие коэффициенты разложения (5.57) равны нулю. В результате

$$K_z(\tau) = 2\alpha^2 K_\xi^2(\tau) ;$$

$$W_z(\omega) = 2\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(\omega - \omega_1) d\omega_1 W_\xi(\omega),$$

и полный энергетический спектр преобразованного сигнала

$$V_z(\omega) = 2\alpha^2 \delta(\omega) + W_z(\omega)$$

содержит дискретную линию на нулевой частоте и непрерывный спектр флуктуаций в окрестности нулевой частоты $|\omega| \leq 2\Delta$ и второй гармоники $|\omega \pm 2\omega_0| \leq 2\Delta$

Учитывая (5.55), представим корреляционную функцию узкополосного процесса $\xi(t)$ в виде $K_\xi(\tau) = k(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \varphi(\tau)]$ тогда $K'_\xi(\tau) = a^2 k^2(\tau) \{1 + \cos 2[\omega_0 \tau + \varphi(\tau)]\}$, и становится явным разделение корреляционной функции преобразованного процесса на медленно меняющуюся часть, энергетический спектр которой сосредоточен в области низких частот, и быстро осциллирующую составляющую, спектр которой отличен от нуля вблизи второй гармоники. Заметим, что функция $a^2 k^2(\tau)$ с точностью до коэффициента совпадает с корреляционной функцией квадрата огибающей узкополосного случайного процесса $\xi_c(t)$ [1-4]

5.10.4. Корреляционная функция и энергетический спектр процесса на выходе линейного детектора

Рассмотрим преобразование

$$\zeta(t) = a |\xi(t)|$$

при котором характеристика нелинейного элемента $g(\xi) = |\xi|$ не является дифференцируемой в обычном смысле при $\xi = 0$. Тем не менее, разложение (5.57) для нормального процесса $\xi(t)$ остается справедливым, если дифференцирование $g(\xi)$ понимать в смысле теории обобщенных функций. Пусть $\langle \xi(t) \rangle = 0$, энергетический спектр $W_\xi(\omega)$ ограничен по ширине полосой $|\omega \mp \omega_0| \leq \Delta$ и дисперсия процесса равна σ^2 . Вычислим коэффициенты разложения:

$$\langle g'(\xi) \rangle = \langle a \operatorname{sgn} \xi \rangle = 0$$

- здесь равенство нулю объясняется симметрией нормального распределения относительно нулевого среднего значения и нечетностью функции $\operatorname{sgn} \xi$;

$$\langle g''(\xi) \rangle = \langle 2a \delta'(\xi) \rangle = 2a f'_\xi(0) = 2a / \sqrt{2\pi} \sigma;$$

$$\langle g'''(\xi) \rangle = \langle 2a \delta''(\xi) \rangle = -2a f''_\xi(0) = 0;$$

$$\langle g^{(4)}(\xi) \rangle = \langle 2a \delta^{(4)}(\xi) \rangle = 2a f^{(4)}_\xi(0) = -2a / \sqrt{2\pi} \sigma^3 \text{ и т.д.}$$

Подставляя вычисленные значения в (5.57), запишем первые члены

разложения для корреляционной функции процесса

$$R_{\xi}(\tau) = \frac{(2\sigma)^2}{\pi} R_{\xi}^2(\tau) \left[1 + \frac{R_{\xi}^2(\tau)}{12} + \dots \right], \quad (5.59)$$

где $R_{\xi}(\tau)$ - коэффициент корреляции входного процесса. Энергетический спектр флуктуаций преобразованного процесса распределен по частотным интервалам, соответствующим четным гармоникам ($\pm 2n\omega_0$) несущей частоты. Постоянная составляющая представлена линией $(2\sigma^2/\pi) \delta(\omega)$ на нулевой частоте. Если после детектирования процесса применить линейную фильтрацию низких частот, подавляя быстрые осцилляции, то выделится огибающая узкополосного сигнала $\xi(t)$. Ее корреляционную функцию можно получить с точностью до постоянного множителя из выражения (5.59), подставляя в него коэффициент корреляции $R_{\xi}(\tau)$ в форме

$$R_{\xi}(\tau) = \gamma(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \varphi(\tau)]$$

и выделяя затем медленно меняющуюся функцию, которая имеет вид

$$\frac{(2\sigma)^2}{2\pi} \gamma^2(\tau) \left[1 + \frac{\gamma^2(\tau)}{32} + \dots \right]$$

Соответствующий этой функции спектр определяет форму энергетического спектра флуктуаций огибающей входного процесса.

5.10.5. Распределение огибающей узкополосного нормального процесса

Приведенные примеры линейного и квадратичного детектирования дополним задачей о распределении огибающей нормального узкополосного процесса. Фактически эта задача решена в разделе 3.5, где получено распределение модуля и фазы вектора с независимыми нормальными компонентами. Остается лишь показать, что результат применим к стационарному квазигармоническому сигналу.

Представим узкополосный нормальный процесс в виде (5.54)

$$\xi(t) = a(t) \cos \omega_0 t + b(t) \sin \omega_0 t,$$

где $a(t)$ и $b(t)$ - случайные квадратурные составляющие, распределенные нормально. Как показано в 5.9.4, в совпадающие моменты времени они некоррелированы и, следовательно, статистически не-

зависимы; дисперсии их одинаковы. Квадратурные составляющие в каждый момент времени определяют амплитуду

$$A(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$$

и фазу

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = b(t)/a(t)$$

квазигармонического колебания

$$\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

Вместе с тем $a(t)$ и $b(t)$ можно рассматривать как ортогональные компоненты вектора, модуль которого равен $A(t)$, а угол поворота определяется фазой $\varphi(t)$. Следовательно, $A(t)$ в общем случае подчиняется распределению Райса (3.15)

$$f(A) = \frac{A}{\sigma^2} e^{-A^2/2\sigma^2} I_0\left(\frac{AA_0}{\sigma^2}\right) e^{-A_0^2/2\sigma^2},$$

где A_0 - амплитуда когерентного сигнала, σ^2 - дисперсия флуктуаций, переходящему при $A_0/\sigma \ll 1$ в распределение Релея (3.16), а при $A_0/\sigma \gg 1$ - в нормальное распределение со средним значением A_0 и дисперсией σ^2 (см. рис. 3.3). Распределение фазы $\varphi(t)$ квазигармонического сигнала совпадает с распределением фазы вектора (3.17), форма которого при различных значениях отношения A_0/σ показана на рис. 3.4.

5.11. Задачи

1. Вычислить энергетические спектры стационарных случайных процессов со следующими корреляционными функциями:

а) $K(\tau) = A \exp(-\alpha|\tau|)$;

б) $K(\tau) = \frac{A}{1 + \alpha^2 \tau^2}$;

в) $K(\tau) = A \exp(-\alpha^2 \tau^2)$;

г) $K(\tau) = A \frac{\sin \alpha \tau}{\alpha \tau}$

Найти интегральные масштабы спектров.

Ответ:

$$a) W(\omega) = \frac{2A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \Omega_0 = \frac{\pi\alpha}{2};$$

$$b) W(\omega) = \frac{\pi A}{\alpha}, \quad \Omega_0 = \alpha;$$

$$в) W(\omega) = \frac{A\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\omega^2/4\alpha^2} \quad \Omega_0 = \sqrt{\pi}\alpha;$$

$$г) W(\omega) = \begin{cases} \pi/\alpha & \omega \in [-\alpha, \alpha] \\ 0 & \omega \notin [-\alpha, \alpha] \end{cases} \quad \Omega_0 = \alpha$$

2. Доказать, что не существует стационарного случайного процесса $x(t)$, корреляционная функция которого $K_x(\tau)$ постоянна на каком-то временном интервале $|\tau| < \tau_0$ и равна нулю вне его.

3. Вычислить корреляционные функции случайных процессов, имеющих энергетические спектры, показанные на рис. 5.7.

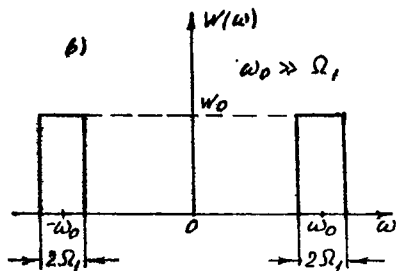
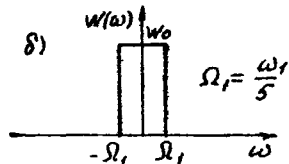
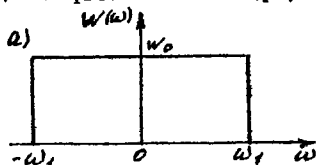


Рис. 5.7

4. Стационарный нормальный шум $\xi(t)$ имеет равномерную спектральную плотность в полосе $|\omega| < \Delta$ и равную нулю за пределами этой полосы. Доказать, что значения шума в моменты времени, стоящие друг от друга на $(\pi\pi/\Delta)$ статистически независимы.

5. Энергетический спектр случайного процесса имеет вид

$$W_{\xi}(\omega) = \frac{\lambda}{[\omega + \omega_0]^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda}{[\omega - \omega_0]^2 + \lambda^2}$$

Найти корреляционную функцию производной процесса.

Ответ:

$$W_{\xi}(\omega) = \lambda \left[\frac{\omega^2}{[\omega + \omega_0]^2 + \lambda^2} + \frac{\omega^2}{[\omega - \omega_0]^2 + \lambda^2} \right]$$

$$K_{\xi}(\tau) = 2\lambda \delta(\tau) + (\omega_0^2 - \lambda^2) \cos \omega_0 \tau e^{-\lambda |\tau|} - 2\lambda \omega_0 \sin \omega_0 |\tau| e^{-\lambda |\tau|}$$

6. Найти корреляционную функцию и энергетический спектр производной случайного процесса, если корреляционная функция самого процесса есть

$$K_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|} (1 + \alpha |\tau|)$$

Ответ:

$$K_{\xi'}(\tau) = \alpha^2 \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|} (1 - \alpha |\tau|); W_{\xi'}(\omega) = \frac{4\sigma^2 \alpha^3 \omega^2}{(\alpha^2 - \omega^2)^2}$$

7. Определить корреляционную функцию и энергетический спектр процесса $y(t) = x(t) + \frac{1}{\alpha} x'(t)$ если $x(t)$ - стационарный процесс с корреляционной функцией $K_x(\tau) = \sigma^2 \alpha \rho(-\alpha^2 \tau^2)$.

8. Ко входу цепи, изображенной на рис. 5.8, подключен генератор случайного тока, который

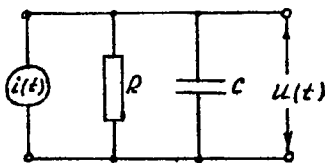


Рис. 5.8

можно рассматривать как гауссовский белый шум с нулевым средним значением и дельтаобразной корреляционной функцией. Найти энергетический спектр, корреляционную функцию и дисперсию выходного напряжения.

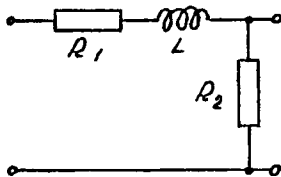


Рис. 5.9

9. На вход четырехполосника (рис. 5.9) действует случайное напряжение - нормальный белый шум. Найти энергетический спектр, корреляционную функцию и дисперсию выходного напряжения.

10. Стационарный нормальный случайный процесс со средним значением $\langle x(t) \rangle = x_0$

дисперсией σ^2 и коэффициентом корреляции $R_x(\tau)$ подвергается нелинейному преобразованию $y = a e^{\beta x}$; $a, \beta > 0$. Вычислить корреляционную функцию процесса после преобразования.

11. На вход "линейного детектора" $i(t) = a u(t)$, $u(t) > 0$; $i(t) = 0$, $u(t) < 0$ поступает нормальный шум с нулевым средним значением, дисперсией σ^2 и коэффициентом корреляции $R(\tau)$. Записать выражение для двумерной плотности распределения процесса на выходе $f(i_1, i_2; t_1, t_2)$. Вычислить корреляционную функцию $K_i(\tau)$.

12. Стационарный случайный процесс $x(t)$ с корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau|)$$

может быть записан в виде

$$x(t) = C(t) \cos \omega_0 t + S(t) \sin \omega_0 t$$

Вычислить: а) корреляционные функции квадратурных компонент $K_C(\tau)$ и $K_S(\tau)$; б) взаимную корреляционную функцию $K_{CS}(\tau)$; в) спектральные плотности $W_C(\omega)$, $W_S(\omega)$ и взаимную спектральную плотность $W_{CS}(\omega)$.

13. На вход линейного инерционного устройства с частотной характеристикой

$$H(\omega) = \exp \left[- \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta^2} - i t_0 (\omega - \omega_0) \right], \quad \Delta \ll \omega_0$$

поступает нормальный шумовой сигнал $x(t)$ со средним значением $\langle x(t) \rangle = 0$ и корреляционной функцией $K_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$. Найти среднее значение, дисперсию и плотность распределения отскакивающей сигнала на выходе устройства.

14. Нормальный случайный процесс после линейного преобразования, описанного в задаче 13, подвергается детектированию с выделением низкочастотной составляющей. Характеристика детектора $y(t) = a + b x(t) + c x^2(t)$. Найти плотность распределения и среднее значение сигнала после детектирования.

5.12. Спектральный анализ случайного процесса

В разделе приводится описание лабораторной работы по модели-

рованию на ЭВМ случайного процесса и его спектральному анализу. Для ее выполнения необходимы теоретические сведения, оодержащиеся в предыдущих разделах 5.8 - 5.10. Предполагается, что решение задач 5.11 так же поможет выполнить лабораторную работу как небольшое исследование и подскажет иные варианты задания. Первая часть работы содержит краткие сведения об оценке энергетического спектра стационарного эргодического процесса методом периодограмм и об алгоритме быстрого преобразования Фурье, применяемом во второй практической части. Базовые программы приведены на языке Бейсик.

5.12.1. Оценка спектральной плотности

Если случайный процесс эргодический, то любая его реализация, регистрируемая длительное время, дает достаточно полное представление о характеристиках процесса в целом. Это справедливо и по отношению к оценке энергетического спектра. Определим случайный комплексный спектр процесса $\xi(t)$ за время T

$$S_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{i\omega t} dt$$

Если учесть (5.26), то за оценку спектральной плотности $W'_\xi(\omega)$ можно принять при $T \gg T_0$ величину

$$W'_T(\omega) = \frac{1}{T} [S_T(\omega) S_T^*(\omega)], \quad (5.60)$$

получившую в части литературы название периодограмма. Эта оценка асимптотически (при $T \rightarrow \infty$) несмещенная, что непосредственно следует из (5.26). Чтобы получить представление о ее точности, вычислим дисперсию

$$D_T = \langle [W'_T(\omega) - \langle W'_T(\omega) \rangle]^2 \rangle = \langle |S_T(\omega)|^4 - \langle |S_T(\omega)|^2 \rangle^2 \rangle,$$

которая через значения входного процесса представляется следующим интегралом

$$D_T = \frac{1}{T^2} \iiint_{-T/2}^{T/2} [\xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\xi(t_4) - \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle \langle \xi(t_3)\xi(t_4) \rangle] e^{i\omega(t_1 - t_2 + t_3 - t_4)} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.$$

Если $\xi(t)$ - нормальный случайный процесс с нулевым средним зна-

ченком $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и корреляционной функцией $K_{\xi}(\tau)$, то воспользовавшись (2.28), можно выразить момент четвертого порядка через моменты второго порядка

$$D_T = \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} [K_{\xi}(t_1-t_3)K_{\xi}(t_2-t_4) + K_{\xi}(t_1-t_4)K_{\xi}(t_2-t_3)] \times \\ \times e^{i\omega(t_1-t_2+t_3-t_4)} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4$$

а затем перейти к спектральному представлению, обозначив $W_{\xi}(\omega)$ энергетический спектр процесса $\xi(t)$, тогда

$$D_T = \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\omega') d\omega' \delta_T^2(\omega-\omega') \delta_T^2(\omega+\omega') \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(\omega') d\omega' \delta_T^2(\omega-\omega') \right\}^2,$$

где $\delta_T^2(\omega)$ - непрерывный аналог дельта-функции (5.23). Пусть τ_D - интервал корреляции процесса $\xi(t)$. При $T \gg \tau_D$ можно вынести из-под интеграла $W_{\xi}(\omega')$ в точке $\omega' = \pm \omega$ как медленно меняющуюся функцию. Тогда

$$D_T = W_{\xi}^2(\omega) \left[\left(2 \frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^2 + 1 \right],$$

причем при $\omega T \gg 1$ значение дисперсии оценки практически не зависит от длительности T регистрируемой реализации, приближаясь к значению

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D_T = W_{\xi}^2(\omega)$$

Таким образом, оценка (5.60) энергетического спектра, хотя и является несмещенной, неприемлема из-за большой дисперсии, значение которой не уменьшается при увеличении длительности реализации сигнала. Усреднение $W_T(\omega)$ по множеству реализаций, как правило, не представляется возможным. Чтобы уменьшить рассеяние оценки, повысить ее устойчивость, прибегают к разбиению интервала T на n подинтервалов T_0 , по каждому из которых вычисляются оценки $W_i(\omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, а затем рассчитывается среднее значение оценки

$$W_{n T_0}(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i(\omega)$$

В результате дисперсия оценки уменьшается в n раз. Заметим, что устойчивость оценки повышена за счет ухудшения разрешения спектральных составляющих, несколько темерь интервал частотного разре-

нения пропорционален не $1/T$ а $1/T_0 = n/T$
 Описанный метод оценки энергетического спектра случайного процесса известен как метод периодограмм. В его основе лежит преобразование Фурье непосредственно наблюдаемой реализации процесса. В прикладных задачах широко применяются также другие методы спектрального оценивания, например, автокорреляционный метод, который предполагает вначале оценку автокорреляционной функции процесса, а затем ее преобразование Фурье [9] восстанавливающее спектральную плотность в соответствии с теоремой Винера-Хинчина.

Появление в 1965 году алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) существенно повысило эффективность методов спектрального оценивания на основе периодограмм [9] и способствовало их широкому распространению.

5.12.2. Дискретное преобразование Фурье

Численный спектральный анализ всегда предполагает, что спектр исследуемого процесса ограничен некоторой частотой ω_{max} и одновременно процесс ограничен по длительности. Для проведения вычислений процесс дискретизируют во времени, т.е. превращают в серию результатов измерений в цифровой форме произведенных в точках $t_n = n \Delta T$ $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$; ΔT - шаг дискретизации. Шаг дискретизации, согласно теореме Котельникова [4] задается соотношением

$$\Delta T = \pi / \omega_{max} .$$

Если записать теперь дискретизированный процесс в виде последовательности N импульсов

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \delta(t - n \cdot \Delta T)$$

где для удобства обозначено $x(n \cdot \Delta T) \equiv x(n)$, то спектр такого процесса можно получить, если применить к нему преобразование Фурье

$$S(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \delta(t - n \cdot \Delta T) dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{i\omega n \Delta T}$$

При использовании ЭВМ требуется дискретизация процесса как во временной, так и в частотной области. В этом случае частотный спектр $S(\omega)$ определяется совокупностью своих значений $S(k\Delta\omega)$ на дискретных частотах $\omega = k\Delta\omega$. Частотный интервал между соседними отсчетами должен быть приравнен $\Delta\omega = 2\omega_{max}/N$ [3]. Так как $\omega_{max} = \pi/\Delta T$ то

$$\Delta\omega = 2\pi/N \cdot \Delta T$$

и формула для частотных выборок примет вид

$$S(k\Delta\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{i2\pi kn/N} \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1)/2.$$

Это соотношение называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ). При увеличении N свыше $(N-1)/2$ функция $S(k\Delta\omega)$ повторяется периодически (по свойству ряда Фурье функции, разложенной на конечном интервале). Поэтому $S(-\Delta\omega)$ можно приравнять $S[(N-1)\Delta\omega]$, соответственно $S(-2\Delta\omega) = S[(N-2)\Delta\omega]$, и т.д.

Это позволяет записать ДПФ в несколько измененной форме, удобной для вычисления на ЭВМ

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{+i2\pi kn/N}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где введено обозначение $S(k\Delta\omega) \equiv S(k)$.

Нумерация отсчетов при N четном поясняется рисунком 5.10.

Можно ввести и обратное дискретное преобразование Фурье

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{-i2\pi kn/N}, \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1$$

Как и при прямом ДПФ, вне интервала $0 \leq n \leq N-1$ функция $x(n \cdot \Delta T)$ продолжается периодически.

5.12.3. Алгоритм быстрого преобразования Фурье

Большое число операций, необходимых для спектрального анализа

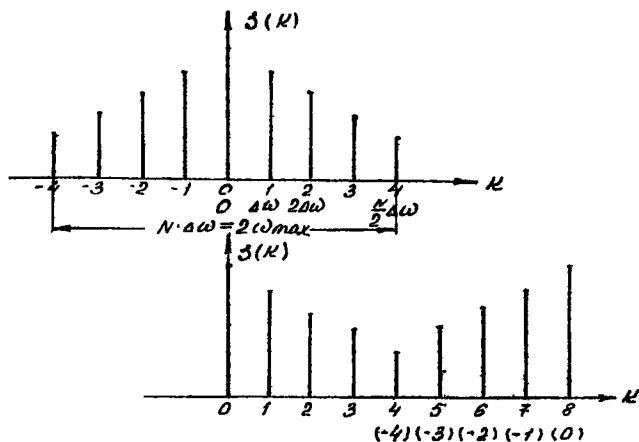


Рис. 5.10.

затрудняет прямое использование формул ДПФ. В настоящее время созданы и широко применяются алгоритмы так называемого быстрого преобразования Фурье (БПФ), которые позволяют значительно сократить число операций [9]. Определяющая идея БПФ состоит в том, чтобы используя свойство периодичности ядра преобразования Фурье

$$W_N^{rk} = e^{i2\pi \frac{rk}{N}},$$

разбить исходную сумму ДПФ на последовательность более простых сумм, каждая из которых, можно экономно получить все значения спектральных составляющих $Z_N(k)$ $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ в то время как при обычном ДПФ для получения каждого значения $Z_N(k)$ приходится проводить полное суммирование заново. Особенно просто алгоритм БПФ реализуется, когда число точек исходной последовательности значений процесса $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$; является степенью числа 2.

Рассмотрим один из способов построения алгоритма БПФ. Пусть N - четное число. Разобьем последовательность $\{x(n)\}$ на две: из четных $\{x(2m)\}$, $m = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$ и нечетных $\{x(2m+1)\}$ членов соответственно

$$S_N(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_N^{(2m+1)k}$$

Заметим, что четную степень $2mk$ ядра N -точечного ДФ

$$W_N^{2mk} = e^{i2\pi \frac{2mk}{N}}$$

можно представить как степень mk ядра $N/2$ -точечного ДФ

$$e^{i2\pi \frac{mk}{N/2}} = W_{N/2}^{mk},$$

то есть

$$S_N(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_{N/2}^{mk}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Учтем также, что

$$W_{N/2}^{m(k+N/2)} = e^{i2\pi \frac{m(k+N/2)}{N/2}} = e^{i2\pi \frac{mk}{N/2}} = W_{N/2}^{mk};$$

$$W_N^{(k+N/2)} = e^{i2\pi \frac{k+N/2}{N}} = -e^{i2\pi \frac{k}{N}} = -W_N^k,$$

поэтому последовательность $\{S_N(k)\}$ также удобно разбить на две, отнеся к первой значения для $0 \leq k \leq N/2 - 1$ а ко второй - для $N/2 \leq k \leq N-1$. Представим это разбиение следующими соотношениями:

$$S_N(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_{N/2}^{mk}, \quad 0 \leq k \leq N/2 - 1;$$

$$S_N(N/2 + k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_{N/2}^{mk} - W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_{N/2}^{mk}, \quad 0 \leq k \leq N/2 - 1$$

Таким образом, N -точечное ДФ оказалось представленным как линейная комбинация двух $N/2$ -точечных ДФ, четных и нечетных членов исходной последовательности $\{x(n)\}$. Обозначим

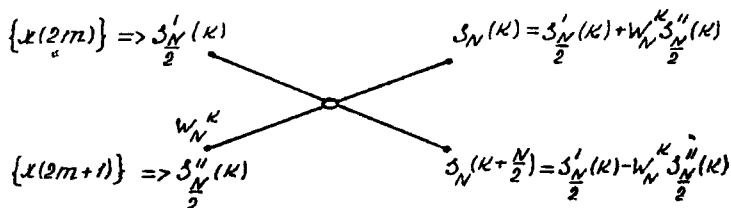
$$S'_{N/2}(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_{N/2}^{mk}; \quad S''_{N/2}(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_{N/2}^{mk}$$

тогда

$$S_N(\kappa) = S'_{N/2}(\kappa) + W_N^\kappa S''_{N/2}(\kappa);$$

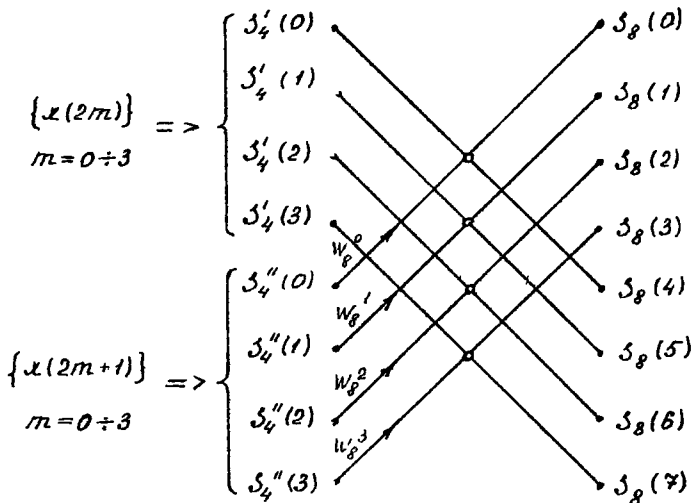
$$S_N(\frac{N}{2} + \kappa) = S'_{N/2}(\kappa) - W_N^\kappa S''_{N/2}(\kappa), \quad 0 \leq \kappa \leq \frac{N}{2} - 1$$

Представим эти рекуррентные соотношения графом.



Два входных числа $S'_{N/2}(\kappa)$ и $S''_{N/2}(\kappa)$ объединяются для получения двух выходных чисел $S_N(\kappa)$ и $S_N(N/2 + \kappa)$.

Стрелкой показано умножение на комплексное число W_N^κ получившее название поворачивающего множителя. Полагая для примера $N = 8$, построим граф для всей последовательности значений $S_N(\kappa)$.

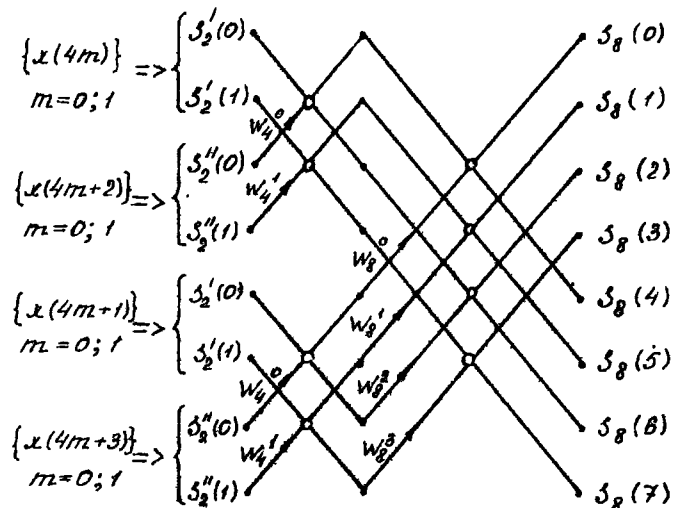


Если число $N/2$ в свою очередь является четным, то

$$S_{N/2}(K) = S'_{N/4}(K) + W_{N/2}^K S''_{N/4}(K);$$

$$S_{N/2}\left(\frac{N}{4} + K\right) = S'_{N/4}(K) - W_{N/2}^K S''_{N/4}(K), \quad 0 \leq K \leq \frac{N}{4} - 1$$

Соответственно дополним граф 8-точечного преобразования Фурье



При четности числа $N/4$ значения $S_{N/4}$ можно записать через $S_{N/8}$ — и так далее до тех пор, пока не останутся только двух-точечные ДПФ, которые рекуррентными соотношениями связаны непосредственно со значениями $x(n)$ преобразуемого процесса. Для 8-точечного преобразования Фурье полный граф выглядит следующим образом (см. рис. 5.11).

Построенный алгоритм сокращает число вычислительных операций. Действительно, непосредственное вычисление ДПФ требует выполнения N^2 комплексных умножений и $N(N-1)$ комплексных сложений. Построенный алгоритм разделяет вычисления на $\log_2 N$ этапов, на каждом выполняется $N/2$ комплексных умножений и N комплексных сложений, так что в целом число умножений равно $N/2 \cdot \log_2 N$, а

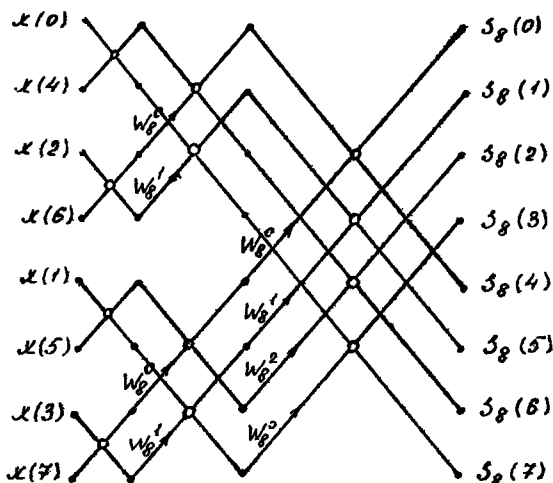


Рис. 5.11

сложений $N \log_2 N$. Это значительно меньше, чем при непосредственном вычислении ДПФ, поэтому алгоритмы, подобные описанному, называются быстрым преобразованием Фурье. Для 8-точечного ДПФ алгоритм БПФ сокращает число операций примерно в 2,7 раза, для 128-точечного - в 18,3 раза, для 2048-точечного - в 186,2 раза.

Особенность БПФ, дающего спектральные составляющие $S_N(k)$ в нужном порядке $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ является измененный порядок преобразуемой последовательности $\{x(n)\}$. Такой алгоритм называется БПФ с прореживанием по времени. Если порядок последовательности $\{x(n)\}$ $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ сохранить, то граф БПФ будет выглядеть развернутым слева направо, при этом изменится порядок выходной последовательности - это БПФ с прореживанием по частоте.

Из приведенных графов видно, что для реализации описанного алгоритма прореживания по времени необходимо изменить порядок преобразуемой последовательности $\{x(n)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Измененный порядок называется двоично-инверсным. Он определяется следующим образом. Если записать порядковые номера элементов вход-

ной последовательности в двоичном коде, используя L двоичных разрядов, причем $N = 2^L$, а затем инвертировать порядок следования разрядов, то получаемые при этом числа и будут номерами элементов входной последовательности после их перестановки. Для случая $N = 2^3 = 8$ прямой и двоично-инверсный порядок приведены в таблице.

Номер	Двоичное представление	Двоичная инверсия	Двоично-инверсный номер
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

5.12.4. Задание к работе

1. Смоделировать реализацию процесса "сигнал + шум", определив ее выборкой значений объема N^* при шаге дискретизации ΔT на интервале $t \in (0, N \cdot \Delta T)$. Детерминированный сигнал

$$y_{\text{сигн}}(t) = \sin \omega_0 t; \quad \omega_0 = K_0 \Delta \omega = K_0 \frac{2\pi}{N \cdot \Delta T}$$

шум $y_{\text{ш}}(t)$ - центрированный случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$K_{\text{ш}}(\tau) = e^{-\alpha |\tau|}$$

(алгоритм моделирования приведен в разделе 5.7).

Построить график реализации.

2. Используя алгоритм БИФ, вычислить периодограмму смоделированного процесса. Построить график. По $N \vartheta$ реализациям построить оценку энергетического спектра.

3. Имитировать прохождение процесса через линейный фильтр с заданной частотной характеристикой (для $\omega > 0$)

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - \omega_0| \leq D; \\ 0, & |\omega - \omega_0| > D. \end{cases}$$

Используя обратное БИФ, получить реализацию процесса после линейной фильтрации. Построить график реализации.

Показать на графике, используя результат п.2, как выглядит энергетический спектр процесса после линейной фильтрации.

Замечание: при применении ДПФ нужно учесть шаг дискретизации $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N \cdot \Delta T}$ и продолжить четным образом $H(\omega)$ на отрицательные частоты $\omega < 0$

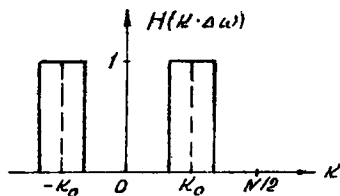


Рис. 5.12

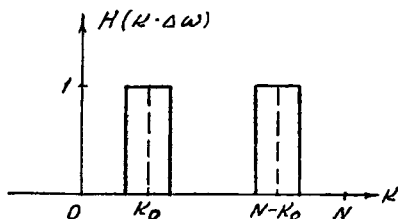


Рис. 5.13

$$H(-k \cdot \Delta\omega) = H(k \cdot \Delta\omega)$$

(см. рис. 5.12)

Поскольку при БИФ значения k принято рассматривать не в интервале $(-N/2, N/2)$ а в интервале $(0, N)$ то продолжение на полупериод $(-N/2, 0)$ заменяется продолжением на $(N/2, N)$ (см. рис. 5.13).

4. Имитировать прохождение процесса через нелинейный безинерционный элемент с характеристикой

$$y_{вых} = |y_{вх}|$$

Используя БИФ, получить оценку энергетического спектра выходного процесса по нескольким пери-

одограммам. Построить график.

5. Интерпретировать полученные результаты.

5.12.5. Форма отчета

Отчет по работе должен содержать:

- задание к работе;
- программу для заданного варианта;
- график смоделированной реализации "сигнал + шум" до и после линейной фильтрации;
- графики энергетического спектра смоделированного процесса, процесса после линейной фильтрации и после нелинейного преобразования;
- интерпретацию результатов.

5.12.6. Базовые программы

Подпрограмма (650 - 699) моделирует N отсчетов процесса "сигнал + шум" и заносит их в массив $Y(N)$

```
650 REM МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА
655 S3 = SQR(3) \ S1 = S3 * Q
660 Y(0) = 2 * RND(0) * S3 - S3
665 FOR I=1 TO N \ Y(I) = Y(I-1) * E + 2 * RND(0) * S1 - S1 \ NEXT I
670 I2 = 2 * PI * H0 / N
675 FOR I=1 TO N \ Y(I) = Y(I) + COS(I * I2)
680 PRINT "Y(" I ") = " Y(I) \ NEXT I
699 RETURN
```

Подпрограмма (1100 - 1340) осуществляет преобразование Фурье массивов действительных и мнимых частей ($A1(N)$ и $A2(N)$) входной последовательности и записывает действительные и мнимые части результатов в $A1(N)$ и $A2(N)$.

```
1100 REM БПФ
1110 N2 = N/2 \ N1 = N-1 \ J = 1
1120 FOR I=1 TO N1
1130 IF I >= J THEN 1150
```

```

1140 R = A1(J) \ A1(J) = A1(I) \ A1(I) = R
1145 R = A2(J) \ A2(J) = A2(I) \ A2(I) = R
1150 K = N2
1160 IF K >= J THEN 1190
1170 J = J - K \ K = K/2
1180 GO TO 1160
1190 J = J + K
1200 NEXT I
1210 C = 2
1220 FOR L = 1 TO M
1230 K = C/2 \ U1 = 1 \ U2 = 0
1240 F = D I / K
1245 IF P = 0 THEN F = -F
1250 W1 = COS(F) \ W2 = SIN(F)
1255 FOR J = 1 TO K
1260 FOR I = J TO N STEP C \ S = I + K
1270 T1 = A1(S) * U1 - A2(S) * U2
      T2 = A1(S) * U2 + A2(S) * U1
1280 A1(S) = A1(I) - T1 \ A2(S) = A2(I) - T2
1290 A1(I) = A1(I) + T1 \ A2(I) = A2(I) + T2
1300 NEXT I
1310 R = U1 * W1 - U2 * W2 \ U2 = U1 * W2 + U2 * W1 \ U1 = R
1320 NEXT J
1330 C = C + C \ NEXT L
1340 RETURN

```

Подпрограмма (1400 - 1430) рассчитывает значения энергетического спектра процесса и заносит их в массив B(N)

```

1400 REM ЭНЕРГЕТИЧ. СПЕКТР
1410 FOR I = 1 TO N \ B(I) = (A1(I) * A1(I) + A2(I) * A2(I)) / N \ NEXT I
1430 RETURN

```


Главная программа (10 - 99)

- рассчитывает периодограмму процесса "сигнал + шум";
- по N_9 реализациям строит оценку энергетического спектра процесса;
- имитирует линейный фильтр с частотной характеристикой $H(N)$;
- вычисляет реализацию процесса после линейной фильтрации (обратное преобразование Фурье);
- имитирует работу нелинейного элемента с характеристикой

$$y_{\text{вых}} = |y_{\text{вх}}|;$$

- вычисляет энергетический спектр процесса после нелинейного преобразования.

10 REM ГЛАВНАЯ ПРОГРАММА

12 DIM Y(64), A1(64), A2(64), B(64), B1(64), B2(64), H(64)

15 RANDOMIZE

17 PRINT "LOG N = M, ОБЪЕМ ВЫБОРКИ N"

19 PRINT "ЧИСЛО РЕАЛИЗАЦИЙ N9" \ INPUT M, N, N9

20 FOR I=1 TO N \ B1(I)=0 \ B2(I)=0 \ H(I)=0 \ NEXT I

22 PRINT "A, T, K0, D" \ INPUT A, T, K0, D

25 P=1 \ E=EXP(-T/A) \ Q=SQR(1-E+E)

27 FOR I=K0+1-D TO K0+1+D \ H(I)=1 \ NEXT I

30 FOR I=N+1-K0-D TO N+1-K0+D \ H(I)=1 \ NEXT I

32 FOR I1=1 TO N9

35 GOSUB 650 \ REM МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА

37 FOR I=1 TO N \ A1(I)=Y(I) \ A2(I)=0 \ NEXT I

40 GOSUB 1100 \ REM БПФ

42 GOSUB 1400 \ REM ЭНЕРГЕТИЧ. СПЕКТР

45 FOR I=1 TO N \ B1(I)=B1(I)+B(I) \ NEXT I

47 IF I1 <> 1 THEN 55

50 PRINT "ПЕРИОДОГРАММА"

52 FOR I=1 TO N \ PRINT "B("I")="B(I) \ NEXT I

55 FOR I=1 TO N \ A1(I)=A1(I)*H(I) \ A2(I)=A2(I)*H(I) \ NEXT I

57 P=0 \ GOSUB 1100

```

59 IF I < > 1 THEN 65
60 PRINT "ПРОЦЕСС ПОСЛЕ ЛИНЕЙН. ФИЛЬТРА"
62 FOR I=1 TO N \ PRINT "A1("I")="A1(I)/N, "A2("I")="A2(I)/N \
65 P = 1
NEXT I
67 FOR I=1 TO N \ A1(I)=ABS(A1(I)/N) \ A2(I)=0 \ NEXT I
70 GOSUB 1100
72 GOSUB 1400
75 FOR I=1 TO N \ B2(I)=B2(I)+B(I) \ NEXT I
77 NEXT I
80 PRINT "ЭНЕРГ. СПЕКТР ДО (B1) И ПОСЛЕ (B2) НЕЛИН. ФИЛЬТРА"
85 FOR I=1 TO N \ PRINT "B1("I")="B1(I)/N, "B2("I")="B2(I)/N \
NEXT I
99 STOP

```

6. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Как известно, коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости между случайными величинами. Однако целому ряду процессов, с которыми приходится иметь дело на практике, присуши нелинейные связи. В подобных ситуациях применение корреляционного анализа неэффективно и может привести к ошибочным выводам.

Более общим, чем корреляционный, является регрессионный анализ, опирающийся на измерение условных вероятностных характеристик.

6.1. Понятие регрессии

Регрессией в теории вероятностей и в математической статистике называют зависимость среднего значения какой-либо величины от некоторой другой величины или от нескольких величин.

В отличие от чисто функциональной зависимости $y = g(x)$ когда каждому значению независимой переменной x соответствует одно определенное значение величины y при регрессионной связи одному

и тому же значению x могут соответствовать в зависимости от случая различные значения величины y

Если при каждом значении x_i наблюдается n_i значений $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$ величины y то зависимость средних арифметических $\bar{y} = (y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in}) / n_i$ от x_i и является регрессией в статистическом понимании этого термина.

В теории вероятностей зависимость двух случайных величин x и y определяется совместным распределением вероятностей с плотностью распределения $f(x, y)$ При каждом фиксированном значении x величина y является случайной величиной, распределение которой характеризуется условной плотностью $f(y/x)$ Регрессия величины y по величине x определяется условным математическим ожиданием

$$M(y/x) = \langle y/x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y/x) dy.$$

которое можно рассматривать как функцию "независимой" переменной x

$$\langle y/x \rangle = g(x)$$

В этом смысле уравнение $y = g(x)$ называется уравнением регрессии, а соответствующий график - линией регрессии величины y по величине x Мерой рассеяния значений случайной величины y относительно линии регрессии может служить условная остаточная дисперсия

$$D = \langle y^2/x \rangle - \langle y/x \rangle^2 = \sigma^2(x)$$

Если $\sigma^2(x) = 0$ при всех значениях x то можно с достоверностью утверждать, что y и x связаны строгой функциональной зависимостью.

Регрессия используется для прогноза значений y по x , обеспечивая при этом эффективный прогноз, то есть с наименьшей в среднеквадратическом ошибкой [15, 18]

Регрессия может отойти для двух значений одного и того же процесса, измеряемых в разные моменты времени. Например, для стационарного нормального случайного процесса $x(t)$ плотность условного распределения значений $x(t + \tau)$, если $x(t) = x_0$ имеет вид

$$f(x, \tau/x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi [1 - \rho^2(\tau)] \sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{[x - \rho(\tau)x_0]^2}{2[1 - \rho^2(\tau)] \sigma^2} \right\},$$

где $\rho(\tau)$ - коэффициент корреляции, σ^2 - дисперсия процесса, то

есть является нормальной плотностью с математическим ожиданием $R(\tau) \cdot x_0$ и дисперсией $\sigma^2 [1 - R^2(\tau)]$. Следовательно, регрессия $x(t + \tau)$ на $x(t) = x_0$ описывается уравнением

$$x = R(\tau) \cdot x_0$$

и является линейной.

Регрессия может также характеризовать зависимость двух разных процессов, например, процесса $x(t)$ на входе канала связи и процесса $y(t)$ на его выходе, если при прохождении по каналу сигнал подвергается преобразованиям, к нему добавляются шумы и т.д.

Регрессионный анализ - раздел математической статистики, объединяющий практические методы исследования регрессионной зависимости между величинами. Его целью является определение уравнения регрессии.

На начальном этапе выдвигается предположение об общем виде уравнения - выбирается модель регрессии. Предварительное представление о линии регрессии можно получить, если на координатную плоскость (x, y) нанести точки с координатами (x_i, \bar{y}_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, где \bar{y}_i - среднее арифметическое всех значений величины y_i , полученных для фиксированного x_i . На основе этой диаграммы, а также имеющихся сведений о свойствах процессов, обуславливающих связь между величинами, выдвигается гипотеза относительно типа функции $g(x)$. Например, если расположение точек на диаграмме близко к прямолинейному, то допустимо использовать в качестве приближения линейную регрессию

$$g(x) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Широко применяется полиномиальная регрессия, при которой

$$g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_m x^m.$$

Отчасти это объясняется простотой аппроксимирующей функции и тем, что всякую непрерывную на некотором отрезке функцию можно описать полиномом с любой наперед заданной точностью. Полиномиальную регрессию называют также параболической регрессией степени m .

Часто $g(x)$ выбирают в виде линейной комбинации некоторых функций $g_i(x)$ о свойствах которых по каким-либо соображениям представляются удобными

$$g(x) = \beta_0 g_0(x) + \beta_1 g_1(x) + \beta_2 g_2(x) + \dots + \beta_m g_m(x).$$

Все приведенные формы являются линейными относительно неизвестных

коэффициентов β_l $l = 0, 1, 2, \dots, m$ которые оцениваются по статистическим данным. Эти коэффициенты линейной модели регрессии называются коэффициентами регрессии. Понимая под β совокупность всех β_l $l = 0, 1, 2, \dots, m$ введем их в обозначение модели регрессии

$$y = g(x; \beta)$$

Оценка неизвестных коэффициентов регрессии по статистическим данным осуществляется методом наименьших квадратов (МНК). Оценки $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m$ параметров $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$, полученные этим методом, называются выборочными коэффициентами регрессии, а уравнение

$$y = g(x; \hat{\beta})$$

определяет эмпирическую линию регрессии.

Если исследуемые величины можно считать нормальными, то оценки коэффициентов регрессии с помощью МНК совпадают с оценками, получаемыми методом максимального правдоподобия (ММП), являются несмещенными (средние значения оценок равны искомым параметрам), эффективными (имеют наименьшие возможные дисперсии) и подчиняются нормальным распределениям.

При допущении, что величины $y_j(x_i)$ нормальны распределены, наиболее эффективно осуществляется проверка точности построенной эмпирической регрессионной зависимости и проверка гипотез о параметрах регрессионной модели. В этом случае построение доверительных интервалов для истинных коэффициентов регрессии $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ и проверка гипотезы об отсутствии регрессионной связи ($\beta_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$) производится с помощью распределения Стьюдента.

Первоначально термин "регрессия" был употреблен английским статистиком Ф. Гальтоном (1886) в теории наследственности в следующем специальном смысле: "возвратом к среднему состоянию" (*regression to mediocrity*) было названо явление, состоящее в том, что дети тех родителей, рост которых превышает среднее значение на a единиц, имеют в среднем рост, превышающий среднее значение меньше, чем на a единиц.

6.2. Регрессия значений выходного процесса по значениям процесса на входе системы

Условная плотность вероятности $f(y/x)$ служит эффективным инструментом при анализе различных процессов и устройств. При ис-

следованиях прохождения сигналов через различные системы условную плотность вероятности выходного сигнала $y(t)$ относительно входного $x(t)$ используют в качестве оператора, устанавливающего соответствие между характеристиками сигналов на входе и на выходе [3, 4]. Наиболее важными числовыми характеристиками условного распределения являются условное математическое ожидание $M(y/x)$ и условная дисперсия $D(y/x)$ то есть уравнение регрессии y по x и остаточная дисперсия $\sigma^2(x)$ как мера рассеяния значений y относительно линии регрессии.

Для установления связи между выходным и входным сигналами в эксперименте используется модель, основанная на упрощенных, но правдоподобных предположениях: величина x считается контролируемой величиной, значения которой заранее задаются при планировании эксперимента, а наблюдаемые значения y представляются в виде

$$y_{ij} = g(x_i; \beta) + \varepsilon_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, K \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

где ε_{ij} - случайные отклонения от линии регрессии, независимые при различных измерениях, одинаково распределенные о нулевым средним значением и дисперсией $\sigma^2(x_i)$.

Случай неконтролируемой переменной x отличается тем, что в ходе эксперимента одновременно измеряются реализовавшиеся значения x_ℓ и y_ℓ $\ell = 1, 2, \dots, n_x$ после чего измеренные значения x_ℓ упорядочиваются и группируются по интервалам заданной длины, выбираются центры интервалов x_i $i = 1, 2, \dots, K$ и соответствующие точкам этого интервала значения y_{ij} $j = 1, 2, \dots, n_i$ соотносятся с центральным значением x_i .

Объем исходной выборки n_x определяется при этом с учетом предполагаемого числа интервалов K и ориентировочной оценки необходимых объемов частичных выборок n_i . Дальше регрессионный анализ в обоих случаях проводится одним и тем же способом.

Схему эксперимента по определению регрессии выходного процесса $y(t)$ по значениям процесса на входе системы $x(t)$ можно построить следующим образом.

Первый этап - предварительные наблюдения. На этом этапе производится одновременная запись реализации входного процесса $y(t)$ и соответствующей реализации выходного процесса $x(t)$ с тем, чтобы получить общее представление о характере преобразования, возможном диапазоне изменения значений каждого процесса, глубине и частоте флуктуаций, порождаемых шумами. Длительность записи T

выбирают так, чтобы она значительно превышала интервалы характерных временных изменений каждого процесса.

Второй этап - планирование эксперимента о контролируемые значениями x_i

На основе предварительных наблюдений, а также известных сведений (если они имеются) о распределении значений входного процесса, характере преобразования, интенсивности и масштабе корреляции шумов определяются:

- размах выборки и шаг дискретизации значений входного процесса $x(t)$; задается последовательность контролируемых значений

$$x_i \quad i = 1, 2, \dots, K ;$$

- объем n_i частичной выборки значений выходного процесса

y_{ij} $j = 1, 2, \dots, n_i$ для каждого контролируемого значения x_i $i = 1, 2, \dots, K$; чтобы обеспечить некоррелированность значений y_{ij} они отсчитываются с временным интервалом, превышающим масштаб корреляции шумовых флуктуаций выходного процесса.

Третий этап - измерения. Для каждого x_i из последовательности контролируемых значений производят n_i измерений значений y_{ij} выходного процесса с заданным разносом во времени. Результаты измерений наносят на координатную плоскость (x, y) в виде точек с координатами (x_i, y_{ij}) образующими диаграмму рассеяния. Пример диаграммы показан на рис. 6.1. Затем для каждого x_i вычисляют выборочное среднее

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_j y_{ij}$$

и указывают доверительный интервал с заданным уровнем значимости (см. раздел 4.9) Точки (x_i, y_{ij}) и доверительные интервалы, нанесенные на плоскость (x, y) , дают предварительное представление о линии регрессии (рис. 6.2). Но поскольку для каждого x_i частичная выборка имеет конечный объем, то выборочное среднее \bar{y}_i является случайной величиной, и точка (x_i, \bar{y}_i) может не попасть на линию регрессии.

Стандартный метод оценки линии регрессии основывается на применении линейной по параметрам модели

$$g(x; \beta) = \sum_{l=0}^m \beta_l g_l(x),$$

где $g_l(x)$ - известные функции, а коэффициенты β_l оцениваются

по методу наименьших квадратов (МНК).

На четвертом этапе выдвигается гипотеза относительно общего вида линейной модели, то есть задается число слагаемых m и выбираются функции $g_c(x)$ $c = 0, 1, \dots, m$

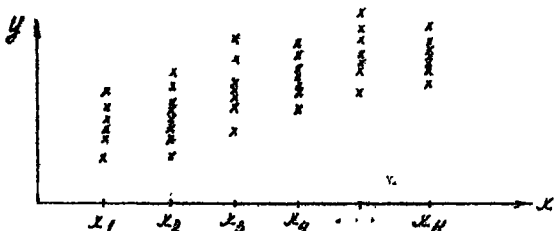


Рис. 6.1

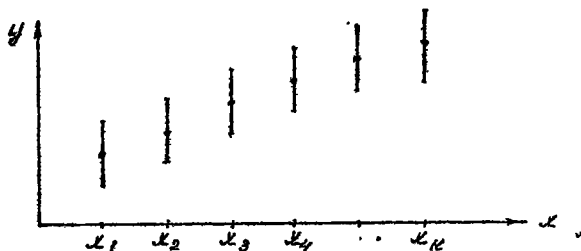


Рис. 6.2

Затем по результатам наблюдений находят оценки неизвестных параметров β_c . В качестве МНК-оценок этих параметров принимаются значения $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m$ такие, чтобы отклонения точек (x_i, y_i) от линии регрессии были минимальны в среднеквадратическом, то есть чтобы квадратическая форма

$$\Phi(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m) = \sum_{i=1}^N [\bar{y}_i - g(x_i; \beta)]^2$$

имела наименьшее возможное значение.

Необходимым условием экстремума функции $\Phi(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$ является равенство нулю частных производных

$$\frac{\partial \Phi(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)}{\partial \beta_\ell} = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots, m.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_\ell} &= 2 \sum_{i=1}^K [\bar{y}_i - g(x_i; \beta)] \left(- \frac{\partial g(x_i; \beta)}{\partial \beta_\ell} \right) = \\ &= -2 \sum_{i=1}^K [\bar{y}_i - g(x_i; \beta)] g_\ell(x_i) \end{aligned}$$

то экстремальные значения параметров β_ℓ должны быть решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \beta_0 \sum_{i=1}^K g_0(x_i) g_0(x_i) + \beta_1 \sum_{i=1}^K g_1(x_i) g_0(x_i) + \dots + \beta_m \sum_{i=1}^K g_m(x_i) g_0(x_i) &= \\ &= \sum_{i=1}^K \bar{y}_i g_0(x_i); \\ \beta_0 \sum_{i=1}^K g_0(x_i) g_1(x_i) + \beta_1 \sum_{i=1}^K g_1(x_i) g_1(x_i) + \dots + \beta_m \sum_{i=1}^K g_m(x_i) g_1(x_i) &= \\ &= \sum_{i=1}^K \bar{y}_i g_1(x_i); \\ \beta_0 \sum_{i=1}^K g_0(x_i) g_m(x_i) + \beta_1 \sum_{i=1}^K g_1(x_i) g_m(x_i) + \dots + \beta_m \sum_{i=1}^K g_m(x_i) g_m(x_i) &= \\ &= \sum_{i=1}^K \bar{y}_i g_m(x_i), \end{aligned}$$

которая называется нормальной системой.

Таким образом, МНК-оценки коэффициентов регрессии $\hat{\beta}_\ell$, $\ell = 0, 1, \dots, m$ определяют эмпирическую линию регрессии

$$y = g(x; \hat{\beta})$$

Эта линия каждому значению x входного сигнала ставит в соответствие ординату y - оценку условного среднего значения $\langle y/x \rangle$ выходного сигнала. Однако качество этой оценки существенно зависит от того, насколько удачно выбрана модель регрессии. Можно считать, что эмпирическая линия регрессии удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными, если она для всех значений x_i покрывается доверительными интервалами для условного математического ожидания $\langle y_i/x_i \rangle$, построенными для заданного уровня значимости. Если же это не достигается, то модель ре-

грессии нужно пересмотреть.

6.3. Лабораторная работа "Регрессионный анализ экспериментальных зависимостей"

Целью лабораторной работы является моделирование на ЭВМ нелинейных безынерционных преобразований случайных процессов и применение методов регрессионного анализа для определения характеристик нелинейных элементов. Работа выполняется с применением диалого-вычислительного комплекса.

6.3.1. Задание к работе

1. Имитировать работу нелинейного устройства, преобразующего входной сигнал $x(t)$ в выходной $y(t)$ по закону

$$y(t) = 2 + 3x(t) - x^3(t) + \xi(t)$$

если $\xi(t)$ - аддитивный нормальный шум с нулевым средним значением $\langle \xi \rangle = 0$ и дисперсией $\sigma_{\xi}^2 = 0,5$; $x(t) = \cos \omega t$

Построить графики реализаций процессов $y(t)$ и $x(t)$ при условии одновременной регистрации их значений в моменты времени $t_i = i \cdot \Delta T$ $i = 1, 2, \dots, N$; ΔT - интервал дискретизации $\Delta T = \pi / Q\omega \equiv H$ Q - число отсчетов на полупериод колебания. Определить размах каждой полученной выборки.

2. Построить план эксперимента: определить последовательность контролируемых значений x_i $i = 1, 2, \dots, N$; для каждого x_i определить объем N_1 выборки значений y_{ij} $j = 1, 2, \dots, N_1$

3. Провести численный эксперимент: построить диаграмму рассеяния на плоскости (x, y) ; определить для каждого x_i условные выборочные средние \bar{y}_i и указать соответствующие доверительные интервалы на уровне значимости $\alpha = 0,05$.

4. Выбрать модель регрессии и оценить методом наименьших квадратов коэффициенты регрессии; построить линию регрессии и проверить ее соответствие экспериментальным данным.

6.3.2. Форма отчета

Отчет по работе должен содержать:

- задание к работе;
- программу для заданного варианта;
- графики реализаций процессов $x(t)$ и $y(t)$ на входе и выходе нелинейного устройства;
- диаграмму рассеяния в плоскости (x, y) ;
- значения условных выборочных средних $\bar{Y}(I)$ границы доверительных интервалов;
- модель регрессии и МНК-оценки коэффициентов регрессии;
- график линии регрессии с указанием выборочных средних и доверительных интервалов для них;
- обсуждение полученных результатов.

6.3.3. Базовые программы

Главная программа

Программа (10-99) обеспечивает исследование регрессионной зависимости между процессами Y и X по статистическим данным и печатает коэффициенты регрессии $B(I)$

Обозначения:

- N - объем выборки входного и выходного процессов;
- W - частота входного сигнала;
- Q - число отсчетов сигнала на полупериоде колебания;
- K - число контролируемых значений X ;
- $N1$ - объем выборки значений Y при каждом контролируемом значении X ;
- M - степень аппроксимирующего полинома.

```
10 DIM Y1(20), X1(20), D(20), A(20,21), F(20,21), B(20), T(20)
20 RANDOMIZE
30 PRINT "N, W, Q, K, N1, M", \ INPUT N, W, Q, K, N1, M
35 H = PI / (Q * W)
40 FOR I = 1 TO N \ X = COS (H * I * W)
45 GOSUB 2000 \ REM МОДЕЛИРОВАНИЕ
```

```

50 PRINT "X("I")="X , "Y("I")="Y \ NEXT I
60 GOSUB 1500 \ REM ЭКСПЕРИМЕНТ
70 GOSUB 1000 \ REM МАТРИЦА НОРМ. УР-НИЙ
80 GOSUB 1700 \ REM МЕТОД ГАУССА
85 PRINT "КОЭФФИЦИЕНТЫ РЕГРЕССИИ"
90 FOR I=0 TO M \ PRINT "B("I")="B(I) \ NEXT I
99 STOP
    
```

Подпрограмма (2000-2020) моделирует значения Y процесса на выходе нелинейного устройства с характеристикой

$$y = 2 + 3x - x^3 + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ - нормальный шум $0 < \xi > = 0$ и $\sigma_{\xi}^2 = 0,5$.

```

2000 Y=2+X*(3-X*X)+SQRT(-LOG(RND(0)))*COS(PI*2* RND(0))
2020 RETURN
    
```

Подпрограмма (1500-1590) обеспечивает проведение численного эксперимента: расчет диаграммы рассеяния $Y(X)$, выборочных средних $Y(I)$ и дисперсий $D(I)$ для каждого $X(I)$ из последовательности контролируемых значений.

```

1500 FOR I=0 TO N \ N2=N1-1 \ N3=N1+N2
1510 S=0 \ D1=0
1515 PRINT "КОНТРОЛИРУЕМОЕ X("I")", \ INPUT X
1520 FOR J=1 TO N1
1530 GOSUB 2000
1540 S=S+Y \ C=Y*Y \ D1=D1+C
1545 PRINT "Y("I,J")="Y \ NEXT J
1550 X1(I)=X \ Y1(I)=S/N1 \ D(I)=D1/N2 -S*S/N3
    
```

```

1560 PRINT I, XI(I) YI(I), D(I) \ NEXT I
1590 RETURN
    
```

Подпрограмма (1600-1699) формирует матрицу плана F и расширенную матрицу A нормальных уравнений для степенных базисных функций.

```

1600 FOR I=0 TO N \ Z = XI(I) \ T(0) = 1 \ T(1) = Z
1610 FOR J=1 TO M-1 \ T1 = Z * T(J)
1620 T(J+1) = T1 \ NEXT J
1630 FOR J=0 TO M \ F(I,J) = T(J) \ NEXT J
1640 NEXT I
1650 FOR L=0 TO M
1660 FOR J=L TO M \ S=0 \ R=0
1670 FOR I=0 TO N \ R1=F(I,L,I) \ S=S+R1 * F(I,J,I)
1675 IF J=M THEN R=R+R1 * YI(I)
1680 NEXT I
1685 A(L,J) = S \ A(J,L) = S \ NEXT J
1690 A(L,M+1) = R \ NEXT L
1699 RETURN
    
```

Подпрограмма (1700-1799) находит выборочные коэффициенты регрессии как решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса и заносит их в массив $B(M)$

```

1700 M1 = M + 1
1710 FOR L=0 TO M \ L1=L+1 \ S=A(L,L)
1720 FOR J=L1 TO M1 \ A(L,J)=A(L,J)/S \ NEXT J
1730 FOR I=L1 TO M \ R=A(I,L)
1740 FOR J=L1 TO M1 \ A(I,J)=A(I,J)-A(L,J)*R \ NEXT J
1750 NEXT I
    
```

```

1760 NEXT L
1770 B(M) = A(M, M1)
1780 FOR I = M-1 TO 0 STEP -1 \ S = A(I, M1)
1790 FOR J = I+1 TO N \ S = S - A(I, J) * B(J) \ NEXT J
1795 B(I) = S \ NEXT I
1799 RETURN
    
```

7. ПРИЕМ СИГНАЛОВ В ПРИСУТСТВИИ ШУМОВ

Прием радиосигналов всегда связан с присутствием шумов. Это могут быть как шумы, приходящие вместе с сигналами, так и собственные шумы приемной системы. Если интенсивность сигнала сравнима или меньше интенсивности шума, то прием сигнала может быть осуществлен с применением статистических методов. Такие ситуации часто возникают в системах связи, радиолокации, радиоастрономии и т.д. При этом выделяют две группы задач [1, 3-5] - задачи обнаружения ожидаемых сигналов на фоне шума и задачи выделения полезного сигнала из смеси сигнала и шума. Внешне похожие эти две задачи существенно различаются. В первом случае наблюдатель должен с максимальной надежностью внести решение о наличии или отсутствии сигнала, не заботясь о точном воспроизведении его формы. Во втором же речь идет о наилучшем в смысле выбираемого критерия воспроизведении сигнала, скрытого в шумах. Если формы спектров сигнала и шума различаются, то решение этих задач удается найти в рамках методов линейной фильтрации.

7.1. Согласованная фильтрация при обнаружении сигнала

На вход линейной системы поступает сигнал

$$x(t) = S_0(t) + \xi(t),$$

представляющий смесь полезного сигнала конечной длительности $S_0(t)$ и стационарного шума $\xi(t)$. Если передаточная функция системы есть $H(\omega)$ то после линейного преобразования регуляр-

ная составляющая сигнала будет равна

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S_0(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (7.1)$$

где $S_0(\omega)$ - спектр полезного сигнала, а стационарный шум с нулевым средним значением $\langle \xi(t) \rangle = 0$, дисперсией σ_0^2 и энергетическим спектром $W_0(\omega)$ будет преобразован, согласно (5.48) в стационарный шум с энергетическим спектром $|H(\omega)|^2 W_0(\omega)$ и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 W_0(\omega) d\omega \quad (7.2)$$

Определим отношение мгновенной интенсивности регулярного сигнала к средней интенсивности шума на выходе линейной системы - отношение "сигнал/шум"

$$\mu = |S(t)|^2 / \sigma^2 \quad (7.3)$$

и поставим задачу найти передаточную функцию $H(\omega)$ такого оптимального фильтра, отношение "сигнал/шум" на выходе которого будет наибольшим. Опеним вначале $|S(t)|^2$, используя неравенство Коши-Буняковского. Предположим, что $W_0(\omega) \neq 0$ в пределах полос частот, занимаемой полезным сигналом, и представим подынтегральную функцию в (7.1) в виде

$$H(\omega) S_0(\omega) = \left[H(\omega) \sqrt{W_0(\omega)} \right] \cdot \left[\frac{S_0(\omega)}{\sqrt{W_0(\omega)}} \right]$$

Тогда в фиксированный момент времени t_0

$$|S(t_0)|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 W_0(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_0(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Если учесть (7.2) и (7.3), то полученная оценка означает, что

$$\mu \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_0(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Запишем это неравенство в следующем виде

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S_0(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 W_0(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_0(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}$$

и выясним, возможен ли такой выбор $H(\omega)$ чтобы это соотношение перешло в равенство. Очевидно, для этого нужно принять, что

$$H(\omega) = \frac{S_0^*(\omega) e^{i\omega t_0}}{W_0(\omega)} \quad (7.4)$$

Линейный фильтр с частотной характеристикой (7.4) обеспечит для выходного сигнала наибольшее значение отношения "сигнал/шум" в момент времени t_0 и по этому критерию будет оптимальным. Частотная характеристика (7.4) придает больший вес тем частотным интервалам, где преобладает спектр полезного сигнала, и уменьшает вклад интервалов, где увеличивается спектр шума. Такой фильтр называется также согласованным фильтром, а приемник использующий его, согласованным приемником.

Если в полосе приемного устройства энергетический спектр шума $W_0(\omega)$ можно считать равномерным и принять $W_0(\omega) \equiv W_0$ (приближение "белого шума"), то частотной характеристике (7.4) будет соответствовать импульсная переходная функция

$$h(\tau) = \frac{1}{W_0} \int_{-\infty}^{\infty} S_0^*(\omega) e^{i\omega t_0 - i\omega \tau} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{W_0} S(t_0 - \tau)$$

и сигнал $x(t)$ (7.1) после линейного преобразования будет представляться выражением

$$y(t) = \frac{1}{W_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') S_0[t' - (t - t_0)] dt'$$

В этом случае согласованная фильтрация сводится к выделению корреляционной связи принятого и ожидаемого сигналов, то есть согласованный фильтр можно реализовать в виде коррелятора.

При согласованной фильтрации форма полезного сигнала искажается, например, прямоугольный импульс преобразуется в треугольный (см. 7.3, задача 1), при этом возрастает максимальное значение его амплитуды. Решение о наличии или отсутствии сигнала $S_0(t)$ выносится при сравнении $y(t)$ с некоторым пороговым значением y_0 , задание которого определяется выбором критерия обнаружения [4]

7.2. Выделение сигнала из шума

Полезный, несущий информацию сигнал часто можно рассматривать

как стационарный случайный процесс $\tilde{z}(t)$ К нему примешивается помеха - статистически независимый стационарный шум $\xi(t)$

Пусть суммарный сигнал

$$x(t) = \tilde{z}(t) + \xi(t), \quad \langle x(t) \rangle = \langle \tilde{z}(t) \rangle = \langle \xi(t) \rangle = 0$$

преобразуется линейной системой

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t') dt' x(t'), \quad h(\tau) = 0 \text{ при } \tau < 0 \quad (7.5)$$

которая характеризуется импульсной переходной функцией $h(\tau)$ или частотной характеристикой $H(\omega)$ Нужно определить, какой должна быть линейная система, чтобы выходной сигнал $y(t)$ с некоторой задержкой τ_0 наилучшим образом в среднеквадратическом воспроизводил полезный сигнал $\tilde{z}(t)$ то есть чтобы дисперсия ошибки воспроизведения

$$\langle [y(t+\tau_0) - \tilde{z}(t)]^2 \rangle = \langle \mu^2 \rangle \quad (7.6)$$

была минимальной. Выполним в (7.6) почленное усреднение

$$\langle y^2(t+\tau_0) \rangle - 2\langle y(t+\tau_0) \tilde{z}(t) \rangle + \langle \tilde{z}^2(t) \rangle = \langle \mu^2 \rangle$$

и воспользуемся представлением (7.5) для $y(t)$, тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') d\tau' h(\tau'') d\tau'' [K_{\tilde{z}}(\tau'-\tau'') + K_{\xi}(\tau'-\tau'')] \\ & - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') d\tau' K_{\tilde{z}}(\tau'-\tau_0) + K_{\tilde{z}}(0) = \langle \mu^2 \rangle \end{aligned} \quad (7.7)$$

Варируя $\langle \mu^2(t) \rangle$ по $h(\tau)$ получим

$$\delta \langle \mu^2 \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') d\tau' [K_{\tilde{z}}(\tau'-\tau) + K_{\xi}(\tau'-\tau)] - K_{\tilde{z}}(\tau'-\tau_0).$$

Дисперсия ошибки воспроизведения будет минимальной, если при любых $K_{\tilde{z}}(\tau)$ и $K_{\xi}(\tau)$ вариация $\delta \langle \mu^2 \rangle$ равна нулю, то есть если $h(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') d\tau' [K_{\tilde{z}}(\tau-\tau') + K_{\xi}(\tau-\tau')] = K_{\tilde{z}}(\tau-\tau_0). \quad (7.8)$$

На первый взгляд, решение этого уравнения несложно получить, применяя преобразование Фурье, однако это не так. К значительным осложнениям приводит условие, вытекающее из принципа причинности:

отклик системы не может возникнуть раньше внешнего воздействия на нее, то есть $h(\tau) = 0$ при $\tau < 0$. С учетом этого условия уравнение (7.8) имеет вид

$$\int_0^{\infty} h(\tau') d\tau' [K_2(\tau - \tau') + K_E(\tau - \tau')] = K_2(\tau - \tau_0), \quad \tau > 0,$$

и называется уравнением Винера-Хопфа; его строгое решение может быть получено методом факторизации [3, 4] но в общем случае оказывается сложным для анализа и неприменимым для практических расчетов. Рассмотрим приближенное решение при условии, что задержка τ_0 достаточно велика. В уравнение входит два временных масштаба: время корреляции процесса $\zeta(t)$ и помехи $\xi(t)$. Обозначим их τ_ζ и τ_ξ и для определенности примем, что $\tau_\zeta > \tau_\xi$. Импульсная реакция линейной системы, восстанавливающей с наименьшими в среднеквадратическом искажениями сигнал $\zeta(t)$, должна быть по длительности τ_c , определенной формулой (5.50), сопоставима с корреляционной функцией $K_2(\tau)$ то есть $\tau_c \sim \tau_\zeta$. Если $\tau_0 \gg \tau_\zeta$ то отклик системы, достигающий наибольшей интенсивности спустя время τ_0 после начала воздействия, будет в основном проявляться при $|\tau - \tau_0| \lesssim \tau_\zeta$ и условие $h(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ будет приближенно выполненным. Учитывая это, применим к обеим частям уравнения (7.8) преобразование Фурье по переменной $\tau \in (-\infty, \infty)$ в результате получим

$$H(\omega) [W_2(\omega) + W_E(\omega)] = W_2(\omega) e^{i\omega\tau_0},$$

где $W_2(\omega)$ и $W_E(\omega)$ - энергетические спектры процессов $\zeta(t)$ и $\xi(t)$. Отсюда следует приближенное выражение для частотной характеристики оптимального фильтра

$$H(\omega) = \frac{W_2(\omega) e^{i\omega\tau_0}}{W_2(\omega) + W_E(\omega)}, \quad (7.9)$$

который строго условию физической осуществимости не удовлетворяет.

Используя (7.9), вычислим минимальную дисперсию воспроизведения, для чего запишем (7.7) в спектральном представлении

$$\langle \mu^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |H(\omega)|^2 [W_2(\omega) + W_E(\omega)] - 2H(\omega)W_2(\omega)e^{-i\omega\tau_0} + W_2(\omega) \right\} \frac{d\omega}{2\pi}$$

и подставим найденное выражение для $H(\omega)$ в результате полу-

чим

$$\langle \mu^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_{\xi}(\omega) W_{\zeta}(\omega)}{W_{\xi}(\omega) + W_{\zeta}(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (7.10)$$

Формула (7.10) показывает, что ошибка воспроизведения полезного сигнала $\xi(t)$ оптимальной линейной системой может быть равной нулю тогда, когда энергетические спектры процессов $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ не перекрываются, то есть когда при любых $\omega \in (-\infty, \infty)$

$$W_{\xi}(\omega) W_{\zeta}(\omega) = 0$$

7.3. Задачи

1. На вход линейного обнаружителя поступает прямоугольный импульс

$$S_0(t) = \begin{cases} S_0, & |t| \leq \tau_0/2; \\ 0, & |t| > \tau_0/2, \end{cases}$$

погруженный в белый шум с полосой F . Требуется определить форму сигнала и отношение "сигнал/шум" на выходе согласованного фильтра.

Решение. Сигналу $S_0(t)$ соответствует спектр

$$S_0(\omega) = S_0 \tau_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right) / \left(\frac{\omega \tau_0}{2}\right)$$

Если спектр белого шума $W_0 = \text{const}$, то

$$\sigma_0^2 = \int_{-F/2}^{F/2} W_0 \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{W_0 F}{2\pi}$$

и на выходе согласованного фильтра (7.4) при $\tau F \gg 1$ имеем

$$S(t) = \begin{cases} \frac{S_0^2 \tau}{W_0} \left[1 - \frac{|t - t_0|}{\tau_0}\right], & |t - t_0| < \tau_0; \\ 0, & |t - t_0| > \tau_0 \end{cases}$$

Прямоугольный импульс переходит в треугольный, пиковое значение которого $\bar{x} = S_0^2 \tau_0 / W_0$. Дисперсия шума на выходе равна

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_0 \left| \frac{S^*(\omega)}{W_0} \right|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega) S^*(\omega)}{W_0} \frac{d\omega}{2\pi} = \bar{x}$$

и для отношения "сигнал/шум" (ОСШ) имеем

$$\langle \mu^2 \rangle = \frac{\bar{x}^2}{x} = x = \frac{S_0^2 T_0}{W_0}$$

На входе при этом ОСШ было равным

$$\langle \mu_0^2 \rangle = \frac{S_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{S_0^2}{W_0 F},$$

и выигрыш в ОСШ от согласованной фильтрации равен

$$\langle \mu^2 \rangle / \langle \mu_0^2 \rangle = F T_0 \gg 1$$

Достаточно лишь, чтобы длительность входного импульса T_0 во много раз превосходила характерное время корреляции шума на входе $T_{ш} \sim 2\pi/F$

2. На вход линейного фильтра поступает экспоненциальный видеосигнал

$$S_0(t) = \begin{cases} A e^{-\alpha(t-\tau)} & t \leq T; \\ 0 & t > T \end{cases}$$

на фоне стационарного белого шума $n(t)$.

Определить комплексную частотную характеристику фильтра, обеспечивающего наибольшее отношение "сигнал/шум".

3. Определить импульсную характеристику $h_L(t)$ согласованного фильтра для сигнала

$$S_0(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t & 0 \leq t \leq T; \\ 0 & t > T, \end{cases}$$

смешанного со стационарным белым шумом.

4. Полезный сигнал $S(t)$ можно описать как стационарный случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$K_S(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$$

Определить частотную характеристику оптимального фильтра, воспроизводящего сигнал $S(t)$ с наименьшими в среднеквадратическом искажениями, если на вход фильтра полезный сигнал поступает на фоне статистически независимого стационарного белого шума. Вычислить дисперсию воспроизведения сигнала оптимальным фильтром.

5. На вход ДС - фильтра (рис. 7.1) поступает сигнал

$$x(t) = S(t) + n(t)$$

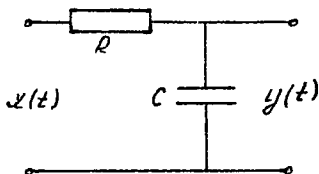


Рис. 7.1

где $S(t)$ - стационарный гауссовский случайный процесс со спектральной плотностью

$$W_S(\omega) = 2\alpha \sigma_S^2 / (\alpha^2 + \omega^2)$$

$$\omega \in (-\infty, \infty)$$

$n(t)$ - статистически независимый от $S(t)$ стационарный нормальный белый шум. Найти оптимальное значение постоянной времени $\tau_c = RC$,

обеспечивающее наименьшую в среднеквадратическом ошибку воспроизведения сигнала $S(t)$

Решение. Дисперсия ошибки определяется формулой (7.7) (в этом случае $\tau_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \langle \mu^2 \rangle &= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\tau') d\tau' h(\tau'') d\tau'' [K_S(\tau' - \tau'') + K_n(\tau' - \tau'')] - \\ &- 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') d\tau' K_S(\tau') + K_S(0) \end{aligned}$$

где $h(\tau)$ - импульсная переходная функция линейного фильтра, $K_S(\tau)$ и $K_n(\tau)$ - корреляционные функции сигнала $S(t)$ и шума $n(t)$. Если перейти к спектральному представлению, то

$$\langle \mu^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ |H(\omega) - 1|^2 W_S(\omega) + |H(\omega)|^2 W_n(\omega) \right\},$$

где $H(\omega)$ - передаточная функция фильтра, $W_n(\omega) \equiv W'_n$ - спектральная плотность шума. Для RC - фильтра

$$H(\omega) = \frac{\beta}{\beta - i\omega}; \quad \beta = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau_c}$$

следовательно, если учесть конкретный вид $W_S(\omega)$ то

$$\langle \mu^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ \frac{2\alpha \sigma_S^2 \omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)(\beta^2 + \omega^2)} + \frac{\beta^2 W_n}{(\alpha^2 + \omega^2)} \right\} = \frac{\alpha \sigma_S^2}{\alpha + \beta} + \frac{\beta W_n}{2}$$

Наименьшее значение μ^2 достигается при β удовлетворяющем условию

$$\frac{d\langle \mu^2 \rangle}{d\beta} = \frac{W_n}{2} - \frac{\alpha \sigma_s^2}{(\alpha + \beta)^2} = 0 \quad \beta > 0$$

Если $W_n < 2\sigma_s^2/\alpha$ то

$$\tau_c = \frac{1}{\beta} = \frac{\sqrt{W_n}}{\sqrt{2\alpha\sigma_s^2 - \alpha W_n}}; \quad \langle \mu^2 \rangle = \sigma_s \sqrt{2\alpha W_n} - \alpha W_n / 2$$

если же $W_n > 2\sigma_s^2/\alpha$ то условие экстремума не выполняется при $\beta > 0$ и наименьшее значение $\langle \mu^2 \rangle = \sigma_s^2$ достигается при $\beta \rightarrow 0$ т.е. $\tau_c \rightarrow \infty$

7.4. Задание к работе

1. Смоделировать реализации процесса "сигнал + шум" на интервале $t \in (0, T)$ определив детерминированный сигнал

$$S_0(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t, & t_1 \leq t \leq t_2, \quad 0 < t_1 < t_2 < T; \\ 0, & 0 < t < t_1, \quad t_2 < t < T \end{cases}$$

и шум $\xi(t)$ - центрированный случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$K_{\xi}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > \omega_0$$

Построить графики трех реализаций процесса при $\lambda^2 = 1; 5; 10$. Для моделирования можно воспользоваться алгоритмами и программами разделов 5.7 и 5.12.4.

2. Используя алгоритм БПФ (раздел 5.12) рассчитать передаточную функцию согласованного фильтра по формуле (7.4).

3. Вычислить значения полезного сигнала (7.1) на выходе согласованного фильтра, применив алгоритм обратного БПФ. Построить график профильтрованного процесса. Определить наибольшее значение ожидаемого полезного сигнала и отношение "сигнал/шум" на выходе фильтра. Исследовать зависимость отношения от λ и α/ω_0

7.5. Форма отчета

Отчет должен содержать:

- задание к работе;
- программу моделирования;
- графики процесса "сигнал+шум" на входе и на выходе согласованного фильтра;
- график амплитудно-частотной характеристики согласованного фильтра;
- график зависимости отношения "сигнал/шум" от k/σ и α/ω_0 ;
- интерпретацию результатов.

7.6. Базовые программы

Подпрограмма (500-530) моделирует видеосигнал и заносит его в массив $C1(N)$. $N1$ $N2$ - моменты появления и окончания сигнала.

```
500 REM СИГНАЛ
505 PRINT "N1, N2" \ INPUT N1, N2
510 PRINT "ЧАСТОТА <= N/2" \ INPUT F0
515 FOR I=1 TO N \ C1(I)=0
520 IF I <= N2 THEN IF I >= N1 THEN C1(I)=A0*SIN(I*2*
525 NEXT I PI*F0/N)
530 RETURN
```

Подпрограмма моделирования шума $Y(N)$ с заданной корреляционной связью (600-699) приведена в разделе 5.7.7 и дополняется фрагментом

```
602 PRINT "ВРЕМЯ КОРРЕЛЯЦИИ" \ INPUT A
604 E = EXP(-T/A) \ Q = SQRT(1-E*E)
```

Подпрограмма БФ (1100-1340) приведена в разделе 5.12.6 и дополняется фрагментом (1332-1336) позволяющим реализовать в зави-

симости ст параметра $D = 1$; 0 прямое и обратное преобразование.

1332 IF D=1 THEN 1340

1334 FOR I=1 TO N

1336 A1(I)=A1(I)/N \ A2(I)=A2(I)/N \ NEXT I

Подпрограмма (700-790) вычисляет:

1. энергетический спектр шума $W\Phi(N)$ по формуле $W'_0(\omega) = \frac{2T_0}{1 + (T_0\omega)^2}$;

2. действительную и мнимую части комплексного спектра сигнала $C1(N)$, $C2(N)$;

комплексного спектра шума $Y(N)$ $Z(N)$;

передаточной функции согласованного фильтра $H1(N)$, $H2(N)$;

3. АЧХ согласованного фильтра H

700 REM СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР

705 PRINT "ЗАДЕРЖКА NФ=" \ INPRNT NФ

710 FOR I=1 TO N \ A1(I)=Y(I) \ A2(I)=0 \ NEXT I

715 D=1 \ GOSUB 1100 \ REM СПЕКТР ШУМА

720 FOR I=1 TO N \ Y(I)=A1(I) \ Z(I)=A2(I)

725 A1(I)=C1(I) \ A2(I)=0 \ NEXT I

730 GOSUB 1100 \ REM СПЕКТР СИГНАЛА

735 WΦ(I)=2*A \ D1=2*DI/(N+1)

740 FOR I=1 TO N/2 \ I1=I*D1 \ J=N-I+1

745 WΦ(I+1)=2*A/(1+A*A*I1*I1) \ WΦ(J)=WΦ(I+1)

750 NEXT I

755 FOR I=1 TO N \ IΦ=(I-1)+2*D1*NФ/N

760 C1(I)=A1(I) \ C2(I)=A2(I)

765 A1(I)=C1(I)/WΦ(I) \ A2(I)=-C2(I)/WΦ(I)

770 H1(I)=A1(I)*COS(IΦ)-A2(I)*SIN(IΦ)

775 H2(I)=A2(I)*COS(IΦ)+A1(I)*SIN(IΦ)

780 H=SQR(H1(I)*H1(I)+H2(I)*H2(I)) \ REM АЧХ ФИЛЬТРА


```
785 PRINT "I=" I " ЧАСТОТА=" I * D1 " АЧХ=" H \ NEXT I
790 RETURN
```

Подпрограмма (800-895) вычисляет значения сигнала $C1(N)$ шума $Y(N)$ смеси сигнала и шума X , наибольшее значение ожидаемого полезного сигнала и отношение "сигнал/шум" на выходе согласованного фильтра.

```
800 REM СИГН+ШУМ НА ВЫХОДЕ ФИЛЬТРА
802 S2 = 0 \ D1 = 0 \ D2 = 0
805 FOR I=1 TO N
810 A1(I) = C1(I) * H1(I) - C2(I) * H2(I)
815 A2(I) = C2(I) * H1(I) + C1(I) * H2(I)
820 NEXT I
825 P = 0 \ GOSUB 1100 \ REM СИГНАЛ НА ВЫХОДЕ
830 FOR I=1 TO N
835 C1(I) = A1(I)
840 A1(I) = Y(I) * H1(I) - Z(I) * H2(I)
845 A2(I) = Z(I) * H1(I) + Y(I) * H2(I)
850 NEXT I
855 GOSUB 1100 \ REM ШУМ НА ВЫХОДЕ
860 FOR I=1 TO N
865 D1 = D1 + A1(I) * A1(I) \ D2 = D2 + A1(I)
870 X = C1(I) * A1(I) \ T0 = T * I
875 PRINT "I=" I " ВРЕМЯ=" T0 " АЧХ=" C1(I) " С+Ш=" X
880 IF C1(I) > S2 THEN S2 = C1(I)
885 NEXT I
887 D = D1 / (N - 1) - D2 * D2 / (N * (N - 1))
890 PRINT " MAX АЧХ=" S2 " АЧХ П.Ш. ВЫХ=" D " С/Ш ВЫХ="
895 RETURN S2 * S2 / D
```

Главная программа

```
10 REM ГЛ. ПРОГР.
15 RANDOMIZE
20 DIM C1(64), C2(64), Y(64), Z(64), A1(64), A2(64),
    H1(64), H2(64) W0(64)
25 PRINT "ЧИСЛО ТОЧЕК N=2**M", "M=" \ INPUT M
30 PRINT "N=" \ INPUT N
35 PRINT "ШАГ=" \ INPUT T
40 PRINT "C1 W НА ВХ.=" \ INPUT A0 \ A0 = SQR(A0)
45 GOSUB 500 \ REM МОДЕЛЬ СУГН C1(I)
50 GOSUB 600 \ REM ШУМ Y(I)
55 GOSUB 700 \ REM АУХ СОГЛАС. ФИЛЬТРА
60 GOSUB 800 \ REM C+Y НА ВЫХ. ФИЛЬТРА
70 STOP
```

8. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В этом разделе приведены сведения о некоторых законах распределения случайных величин, наиболее часто встречающихся в прикладных задачах [1-7, 12]. По каждому закону приводятся следующие данные: физическая предметность закона и область его использования; плотность распределения $f(x)$ и интегральная функция распределения $F(x)$ для непрерывных случайных величин; вероятность $p(k)$ и функция распределения $D(k)$ для дискретных случайных величин; характеристическая функция $\langle e^{iux} \rangle = \varphi(u)$; среднее значение $\langle x \rangle = m_1$, — начальный момент первого порядка;

дисперсия $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle \delta x^2 \rangle = M_2$ — центральный момент второго порядка;

— коэффициент асимметрии $\gamma_1 = \frac{\langle \delta x^3 \rangle}{\sigma^3}$;

коэффициент эксцесса $\gamma_2 = \frac{\langle \delta x^4 \rangle}{\sigma^4} - 3$;

рекомендуемый метод оценки параметров распределения; при этом использованы обозначения:

выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$;

выборочная средняя интенсивность $\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$;

выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$;

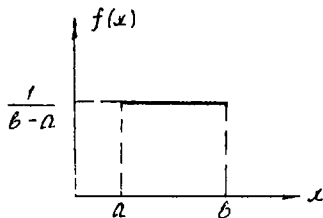
метод моделирования значений случайной величины на ЭВМ; предполагается известным датчик псевдослучайных чисел R_i ($i = 1, 2, \dots, n$), равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$

8.1 Равномерный закон распределения

Равномерное или прямоугольное распределение имеет непрерывная случайная величина x принимающая с равной вероятностью любые значения из некоторого интервала $[a, b]$. Оно характерно, например, для фазы случайного шумового сигнала, квадратурные составляющие которого распределены нормально, широко используется в радиотехнических расчетах, теории надежности, в статистическом моделировании.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x > b \end{cases}$$



$$\varphi(u) = \frac{e^{iub} - e^{iua}}{i u (b-a)}$$

$$M_1 = \frac{a+b}{2} \quad M_2 = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = -1,2$$

Параметры распределения a, b ; их оценки по методу моментов

$$\hat{a} = \bar{x} - s\sqrt{3}; \quad \hat{b} = s\sqrt{12}$$

Алгоритм моделирования случайных значений

$$x_i = (b-a)R_i + a; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

8.2 Нормальный закон

Нормальное распределение — одно из важнейших распределений вероятности, широко используемое в большом числе приложений. Это объясняется тем, что каждый раз, когда случайная величина представляет собой сумму большого числа случайных величин, вносящих примерно одинаковые вклады, распределение вероятности оказывается близким к нормальному. Соответствующие условия определяются центральной предельной теоремой. В качестве примеров можно указать на применение нормального распределения для описания шумов, флуктуирующих сигнала-

лов, турбулентных неоднородностей атмосфер и т.д.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$x \in (-\infty, \infty)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ — интеграл вероятности;

$$\varphi(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$m_1 = a; \quad M_2 = \sigma^2; \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0$$

Параметры распределения a и σ^2 ; метод максимального правдоподобия дает несмещенную оценку для среднего значения

$$\hat{a} = \bar{x}$$

и асимптотически несмещенную / в пределе при неограниченном увеличении объема выборки / оценку для дисперсии

$$\hat{\sigma}^2 = S^2$$

Несмещенная оценка дисперсии по выборке объемом n равна

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} S^2$$

Можно указать несколько алгоритмов моделирования нормальных случайных значений, например,

$$x_i = \left[\sum_{j=1}^K R_{j+i} - \frac{K}{2} \right] / \sqrt{K/12}$$

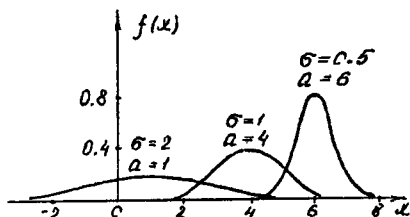
в частности, при $K=12$

$$x_i = \sum_{j=1}^{12} R_{i+j} - 6;$$

или

$$x_i = \sqrt{-2 \ln R_i} \cdot \sin(2\pi R_{i+1}).$$

Оба алгоритма моделируют значения нормальной случайной величины с нулевым средним $a=0$ и дисперсией $\sigma^2=1$

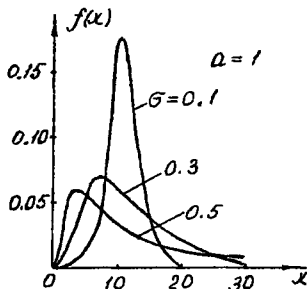


8.3 Логарифмически-нормальный закон

Случайная величина имеет логарифмически-нормальное распределение вероятности, если ее логарифм распределен нормально. Это распределение используется для описания замираний амплитуды сигналов в каналах связи с рассеянием, хорошо аппроксимирует распределение атмосферных и промышленных помех.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0); \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \cdot e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ \Phi\left(\frac{\ln x - a}{\sigma}\right), & x \in (0, \infty) \end{cases}$$



$$\varphi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} e^{-a k + \frac{k^2 \sigma^2}{2}};$$

$$m_1 = e^{\frac{a}{\sqrt{E}}} \quad E = e^{\sigma^2}; \quad M_2 = e^{2a} E(E-1);$$

$$\gamma_1 = (E+2)(E-1)^{1/2}; \quad \gamma_2 = E^4 + 2E^3 + 3E^2 - 6$$

Параметры распределения a и σ^2 ; метод максимального правдоподобия дает несмещенную оценку для среднего значения логарифма случайной величины

$$\hat{a} = \overline{\ln x}$$

и асимптотически несмещенную / в пределе при неограниченном увеличении объема выборки / оценку для дисперсии логарифма

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{a})^2 = S_{\ln}^2$$

Несмещенная оценка дисперсии логарифма по выборке объема n равна

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} S_{\ln}^2$$

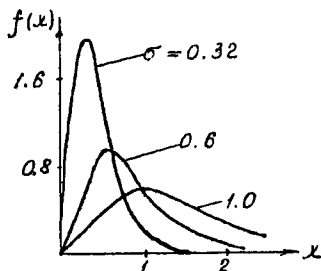
При моделировании целесообразно воспользоваться алгоритмами моделирования нормальных случайных значений, чтобы получить значения $\sqrt{2}x$ / см. раздел 8.2 /, а затем преобразовать их в значения логнормальной случайной величины x

8.4 Закон Рэлея

Распределению Рэлея подчиняется модуль вектора на плоскости, если его ортогональные составляющие / проекции на координатные оси / независимы и распределены нормально с нулевыми средними значениями и равными дисперсиями. Примером рэлеевской случайной величины является амплитуда нормального шумового сигнала. Закон Рэлея применяется для описания замираний сигналов при тропосферном и ионосферном рассеянии, при расчете надежности электронных приборов и т. д.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0), \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$



$$\varphi(u) = 1 + \sqrt{2\pi} (iu\sigma) \Phi(iu\sigma) e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}};$$

$$m_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \quad M_2 = \frac{4 - \pi}{2} \sigma^2;$$

$$\gamma_1 = \frac{2\sqrt{\pi}(\pi - 3)}{(4 - \pi)^{3/2}}; \quad \gamma_2 = \frac{6\pi^2 - 24\pi + 16}{(4 - \pi)^2}$$

Значение σ^2 по методу максимального правдоподобия имеет оценку

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2} x^2$$

Алгоритм моделирования ралеевских случайных значений

$$x_i = \sigma \sqrt{-2 \ln R_i}$$

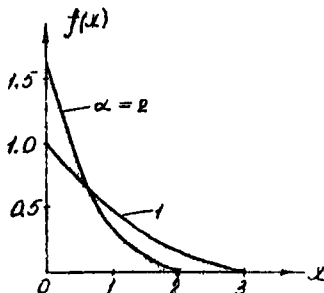
8.5 Экспоненциальный закон

Квадрат ралеевской случайной величины имеет экспоненциальное распределение. В теории распространения радиоволн этот закон применяется к описанию интенсивности принимаемых сигналов. Он также широко используется в теории массового обслуживания, при описании потоков импульсов.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$\varphi(u) = \frac{\alpha}{\alpha - iu}$$



$$m_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad M_2 = \frac{1}{\alpha^2}; \quad \gamma_1 = 2; \quad \gamma_2 = 6$$

Метод максимального правдоподобия дает несмещенную оценку параметра

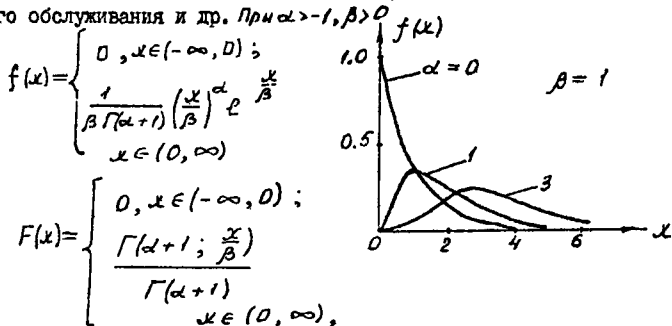
$$\hat{\alpha} = 1/\bar{x}$$

Алгоритм моделирования случайных значений

$$x_i = -\frac{1}{\alpha} \ln R_i$$

8.6 Гамма-ре пределение

Сумма независимых случайных величин, каждая из которых распределена по экспоненциальному закону, подчиняется гамма-распределению вероятности. Это распределение, очевидно, более общее, чем экспоненциальное, и переходит в него в случае одной величины. Гамма-распределение применяется для описания импульсной реакции каналов связи с рассеянием, широко используется в теории надежности, в теории массового обслуживания и др. При $\alpha > -1, \beta > 0$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ \frac{\Gamma(\alpha+1; \frac{x}{\beta})}{\Gamma(\alpha+1)} & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt$ - гамма-функция Эйлера,

$\Gamma(\alpha+1, x) = \int_x^\infty t^\alpha e^{-t} dt$ - неполная гамма-функция [17]

Характеристическая функция гамма-распределения

$$\varphi(u) = \frac{1}{(1 - iu\beta)^{\alpha+1}};$$

$$m_1 = (\alpha+1)\beta; \quad M_2 = (\alpha+1)\beta^2; \quad \gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha+1}} \quad \gamma_2 = \frac{6}{\alpha+1}$$

Параметры распределения α и β по методу моментов оцениваются значениями

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{\bar{S}}{S}\right)^2 - 1; \quad \hat{\beta} = \frac{S^2}{\bar{S}}$$

Моделирование случайных значений может быть выполнено по алгоритму

$$x_i = -\beta \ln \left(\prod_{j=1}^{\alpha+1} R_{i+j} \right)$$

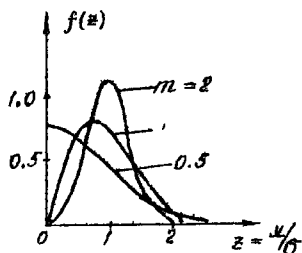
при α - целом и $i = 1, 2, \dots, n - (\alpha + 1)$

8.7 Распределение Накагами

Распределение Накагами или m -распределение обобщает одностороннее нормальное распределение и распределение Рэлея. Оно широко применяется в теории связи, в частности, в теории оптимального приема. В качестве примера можно указать, что m -распределение хорошо описывает флуктуации амплитуды сигнала при многолучевом распространении волн.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m x^{2m-1} \cdot e^{-\frac{mx^2}{\sigma^2}}, & \\ m \geq \frac{1}{2} & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ \frac{\Gamma(m, \frac{mx^2}{\sigma^2})}{\Gamma(m)}, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$



$$\varphi(u) = \frac{\Gamma(2m)}{2^{2m-1} \Gamma(m)} \cdot e^{-\frac{u^2 \sigma^2}{8m}} D_{-2m} \left(-\frac{i u \sigma}{\sqrt{2m}} \right),$$

где $D_{-2m}(z)$ - функция параболического цилиндра, определяемая интегралом [1*]

$$D_{-2m}(z) = \frac{e^{\frac{z^2}{4}}}{\Gamma(2m)} \int_0^{\infty} e^{-zx - \frac{x^2}{2}} x^{2m-1} dx$$

$$m_1 = \frac{\sigma \Gamma(m + \frac{1}{2})}{\sqrt{m} \Gamma(m)}; \quad M_2 = \sigma^2 - m_1^2; \quad \gamma_1 = \frac{M_3}{M_2^{3/2}}, \quad \text{где}$$

$$M_3 = \frac{\sigma^3}{m^{3/2}} \left[\left(\frac{1}{2} - 2m \right) \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)} + 2 \frac{\Gamma^3(m + \frac{1}{2})}{\Gamma^3(m)} \right];$$

$$\gamma_2 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3, \quad \text{где}$$

$$M_4 = \frac{\sigma^4}{m} \left[(m+1) + \frac{4(1-m)\Gamma^2(m + \frac{1}{2})}{\Gamma^2(m)} - \frac{3}{m} \frac{\Gamma^4(m + \frac{1}{2})}{\Gamma^4(m)} \right]$$

Метод максимального правдоподобия приводит к следующей оценке параметра σ

$$\hat{\sigma}^2 = \bar{x}^2$$

и определяет оценку параметра m как решение трансцендентного уравнения

$$\ln \hat{m} - \psi(\hat{m}) = \ln \bar{x}^2 - \overline{\ln x^2}$$

где $\psi(x)$ - логарифмическая производная гамма-функции

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x).$$

известная также как пси-функция [17]

При моделировании значений случайной величины x подчиняющейся m -распределению, целесообразно воспользоваться алгоритмом моделирования $2m$ независимых нормально распределенных случайных величин

$$C_1, C_2, \dots, C_m \quad \text{и} \quad S_1, S_2, \dots, S_m$$

с нулевыми средними значениями и дисперсиями σ^2 определив затем значения x по их значениям следующим образом:

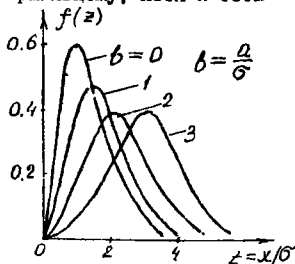
$$x = \sqrt{\frac{1}{2m} \sum_{j=1}^m (S_j^2 + C_j^2)}$$

8.8. Распределение Райса (обобщенное распределение Рэлея)

Распределение Райса в статистической физике ассоциируется прежде всего с распределением огибающей смеси высокочастотного сигнала и нормального аддитивного шума. При малом отношении сигнал/шум распределение Райса переходит в распределение Рэлея; при сильном полезном сигнале, когда влияние шума мало, распределение огибающей становится сосредоточенным и приближается по форме к нормальному, хотя и остается определенным лишь на положительной полуоси

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ -\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2} I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right), & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

здесь $I_0(z)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [17]



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right)^k \Gamma(k+1, \frac{x^2}{2\sigma^2}), & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

При $\frac{\alpha}{\sigma} \ll 1$ распределение Райса мало отличается от распределения Рэлея. Разлагая функцию Бесселя в степенной ряд и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

$$f(x) \approx \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + \alpha^2}{2\sigma^2}} \left(1 + \frac{\alpha^2 x^2}{4\sigma^4}\right) \quad \frac{x}{\sigma} < \frac{\sigma}{\alpha}$$

Если $\alpha/\sigma \gg 1$ то функцию Бесселя можно заменить асимптотическим разложением

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 + \frac{1}{8z} + \frac{9}{128z^2} + \dots\right),$$

после чего плотность вероятности примет вид

$$f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} \left(1 + \frac{\sigma^2}{8\alpha x}\right) \sqrt{\frac{x}{\alpha}} \quad \frac{x}{\sigma} > \frac{\sigma}{\alpha}$$

близкий к нормальному в окрестности максимума распределения.

Среднее значение равно

$$m_1 = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\alpha^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{\alpha^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{\alpha^2}{4\sigma^2}\right) \right] e^{-\frac{\alpha^2}{4\sigma^2}}$$

Второй начальный момент $m_2 = 2\sigma^2 + \alpha^2$

Если $\alpha/\sigma \gg 1$ то $m_1 \approx \alpha \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2\right]$,

$$M_2 \approx \sigma^2 \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2\right]$$

При моделировании случайной величины, подчиняющейся распределению Райса с параметрами α и σ необходимо сначала смоделировать две независимых нормально распределенных величины C и S с различными средними значениями $\langle C \rangle^2 + \langle S \rangle^2 = \alpha^2$ и равными дисперсиями σ^2 после чего рассчитать значения $x = \sqrt{C^2 + S^2}$

8.9. Распределение Коши

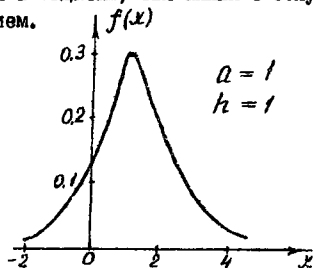
Распределению Коши подчиняется отношение двух независимых случайных величин, имеющих одно и то же нормальное распределение. В качестве другого примера можно указать распределение тангенса случайного угла, если значения угла равновероятны на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Это распределение часто используется в задачах, связанных с облучением предметов направленным излучением.

$$f(x) = \frac{h}{\pi} \frac{1}{h^2 + (x-a)^2}$$

$$x \in (-\infty, \infty);$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{h};$$

$$\varphi(u) = e^{iua - h/|u|}$$



Математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение Коши, не существует, второй начальный момент бесконечен. Параметр a является модой и медианой. Его оценка \hat{a} может быть сделана по положению центра симметрии распределения, после чего по максимальному значению плотности f_{max} можно рассчитать оценку

$$\hat{h} = 1/\pi f_{max}$$

Моделирование значений величины, имеющей распределение Коши, может производиться по алгоритму

$$x_i = a + h \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (2R_i - 1).$$

8.10. Распределение Пирсона или χ^2 - распределение

Это распределение является частным случаем гамма-распределения / см. раздел 8.6 / со значениями параметров

$$\alpha = \frac{n}{2} - 1 \quad \beta = 2$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым средним значением и единичной дисперсией. Сумму их квадратов

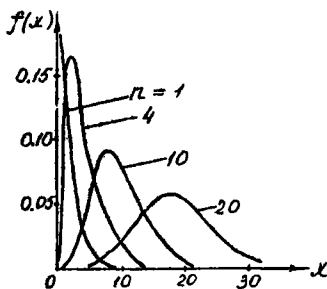
$$\chi = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \chi^2$$

будем называть случайной величиной χ^2 с n степенями свободы. Ее распределение будет распределением Пирсона.

Выделение этого случая гамма-распределения обусловлено, в частности, тем, что один из критериев проверки согласия эмпирических данных с гипотетической функцией распределения основан на свойствах χ^2 -статистики Пирсона, имеющей распределение, асимптотически приближающееся при увеличении числа наблюдений к распределению χ^2 независимо от вида распределения.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ \frac{1}{2 \Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ \frac{\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{x}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} & x \in (0, \infty). \end{cases}$$



$$\varphi(u) = (1 - 2i u)^{-\frac{n}{2}};$$

$$m_1 = n; \quad M_2 = 2n; \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{8}{n}}, \quad \gamma_2 = \frac{12}{n}$$

Оценка параметра n по методу моментов равна выборочному среднему $\hat{n} = \bar{x}$.

Алгоритм моделирования значений случайной величины при четном $n = 2m$

$$x_i = -\frac{1}{2} \ln \prod_{j=1}^m R_{i+j},$$

при нечетном $n = 2m + 1$

$$x_i = -\frac{1}{2} \ln \prod_{j=1}^m R_{i+j} + y_i^2,$$

где y_i - значение независимой нормально распределенной величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

8.11. Распределение Стьюдента

Пусть F - нормальная случайная величина с нулевым средним значением и единичной дисперсией, а χ^2 - независимая случайная величина, имеющая распределение Пирсона с n степенями свободы. Тогда отношение

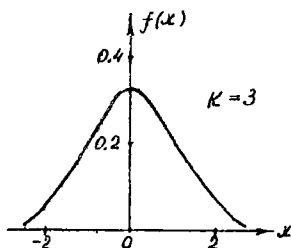
$$x = \frac{F}{\sqrt{\chi^2/n}}$$

имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы. Распределение Стьюдента широко используется в теории ошибок, при оценке доверительных интервалов и доверительных вероятностей. Это обусловлено тем, что зачастую выборочное среднее значение ошибок измерения можно принять за нормальную случайную величину ξ , а выборочную дисперсию ошибок - за величину η^2/n

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

$x \in (-\infty, \infty);$

$$F(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_{-\infty}^x (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} dt;$$



$$\varphi(u) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} e^{iut} dt$$

Распределение Стьюдента с n степенями свободы имеет конечные моменты порядка не выше $n-1$. При $n=1$ распределение Стьюдента переходит в распределение Коши, для которого не существует даже среднее значение,

При $n \geq 2$ $m_1 = 0$; при $n \geq 3$ $M_2 = \frac{n}{n-2}$;

при $n \geq 4$ $\gamma_1 = 0$; при $n \geq 5$ $\gamma_2 = \frac{6}{n-4}$

Оценка параметра n по методу моментов

$$\hat{n} = 2S / (S-1)$$

Алгоритм моделирования случайной величины, имеющей распределение Стьюдента, очевиден из данной ей интерпретации. При $n \geq 30$ ее можно моделировать как нормальную величину с нулевым средним значением

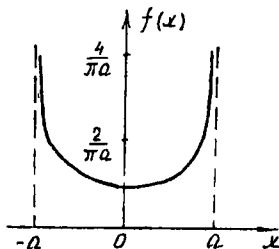
и единичной дисперсией.

8.12. Закон арксинуса

Этот закон описывает распределение мгновенных значений синусоидального сигнала со случайной фазой. Применяется к описанию случайных гармонических колебаний.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} & |x| < a; \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -a; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, & |x| < a; \\ 1 & x > a \end{cases}$$



$\varphi(u) = J_0(\alpha u)$ - функция Бесселя нулевого порядка [17].

$$m_1 = 0; \quad M_2 = \frac{\alpha^2}{2}; \quad \gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = -1,5$$

Для параметра α оценка по методу моментов равна

$$\hat{\alpha} = \sqrt{2S}$$

Алгоритм моделирования случайных значений

$$x_i = a \sin \left[\pi \left(R_i - \frac{1}{2} \right) \right]$$

8.13. Дискретный равномерный закон

Предположение о равной вероятности всех значений дискретной случайной величины часто используется в задачах статистической теории связи, при описании цифровых систем обработки экспериментальных данных.

Пусть возможные значения дискретной случайной величины K - целые числа от 1 до n . Если все они равновероятны, то

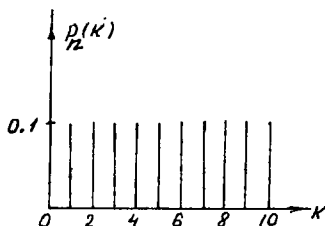
$$p_n(k) = \frac{1}{n} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$D_n(k) = \frac{k}{n}$$

Характеристическая функция

$$\varphi(u) = \frac{e^{iu}}{n} \frac{1 - e^{iu n}}{1 - e^{iu}}$$

$$M_1 = \frac{n+1}{2}; M_2 = \frac{n^2-1}{12}; \gamma_1 = 0; \gamma_2 = -1,2 + \frac{4}{n^2-1}$$



Значение параметра n по методу моментов оценивается величиной

$$\hat{n} = \sqrt{12 S^2 + 1}$$

Моделирование значений случайной величины K осуществляется по алгоритму

$$K = E[nR_k + 0,5] \text{ где } E(x) \text{ означает целую}$$

часть x

8.14. Геометрическое распределение

Большое число статистических задач включает рассмотрение последовательности независимых испытаний, которые могут иметь только два взаимно исключающих исхода с постоянными вероятностями p и $(1-p)$. Такая схема испытаний известна как схема Бернулли. Один из исходов свяжем с появлением ожидаемого события, второй - с отсутствием его.

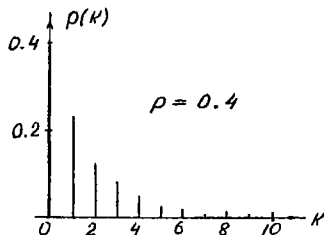
Геометрическое распределение определяет вероятность того, что ожидаемое событие появится при $(k+1)$ -м испытании после k испытаний с противоположными исходами.

$$p(k) = p(1-p)^k \\ k = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(k) = 1 - (1-p)^k$$

Характеристическая функция

$$\varphi(u) = \frac{p}{1 - (1-p)e^{iu}}$$



$$m_1 = \frac{1-\rho}{\rho} ; M_2 = \frac{1-\rho}{\rho^2} ; \gamma_1 = \frac{2-\rho}{\sqrt{1-\rho}} ; \gamma_2 = 6 + \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

По последовательности испытаний, оборванной при появлении первого события, значение параметра ρ оценивается методом максимального правдоподобия следующей величиной

$$\hat{\rho} = 1/(\kappa + 1).$$

Алгоритм моделирования случайных значений κ определяется формулой

$$\kappa = E[\ln R_\kappa / \ln(1-\rho)] + 1$$

§ 15. Биномиальное распределение (Бернулли)

Биномиальное распределение определяет вероятность того, что в последовательности из n независимых испытаний, соответствующих схеме Бернулли, ожидаемое событие наступит ровно κ раз.

Рассмотрим поток электронов в вакуумном триоде. Из n электронов, вылетевших из катода за некоторый промежуток времени, только $\kappa < n$ достигнет анода, остальные $n - \kappa$ электронов осядут на сетке.

Если ρ - вероятность попадания одного электрона на анод, то число κ электронов, достигших анода, подчиняется биномиальному распределению

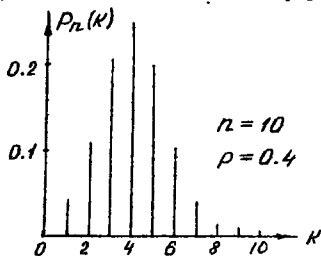
$$P_n(\kappa) = C_n^\kappa \rho^\kappa (1-\rho)^{n-\kappa},$$

$$\kappa = 0, 1, 2, \dots, n;$$

$$D_n(\kappa) = \sum_{j=0}^{\kappa} C_n^j \rho^j (1-\rho)^{n-j},$$

$$\varphi(u) = [1 + \rho(e^{iu} - 1)]^n.$$

$$m_1 = n\rho; M_2 = n\rho(1-\rho); \gamma_1 = \frac{1-2\rho}{\sqrt{n\rho(1-\rho)}}, \gamma_2 = \frac{1-6\rho(1-\rho)}{n\rho(1-\rho)}$$



Параметр ρ по методу максимального правдоподобия имеет оценку

$$\hat{\rho} = \kappa/n$$

Моделирование случайных значений можно производить так называемым "методом браковки": берется n независимых случайных чисел R_i , $i = 1, 2, \dots, n$ и подсчитывается количество K тех из них, значения которых не превышает ρ . При этом K можно рассматривать как выборочное значение случайной величины, имеющей биномиальное распределение.

8.16. Гипергеометрический закон

Типичная схема, в которой проявляется гипергеометрическое распределение, соответствует задаче контроля качества продукции: проверяется партия, содержащая $N\rho$ годных и $N(1-\rho)$ негодных изделий. Из нее случайным образом отбирают n изделий. Число K годных изделий среди выбранных подчиняется гипергеометрическому распределению.

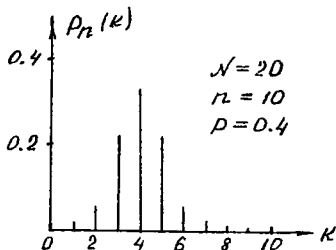
$$P_n(K) = \frac{C_{N\rho}^K C_{N(1-\rho)}^{n-K}}{C_N^n}, \quad K=0, 1, 2, \dots, n;$$

$$P_n(K) = \sum_{j=0}^K \frac{C_{N\rho}^j C_{N(1-\rho)}^{n-j}}{C_N^n};$$

$$P(u) = \sum_{k=0}^{N\rho} \frac{C_{N\rho}^k C_{N(1-\rho)}^{n-k}}{C_N^n} e^{-ku};$$

$$M_1 = n\rho; \quad M_2 = n\rho(1-\rho) \frac{N-n}{N-1};$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{N-1}{N-2}} \cdot \left[\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} - \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} \right] \left[\sqrt{\frac{N-n}{n}} - \sqrt{\frac{n}{N-n}} \right]$$



При известных объемах партии N и выборки n по числу K годных изделий оценивается параметр ρ методом моментов

$$\hat{\rho} = K/n$$

При моделировании значений случайной величины κ можно воспользоваться следующей процедурой. Пусть R_i $i=1, 2, \dots, \mathcal{N}$ - независимые равномерно распределенные на $[0, 1]$ случайные величины. Будем считать "успехом" событие $R_i < \rho_i$ где ρ_i вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \mathcal{N}; \quad \mathcal{N}_i = \mathcal{N} - i + 1; \\ \rho_{i+1} &= (\mathcal{N}_i \rho_i - \alpha_i) / (\mathcal{N} - i) \end{aligned}$$

причем

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{если } R_i \geq \rho_i, \\ 1 & \text{если } R_i < \rho_i \end{cases}$$

Число "успехов" будет искомым случайным числом.

8.17. Распределение Пуассона

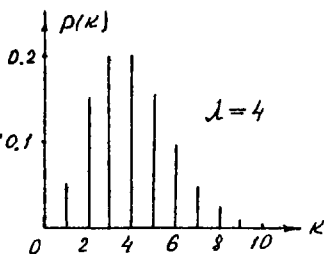
Распределение Пуассона непосредственно связано со свойствами потоков независимых событий, какими при определенных предположениях можно считать поток телефонных вызовов, поток электронов в электровакуумных приборах и т.п. Распределение Пуассона широко применяется в различных прикладных задачах.

Рассмотрим поток независимых событий с плотностью λ которую можно понимать как среднее число событий, происходящих за единичный интервал времени. Будем считать, что вероятность появления одного события за бесконечно малый интервал Δt равна $\lambda \Delta t$ а вероятность появления двух и более событий за Δt - величина более высокого порядка малости, которой можно пренебречь. Тогда вероятность появления κ событий за время t определяется законом Пуассона

$$\begin{aligned} \rho(\kappa) &= \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda} \\ \kappa &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

где $\lambda = \lambda t$ - среднее число событий, происходящих за время t

$$\begin{aligned} \rho(\kappa) &= \sum_{j=0}^{\kappa} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}; \\ \varphi(\lambda) &= e^{-\lambda} (1 - e^{i\mu}); \end{aligned}$$



$$m_1 = \lambda; M_2 = \lambda; \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}; \gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$$

Оценка параметра λ по числу κ реализовавшихся за фиксированное время t событий как методом максимального правдоподобия, так и методом моментов приводит к результату

$$\lambda = \kappa \quad \text{или} \quad \gamma = \kappa/t$$

Распределение интервалов τ между двумя последовательными событиями определяется экспоненциальным законом с плотностью

$$f(\tau) = \gamma e^{-\gamma\tau} \quad \tau \in (0, \infty),$$

что может быть использовано для моделирования пуассоновского потока событий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

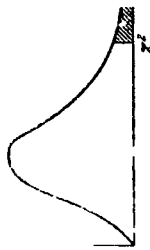
Функция ошибок

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,0000	0011	0023	0034	0045	0050	0068	0079	0090	0102
1	0113	0124	0135	0147	0158	0169	0181	0192	0203	0214
2	0226	0237	0248	0260	0271	0282	0293	0305	0316	0327
3	0338	0350	0361	0372	0384	0395	0406	0417	0429	0440
4	0451	0462	0474	0485	0496	0507	0519	0530	0541	0553
5	0564	0575	0588	0598	0609	0620	0631	0643	0654	0665
6	0676	0688	0699	0710	0721	0732	0744	0755	0766	0777
7	0789	0800	0811	0822	0834	0845	0856	0867	0878	0890
8	0901	0912	0923	0934	0946	0957	0968	0979	0990	1002
9	1013	1024	1035	1046	1058	1069	1080	1091	1102	1113
10	1125	1136	1147	1158	1169	1180	1192	1203	1214	1225
1	1236	1247	1259	1270	1281	1292	1303	1314	1325	1336
2	1348	1359	1370	1381	1392	1403	1414	1425	1436	1448
3	1459	1470	1481	1492	1503	1514	1525	1536	1547	1558
4	1589	1581	1592	1603	1614	1625	1636	1647	1658	1669
5	1680	1691	1702	1713	1724	1735	1746	1757	1768	1779
6	1790	1801	1812	1823	1834	1845	1856	1867	1878	1889
7	1900	1911	1922	1933	1944	1955	1966	1977	1988	1998
8	2009	2020	2031	2042	2053	2064	2075	2086	2097	2108
9	2118	2129	2140	2151	2162	2173	2184	2194	2205	2216
20	2227	2238	2249	2260	2270	2281	2292	2303	2314	2324
1	2335	2346	2357	2368	2378	2389	2400	2411	2421	2432
2	2443	2454	2464	2475	2486	2497	2507	2518	2529	2540
3	2550	2561	2572	2582	2593	2604	2614	2625	2636	2646
4	2657	2668	2678	2689	2700	2710	2721	2731	2742	2753
5	2763	2774	2784	2795	2806	2816	2827	2837	2848	2858
6	2869	2880	2890	2901	2911	2922	2932	2943	2953	2964
7	2974	2985	2995	3006	3016	3027	3037	3047	3058	3068
8	3079	3089	3100	3110	3120	3131	3141	3152	3162	3172
9	3183	3193	3204	3214	3224	3235	3245	3255	3266	3276
30	3286	3297	3307	3317	3327	3338	3348	3358	3369	3379
1	3389	3399	3410	3420	3430	3440	3450	3461	3471	3481
2	3491	3501	3512	3522	3532	3542	3552	3562	3571	3581
3	3593	3603	3613	3623	3633	3643	3653	3663	3674	3684
4	3694	3704	3714	3724	3734	3744	3754	3764	3774	3784
5	3794	3804	3814	3824	3834	3844	3854	3864	3874	3884
6	3893	3903	3913	3923	3933	3943	3953	3963	3972	3982
7	3992	4002	4012	4022	4031	4041	4051	4061	4071	4080
8	4090	4100	4110	4119	4129	4139	4149	4158	4168	4178
9	4187	4197	4207	4216	4226	4236	4245	4255	4265	4274
40	4284	4294	4303	4313	4322	4332	4341	4351	4361	4370
1	4380	4389	4399	4408	4418	4427	4437	4446	4456	4465
2	4475	4484	4494	4503	4512	4522	4531	4541	4550	4559
3	4569	4578	4588	4597	4606	4616	4625	4634	4644	4653
4	4662	4672	4681	4690	4699	4709	4718	4727	4736	4746
5	4755	4764	4773	4782	4792	4801	4810	4819	4828	4837
6	4847	4856	4865	4874	4883	4892	4901	4910	4919	4928
7	4937	4946	4955	4965	4974	4983	4992	5001	5010	5019
8	5027	5036	5045	5054	5063	5072	5081	5090	5099	5108
9	5117	5126	5135	5143	5152	5161	5170	5179	5187	5196
50	5205	5214	5223	5231	5240	5249	5258	5266	5275	5284

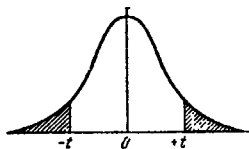
χ^2 - распределение

В таблице приведены значения квантилей $\chi^2_{1-\alpha}(m)$ в зависимости от числа степеней свободы m и вероятности α



Вероятность $P(\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(m))$

α	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,00016	0,0083	0,393	0,0458	0,0612	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	7,879	10,827	13,121	15,492	17,535	20,537
2	0,0201	0,0404	0,103	0,21	0,446	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	10,597	13,801	15,492	17,535	19,599	22,567
3	0,1013	0,185	0,352	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341	12,838	16,266	18,468	20,709	23,688	27,488
4	0,2619	0,428	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,999	13,781	15,509	19,367	21,999	24,433	27,154	31,526
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	7,288	9,236	11,070	13,388	15,086	16,912	21,024	23,888	26,754	30,578	35,564
6	0,672	1,034	1,535	2,004	3,070	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	18,551	22,997	25,988	28,552	32,000	37,152
7	1,139	1,564	2,107	2,632	3,592	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	20,278	24,433	27,324	29,951	33,409	39,152
8	1,640	2,092	2,732	3,438	4,584	11,030	13,362	15,507	18,179	20,080	21,977	26,178	29,154	31,924	35,184	41,901
9	2,088	2,852	3,625	4,538	5,880	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	23,377	27,997	31,578	34,164	38,581	45,989
10	2,558	3,358	4,340	5,465	7,179	13,442	15,987	18,307	21,161	23,009	24,651	29,588	33,178	35,578	40,178	48,581
11	3,053	3,608	4,875	6,578	8,689	14,631	17,275	19,675	22,615	24,296	25,296	30,832	34,209	36,178	41,178	50,178
12	3,571	4,178	5,226	7,604	7,807	15,812	18,349	20,867	23,688	25,296	25,988	32,000	35,178	37,178	42,178	51,178
13	4,107	4,65	5,692	7,942	8,634	16,969	19,462	22,067	24,688	26,178	26,812	33,178	36,178	38,178	43,178	52,178
14	4,660	5,068	6,171	7,790	9,467	18,111	20,611	23,209	25,881	27,004	27,688	34,178	37,178	39,178	44,178	53,178
15	5,229	5,585	6,721	8,547	10,307	19,311	22,007	24,898	28,219	28,144	28,412	35,178	38,178	40,178	45,178	54,178
16	5,812	6,114	7,362	9,312	11,152	20,465	23,342	26,296	29,442	29,178	29,412	36,178	39,178	41,178	46,178	55,178
17	6,402	6,755	8,072	10,085	12,002	21,615	24,769	27,688	30,615	30,178	30,412	37,178	40,178	42,178	47,178	56,178
18	7,015	7,406	8,806	10,865	12,857	22,760	25,889	28,869	31,178	31,178	31,412	38,178	41,178	43,178	48,178	57,178
19	7,633	8,067	9,517	11,651	13,718	23,900	27,004	30,144	32,178	32,178	32,412	39,178	42,178	44,178	49,178	58,178
20	8,260	8,667	10,231	12,443	14,578	25,019	28,144	31,410	33,178	33,178	33,412	40,178	43,178	45,178	50,178	59,178
21	8,897	9,315	10,951	13,240	15,445	26,119	29,412	32,671	34,178	34,178	34,412	41,178	44,178	46,178	51,178	60,178
22	9,542	10,000	11,688	14,041	16,314	27,201	30,615	33,924	35,178	35,178	35,412	42,178	45,178	47,178	52,178	61,178
23	10,195	10,799	12,448	14,848	17,187	28,249	31,412	34,679	36,178	36,178	36,412	43,178	46,178	48,178	53,178	62,178
24	10,856	11,592	13,248	15,659	18,062	29,338	32,178	35,446	37,178	37,178	37,412	44,178	47,178	49,178	54,178	63,178
25	11,524	12,389	14,048	16,473	18,940	30,379	33,178	36,219	38,178	38,178	38,412	45,178	48,178	50,178	55,178	64,178
26	12,198	13,189	14,848	17,292	19,820	31,379	34,178	37,004	39,178	39,178	39,412	46,178	49,178	51,178	56,178	65,178
27	12,878	14,000	15,659	18,114	20,703	32,315	35,178	37,885	40,178	40,178	40,412	47,178	50,178	52,178	57,178	66,178
28	13,565	14,827	16,471	18,927	21,588	33,202	36,178	38,768	41,178	41,178	41,412	48,178	51,178	53,178	58,178	67,178
29	14,253	15,674	17,290	19,768	22,475	34,049	37,178	39,651	42,178	42,178	42,412	49,178	52,178	54,178	59,178	68,178
30	14,953	16,506	18,119	20,599	23,364	34,950	38,178	40,534	43,178	43,178	43,412	50,178	53,178	55,178	60,178	69,178



t-распределение Стьюдента

В таблице приведены значения квантилей $t(m)_{1-\alpha}$ в зависимости от числа степеней свободы m и вероятности α

		Вероятность $P\{ t > t(m)_{1-\alpha}\}$						
$m \backslash$	0,80	0,40	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,325	1,378	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	838,818
2	0,289	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,277	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,011
4	0,271	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,267	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,265	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,263	0,896	1,415	1,893	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,262	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,261	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,260	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,260	0,878	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,259	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,056	4,318
13	0,259	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,258	0,866	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,150
15	0,258	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,258	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,257	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,257	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,257	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,257	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,257	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,256	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,256	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,256	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,256	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,256	0,856	1,315	1,700	2,056	2,470	2,779	3,707
27	0,256	0,855	1,314	1,701	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,256	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,671
29	0,256	0,854	1,311	1,600	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,256	0,854	1,310	1,607	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,255	0,851	1,303	1,681	2,021	2,441	2,704	3,551
60	0,254	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,254	0,845	1,289	1,658	1,960	2,358	2,617	3,373
∞	0,253	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

ЛИТЕРАТУРА.

1. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. - М.: Наука, 1981. - 640 с.
2. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1.: Случайные процессы. - М.: Наука, 1976. - 496 с.
3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника, - М.: Радио и связь, 1982. - 624 с.
4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн.1. - М.: Сов.радио, 1974. - 552 с; Кн.2. - М.: Сов.радио, 1968. - 504 с.
5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: ФМ, 1962. - 564 с.
6. Боровков А.А. Математическая статистика. - М.: Наука, 1984. - 472 с.
7. Куликов Е.И. Методы измерения случайных процессов. - М.: Радио и связь, 1986. - 272 с.
8. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. - М.: Сов.радио, 1971. - 328 с.
9. Рабинер Л., Гоулд Б. Тесрия и применение цифровой обработки сигналов. - М.: Мир, 1978. - 848 с.
10. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королук, Н.И. Феодосид и др. - М.: Наука, 1985. - 640 с.
11. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи. - М.: Сов.радио, 1980. - 544 с.
12. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике. - М.: Связь, 1969. - 448 с.
13. Сборник задач по математике для втузов. / Под ред. А.В. Ефимова. - М.: Наука, 1984. - 608 с.
14. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. - М.: Сов.радио, 1978. - 376 с.
15. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. школа, 1977. - 479 с.
16. Шметтерер Л. Введение в математическую статистику. - М.: Наука, 1976. - 520 с.
17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: ФМ, 1963. - 1100 с.
18. Кукес И.С., Старик М.Е. Основы радиопеленгации. - М.: Сов.радио, 1964. - 640 с.
19. Теоретические основы радиолокации / Под ред. Ширмана Я.Д. - М.: Сов.радио, 1972. - 560 с.
20. Бобровников М.С., Пономарев Г.А., Старовойтова Р.П. Интегральные преобразования в задачах дифракции и распространения радиоволн. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. - 140 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	<u>3</u>
2. Случайные процессы	<u>4</u>
2.1. Понятие случайного процесса	<u>4</u>
2.2. Функции распределения	<u>6</u>
2.3. Статистическое усреднение. Моментные функции	<u>11</u>
2.4. Корреляционная функция	<u>15</u>
2.5. Характеристические функции	<u>19</u>
2.6. Кумулянтные функции. Нормальное распределение ...	<u>22</u>
2.7. Центральная предельная теорема	<u>27</u>
2.8. Свойства нормального процесса	<u>30</u>
2.9. Непрерывность и дифференцируемость случайного процесса	<u>34</u>
2.10. Интегрирование случайного процесса	<u>38</u>
2.11. Задачи	<u>39</u>
3. Функциональные преобразования и моделирование значе- ний случайного процесса	<u>43</u>
3.1. Одномерная функция распределения преобразован- ного процесса	<u>43</u>
3.2. Распределение арксинуса	<u>45</u>
3.3. Распределение процесса на выходе безынерционного квадратичного детектора	<u>45</u>
3.4. Многомерные распределения преобразованных про- цессов	<u>46</u>
3.5. Распределение модуля и фазы вектора с независи- мыми нормальными компонентами	<u>48</u>
3.6. Моделирование выборки случайных значений с за- данным законом распределения	<u>51</u>
3.7. Моделирование нормального распределения	<u>53</u>
3.8. Задачи	<u>55</u>
4. Методы статистического анализа экспериментальных дан- ных	<u>57</u>
4.1. Основные задачи математической статистики	<u>57</u>
4.2. Подготовка статистического материала - выборка и способы ее записи	<u>59</u>
4.3. Оценка среднего значения	<u>61</u>

4.4. Оценка дисперсии	<u>61</u>
4.5. Проверка гипотезы о виде распределения	<u>64</u>
4.6. Задачи	<u>66</u>
*4.7. Моделирование и статистический анализ выборочных значений	<u>69</u>
4.8. Методы оценки параметров распределений	<u>74</u>
4.9. Точность и надежность оценок	<u>79</u>
4.10. Задачи	<u>87</u>
*4.11. Оценка параметров Γ -распределения	<u>90</u>
*4.12. Метод максимального правдоподобия в задаче местопредопределения объекта	<u>99</u>
5. Статистический анализ и моделирование стационарных случайных процессов	<u>117</u>
5.1. Стационарные процессы	<u>117</u>
5.2. Функция корреляции стационарного процесса	<u>119</u>
5.3. Доверительный интервал для коэффициента корреляции	<u>121</u>
5.4. Средние по времени характеристики реализаций	<u>122</u>
5.5. Эргодические случайные процессы	<u>124</u>
5.6. Задачи	<u>129</u>
*5.7. Корреляционный анализ случайного процесса	<u>134</u>
5.8. Спектральное представление стационарного случайного процесса	<u>143</u>
5.9. Линейные преобразования стационарного случайного процесса	<u>150</u>
5.10. Нелинейные безынерционные преобразования стационарного процесса	<u>159</u>
5.11. Задачи	<u>167</u>
*5.12. Спектральный анализ случайного процесса	<u>170</u>
*6. Регрессионный анализ экспериментальных зависимостей	<u>185</u>
6.1. Понятие регрессии	<u>185</u>
6.2. Регрессия значений выходного процесса по значениям процесса на входе системы	<u>188</u>
6.3. Лабораторная работа "Регрессионный анализ экспериментальных зависимостей"	<u>193</u>
*7. Прием сигналов в присутствии шумов	<u>197</u>
7.1. Согласованная фильтрация при обнаружении сигнала	<u>197</u>
7.2. Выделение сигнала из шума	<u>199</u>
7.3. Задачи	<u>202</u>

7.4. Задание к работе	<u>205</u>
7.5. Форма отчета	<u>206</u>
7.6. Базовые программы	<u>206</u>
8. Основные законы распределения вероятностей	<u>210</u>
8.1. Равномерный закон распределения	<u>210</u>
8.2. Нормальный закон	<u>211</u>
8.3. Логарифмически-нормальный закон	<u>213</u>
8.4. Закон Галя	<u>214</u>
8.5. Экспоненциальный закон	<u>215</u>
8.6. Гамма-распределение	<u>216</u>
8.7. Распределение Накагами	<u>217</u>
8.8. Распределение Райса (обобщенное распределение Галя)	<u>218</u>
8.9. Распределение Коши	<u>220</u>
8.10. Распределение Пирсона или χ^2 -распределение ..	<u>220</u>
8.11. Распределение Стьюдента	<u>222</u>
8.12. Закон аркоинуса	<u>223</u>
8.13. Дискретный равномерный закон	<u>223</u>
8.14. Геометрическое распределение	<u>224</u>
8.15. Биномиальное распределение (Бернулли)	<u>225</u>
8.16. Гипергеометрический закон	<u>226</u>
8.17. Распределение Пуассона	<u>227</u>
Приложение	<u>229</u>
Литература	<u>231</u>

Геннадий Александрович Пономарев
Вероника Николаевна Пономарева
Владимир Петрович Якубов

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАДИОФИЗИКЕ

Практикум

с применением диалого-вычислительных комплексов

Редактор Г.В. Астапенко

ИБ 2125 Подписано к печати 18.05.1988 КЗ 02052
Формат 60 x 84 1/16. Бумага типографская №1.
Печать офсетная. Печ. л. 14,75. Усл. печ. л. 13,7.
Уч.-изд. л. 12,4. Тираж 1000 экз. Заказ 8 Цена 40 к.

Издательство ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.
Ротапринт ТГУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4.