

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ**

**КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОФИЗИКИ**

Учебное пособие для студентов 5 курса  
специальности 071500 - «Радиофизика и электроника» физического факультета

Калининград  
1997

УДК 537.86: 519.2

Основы статистической радиофизики: Учебное пособие для студентов специальности 071500-«Радиофизика и электроника» физического факультета / Калинингр. ун-т; Сост. В.Е. Захаров. - Калининград, 1997. - 82 с. с ил.

Учебное пособие является расширенным курсом лекций по курсу «Статистическая радиофизика». Изложены основы статистической теории электрических колебаний и электромагнитных волновых процессов. Рассмотрены случайные колебания и волны в линейных и нелинейных радиофизических системах, в том числе - в системах с переменными и случайными параметрами. Приведены необходимые сведения из теории случайных функций. Общие теоретические положения иллюстрированы решением задач. Предназначено для студентов 5 курса специальности 071500 - «радиофизика и электроника» физического факультета.

Составитель доктор физ. - мат. наук, профессор В.Е. Захаров.

Утверждено кафедрой квантовой радиофизики Калининградского государственного университета.

С Калининградский государственный  
университет, 1997

## ВВЕДЕНИЕ

Радиофизика охватывает два направления: 1) изучение физических явлений, существенных для радиосвязи - генерации электромагнитных сигналов, излучения и распространения электромагнитных волн, приема радиосигналов; 2) изучение методами и средствами радиотехники различных объектов - атомных ядер, молекул, живых организмов, земной атмосферы, небесных тел и т. д. [1]. Статистическая радиофизика изучает случайные явления в радиофизических системах. Предметом статистической радиофизики являются в основном случайные электрические колебания и электромагнитные волны. Проблемы флуктуаций становятся все более существенны по мере увеличения чувствительности измерительных и приемных устройств, повышения точности измерений. Существование флуктуаций связано с наличием у всякой макроскопической системы большого числа степеней свободы. Последние могут быть макроскопическими и микроскопическими. Макроскопические флуктуации характерны для систем с распределенными параметрами. Примеры таких флуктуаций - турбулентность среды и волнение на поверхности моря. Микроскопические флуктуации обусловлены атомизмом вещества и электричества. Примеры таких флуктуаций -

1) тепловые флуктуации различных макровеличин - плотности, давления, температуры, силы тока, напряжения, напряженности электромагнитных полей; все они обусловлены тепловым движением микрочастиц и разнообразны по проявлению - броуновское движение, молекулярное рассеяние света в среде, тепловые шумы в радиотехнике и радиофизике, тепловое излучение тел и т. д.;

2) случайные вариации числа частиц в электронных потоках при термо - и фотоэмиссии - дробовой эффект, непосредственно обусловлен дискретностью микроскопических носителей заряда;

3) случайные локальные вариации эмиссионной способности катодов - эффект мерцания;

4) хаотическое перемагничивание доменов в ферромагнитных сердечниках, находящихся в переменном магнитном поле (магнитные шумы, эффект Баркгаузена).

Математической основой статистической радиофизики является теория случайных функций [2 - 4]. Скалярная или векторная функция одной или нескольких независимых переменных является случайной, если значения ее при произвольной последовательности выбора значений независимых переменных оказываются набором случайных величин. Случайный (стохастический) процесс - случайная функция времени. Случайное поле - случайная функция радиус-вектора точки наблюдения и, вообще говоря, времени. В математическом плане решение задач статистической радиофизики сводится к решению стохастических дифференциальных уравнений. Последние - это линейные или нелинейные дифференциальные уравнения со случайными начальными или краевыми условиями, случайными параметрами (коэффициентами) и случайными внешними силами. Решение таких уравнений - это нахождение средних и корреляционных функций для случайного неизвестного процесса или поля. С помощью стохастич-

ческих методов иногда удается вычислить средние и в том случае, когда сами решения уравнений неизвестны.

Несмотря на многообразие физических систем, в которых протекают случайные явления, подавляющее число явлений удается описать сравнительно небольшим числом математических моделей. Часто для построения модели не требуется знания микроскопической картины процесса и деталей его физического механизма. Например, это имеет место, если выполнены условия центральной предельной теоремы теории вероятностей [2, 3]. Тогда процесс является нормальным (гауссовским), так что известна его многомерная функция распределения. Гауссовское распределение устойчиво только для линейных систем с постоянными или регулярно изменяющимися параметрами [1, 5]. Статистика процесса, распространяющегося в нелинейной системе или в линейной системе со случайными параметрами, может существенно отклоняться от гауссовской. Выполнение для линейных систем принципа суперпозиции позволяет широко использовать аппарат спектрально-корреляционной теории [5, 6].

Исследования по статистике колебаний и волн имеют долгую историю. В конце XIX и в начале XX века главным источником таких задач была оптика. Можно отметить работы Рэля, Мандельштамма и Бриллюэна по рассеянию света. По настоящее время физика рассеяния волн в статистически неоднородных средах остается актуальным разделом статистической радиофизики и оптики. Выяснение особенностей протекания интерференции и дифракции света в поле случайных волн является в основном предметом теории когерентности. Развитие этой теории в 20-е годы XX века и позже связано с работами Майкельсона, Верде, Лауэ, Цернике и других. В 30 - 50-е годы активно разрабатывались методы радиолокации, дальней радиосвязи и радионавигации. Стало ясно, что на всех основных этапах передачи информации с помощью радиоволн (в процессах генерации, модуляции излучения, распространения и приема) статистические явления играют решающую роль. Были исследованы важные задачи статистической радиотехники об электромагнитных флуктуациях (шумах) в радиоустройствах, поиске путей увеличения отношения сигнал/шум и о стабильности работы автогенераторов [7, 8].

В 1928 - 1930 гг. Найквист предложил формулу, описывающую спектральную плотность мощности собственных шумов в активном сопротивлении, вызванных тепловым движением электронов. В 20-е годы были установлены закономерности дробового шума электронных ламп, обусловленных статистическим характером электронной эмиссии [9]. Выяснилось, что случайные э.д.с., возникающие за счет теплового и дробового шума, определяют предельную чувствительность приемных устройств. Открытие Басовым, Прохоровым и Таунсом принципов усиления и генерации электромагнитных волн в квантовых системах позволило создать квантовые парамагнитные усилители. Отсутствие в этих устройствах электронных ламп и использование рабочей температуры, близкой к температуре жидкого гелия, позволило резко снизить в них уровень шумов. В автоколебательных системах собственные электромагнитные флуктуации определяют минимальную предельную ширину спектральной линии излучения. Это

было установлено теоретически в работах Понтрягина, Андропова и Витта в 30-х годах. В 50 - 60 гг. в работах Рытова и Левина установлена связь между тепловыми флуктуациями в квазистационарных цепях и резонаторах и волноводах СВЧ диапазона.

Постановка статистических задач в теории распространения радиоволн в первую очередь была связана с распространением радиоволн в турбулентной атмосфере. Эксперименты по сверхдальному распространению волн УКВ диапазона за пределы прямой видимости, проводившиеся в 50-е гг., показали, что рассеянное атмосферными неоднородностями поле может намного превышать поле, связанное с дифракцией вокруг Земли [10]. Позднее возник новый класс статистических задач в связи с изучением распространения лазерных пучков в турбулентной атмосфере. Актуальной является задача обнаружения сигнала на фоне естественных шумов и искусственных помех и оценки его параметров [11, 12]. Фундаментальные положения теории обнаружения сигналов были заложены в работах Котельникова в 40 - 50 гг.

Основы статистической теории оптических полей были заложены в 20-е гг. Шредингером, который ввел понятие о когерентных состояниях. В 60-е гг. была разработана методика описания когерентности оптических полей на основе квантовой электродинамики [13]. Важными задачами современной статистической оптики является изучение флуктуаций лазерного излучения и разработка методов уменьшения уровня этих флуктуаций, повышения чувствительности оптических приемников. Использование статистики фотоотсчетов позволяет получить информацию о среде, рассеивающей свет, и о самом процессе рассеяния света при распространении в неоднородной среде [5]. Важным результатом явилась разработка нелинейной оптики [14]. В ней, в частности, изучаются влияние временной и пространственной когерентности излучения и статистической неоднородности среды на протекание нелинейных оптических эффектов (нелинейное молекулярное рассеяние, генерация оптических гармоник и параметрические явления в неоднородных кристаллах, нелинейная дифракция и др.). Кроме того, изучается влияние квантовых шумов на протекание нелинейных эффектов.

Со статистическими задачами, сходными задачам статистической радиофизики, приходится сталкиваться в гидродинамике, акустике и физике плазмы (теория турбулентности, физика случайных линейных и нелинейных волн). Для статистической радиофизики, как и для всей физики в целом, большое значение имеет проблема возникновения статистики в нелинейных динамических системах [15]. Выяснилось, что перемешивание, или хаос, может возникать даже в системе с двумя степенями свободы, и появление или отсутствие его зависит лишь от значений параметров или начальных условий задачи. Введение стохастического элемента в динамику среды может происходить за счет сложных нелинейных взаимодействий при отсутствии явных случайных сил. Возникло определение нового свойства нелинейных динамических систем - динамическая энтропия Колмогорова - Синяя. Эта энтропия, будучи инвариантом системы, отразила в количественной форме возможность нелинейной системы совершать движение с перемешиванием.

# 1. ИЗМЕРЕНИЕ И АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

## 1.1. Обнаружение сигнала на фоне шума

Сигнал - случайный физический процесс, отображающий передаваемую информацию. Задача - использовать статистическую теорию для обнаружения сигнала на фоне шума.

Постановка задачи. Наблюдатель измерил реализацию случайного процесса  $x(t)$ , представляющего собой а) шум либо б) смесь детерминированного сигнала  $s(t)$  и шума. Пусть  $q$  - априорная вероятность случая а). При измерении получено  $x(t_1) = x_1$  и  $s(t_1) = s_1$ . Пусть шум - гауссова помеха. Требуется найти, какому из двух случаев: а) или б), лучше соответствует результат измерения.

Решение задачи. Реализация случая а) или б) при измерении - достоверное событие. Поэтому априорная вероятность случая б) равна  $p = 1 - q$ . При гауссовой помехе функция распределения плотности вероятности случайной величины  $x_1$  с дисперсией (средней мощностью шума)  $\sigma^2$  в случае а) равна

$$w_{ш}(x_1) = (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp(-x_1^2 / (2\sigma^2)), \quad (1.1)$$

а в случае б) равна

$$w_{с+ш}(x_1) = (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp(-(x_1 - s_1)^2 / (2\sigma^2)). \quad (1.2)$$

Обозначим  $x_{п}$  - пороговое значение сигнала. Процедура обнаружения сигнала сводится к сравнению:  $x_1 > x_{п}$  - сигнал есть,  $x_1 \leq x_{п}$  - сигнал пренебрежимо мал. Для вычисления  $x_{п}$  применим критерий идеального наблюдателя. Последний обеспечивает минимальную вероятность ошибок обнаружения сигнала. Таких ошибок две. Первая - ложная тревога: по измерению  $x_1 > x_{п}$  делается вывод, что сигнал есть, но на самом деле сигнала нет. Вероятность такой ошибки

$$P_1 = q \int_{x_{п}}^{\infty} w_{ш}(x) dx. \quad (1.3)$$

Вторая ошибка - пропуск сигнала, возникает, если сигнал есть, но, по измерению,  $x_1 \leq x_{п}$  и делается вывод, что сигнала нет. Вероятность этой ошибки

$$P_2 = p \int_{-\infty}^{x_{п}} w_{с+ш}(x) dx, \quad (1.4)$$

и вероятность полной ошибки

$$P = P_1 + P_2 = q \int_{x_{п}}^{\infty} w_{ш}(x) dx + p \int_{-\infty}^{x_{п}} w_{с+ш}(x) dx. \quad (1.5)$$

Минимум  $P$  определяется из условия  $dP/dx_1 = 0$  при  $x_1 = x_{п}$ . При учете (1.1), (1.2) и (1.5) имеем

$$x_{\text{п}} = (s_1 / 2) (1 - 2 \sigma^{-2} / s_1^2 \ln (p / q)). \quad (1.6)$$

Критерий обнаружения сигнала:  $x_1 > x_{\text{п}}$ , с учетом (1.6) имеет вид

$$x_1 s_1 > s_1^2 / 2 - \sigma^{-2} \ln (p / q). \quad (1.7)$$

Процедура вынесения решения по одному измерению груба. Поэтому проводят серию измерений в заданные моменты времени. Пусть для простоты результаты измерений в эти моменты времени статистически независимы. Чтобы обеспечить последнее хотя бы приближенно, надо задать достаточно большой шаг по времени, через который проводятся последующие измерения. Здесь учтено, что с увеличением искомого шага статистическая взаимосвязь результатов измерений ослабевает. По теореме перемножения вероятностей независимых событий [2, 3] многомерную функцию распределения плотности вероятности можно заменить произведением одномерных. Тогда функцию (1.1) следует заменить на  $\prod_{k=1}^n w_{\text{ш}}(x_k)$ , а функцию (1.2) - на  $\prod_{k=1}^n w_{\text{с+ш}}(x_k)$ , где  $k=1, 2, \dots, n$  и  $n$  - число отсчетов по времени. Повторяя выкладки, вместо (1.7) получим

$$\sum_k x_k s_k > \sum_k s_k^2 / 2 - \sigma^{-2} \ln (p / q) = U_0, \quad (1.8)$$

где  $U_0$  - порог обнаружения сигнала.

Рассмотренная задача - один из простейших примеров статистической процедуры обнаружения сигналов. Теория обнаружения сигналов к настоящему времени достаточно разработана [2, 3]. На рис. 1.1 показана схемная реализация условия (1.8) обнаружения сигнала с помощью корреляционного приемника.

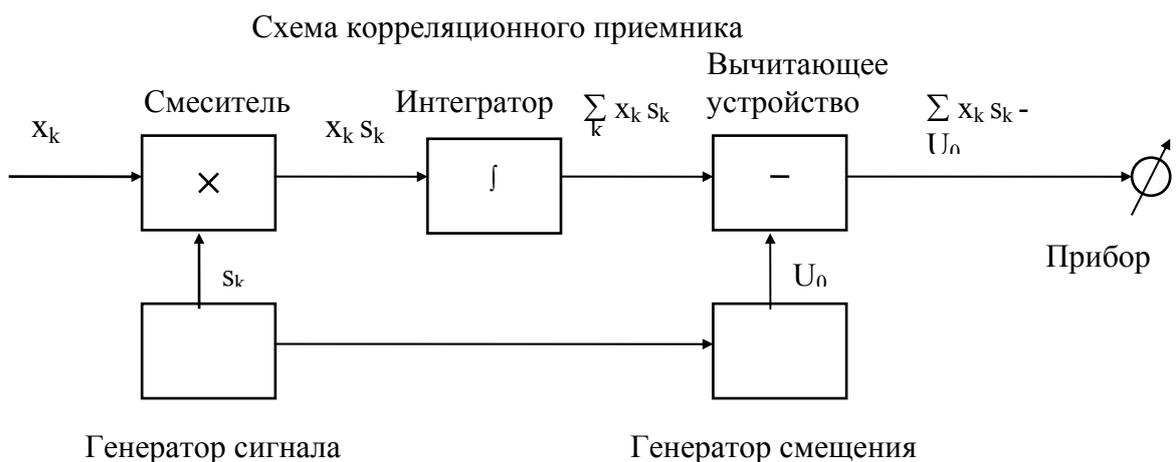


Рис. 1.1

## 1.2. Измерение случайных процессов

Пусть  $x(t)$  - случайный эргодический стационарный процесс [2, 3]. Стационарность означает, что произвольная  $n$ -мерная функция распределения процесса не изменяется при одновременном сдвиге всех точек  $t_1, t_2, \dots, t_n$  на оси времени на одну и ту же величину  $\tau$ , то есть  $w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$ . Отсюда следует, что одномерное распределение вероятностей вообще не зависит от времени:  $w(x, t) = w(x)$ , а двумерное зависит только от разности  $\tau = t_2 - t_1$ , так что  $w(x(t), x(t + \tau); t, t + \tau) = w(x, x_\tau, \tau)$ , где  $x_\tau = x(t + \tau)$ . Эргодический процесс при временном усреднении теряет случайный характер так, что

$$\langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle x \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_t^{t+T} x(t) dt, \quad (1.9)$$

где  $T$  - интервал усреднения,  $\langle x \rangle$  - статистически среднее функции  $x$ , и  $\langle x \rangle_T$  - среднее по времени функции  $x$  на интервале  $T$ .

Эргодический стационарный процесс можно представить как  $x(t) = \langle x \rangle + \xi(t)$ , где  $\xi(t)$  - флуктуационная компонента этого процесса. После усреднения по времени дисперсия:  $\sigma_T^2 = \langle (\langle \xi \rangle_T)^2 \rangle$ , удовлетворяет условию:  $\sigma_T^2 \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$  [2, 3]. В случае эргодического процесса ценность отдельной его реализации возрастает. Путем усреднения одной реализации по времени можно найти всевозможные статистические характеристики случайного процесса, не обращаясь к усреднению по ансамблю. В реальных условиях интервал усреднения  $T$  всегда ограничен по величине. При заданной точности  $\varepsilon$  оценки  $\langle x \rangle$  посредством измерений  $\langle x \rangle_T$  можно оценить необходимый интервал усреднения  $T$  с помощью неравенства:  $\sigma_T / \langle x \rangle \leq \varepsilon$  [5]. На рис. 1.2 показана схема измерения средних по времени характеристик стационарного электрического шума  $x(t)$ .

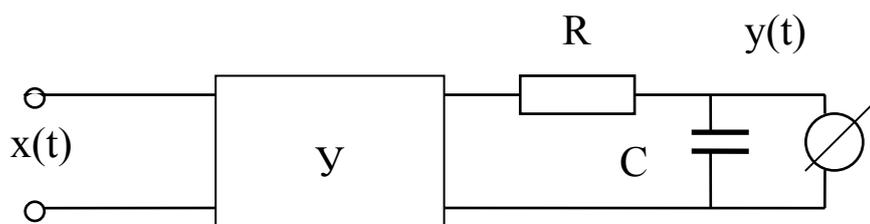


Рис. 1.2

После усилителя  $Y$ , воспроизводящего процесс  $x(t)$  без искажений, стоит интегратор в виде  $RC$  - фильтра с эффективным временем усреднения  $T_0 = RC$  [6]. Затем стоит прибор, измеряющий напряжение. С помощью интеграла наложения показания прибора описываются выражением [6]

$$y(t) = (k/T_0) \int_0^t \exp(-\theta / T_0) x(t - \theta) d\theta, \quad (1.10)$$

где  $k$  - коэффициент усиления усилителя.

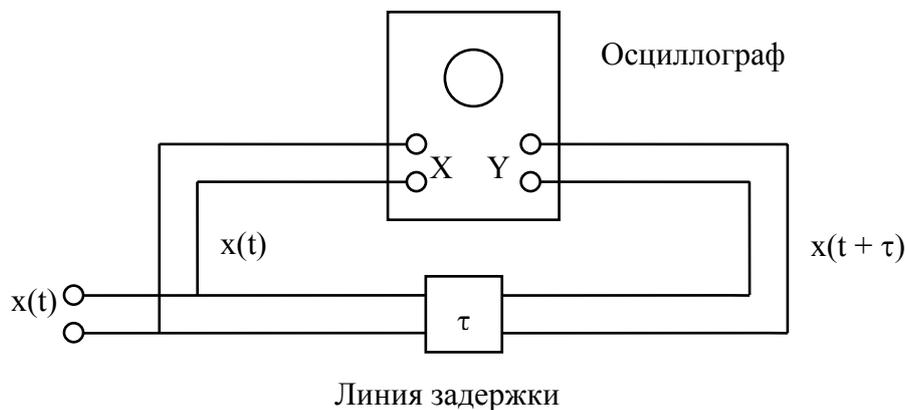
Из (1.10) следует, что время усреднения  $T_0$  должно быть достаточно велико ( $T_0 \gg t$ ), чтобы можно было пренебречь искажением сигнала в интеграторе. Аналогичная схема может быть использована для определения остальных, кроме  $\langle x \rangle$ , моментов функции распределения  $\langle x^m \rangle$ ,  $m = 2, 3, \dots$  и т.д., если между усилителем и интегратором поставить соответствующий детектор. Инерционность детектора дает дополнительно погрешность при проведении измерений.

Теперь обсудим измерение вероятностей эргодических стационарных процессов. Пусть  $P(x_1 < x < x_2)$  - вероятность того, что  $x \in (x_1, x_2)$ . Искомую вероятность можно определить по относительному времени пребывания реализации процесса в интервале  $(x_1, x_2)$

$$P(x_1 < x < x_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} T_{x_1 x_2} / T, \quad (1.11)$$

где  $T_{x_1 x_2}$  - суммарное время пребывания реализации процесса в интервале  $(x_1, x_2)$  за время измерения  $T$ .

Для электрических шумов измерение величины  $T_{x_1 x_2}$  можно выполнить с помощью осциллографа. Необходимое время усреднения  $T$  может быть получено либо за счет выбора экспозиции при фотографировании с экрана трубки, либо за счет инерционности люминофора трубки. В последнем случае представление о распределении вероятности дает распределение яркости свечения по экрану. Схема измерения двумерного распределения случайного стационарного процесса  $w(x, x_\tau, \tau)$  с помощью электронного осциллографа показана на рис. 1.3.



X и Y - входы горизонтальной и вертикальной разверток

Рис. 1.3

Задача. Используя схему измерений рис.1.3, исследовать форму изолиний линий равной яркости на экране осциллографа для нормального распределения

$$w(x, x_\tau, \tau) = (2\pi \sigma^2)^{-1} (1 - R^2)^{-1/2} \exp\{-(x^2 - 2Rxx_\tau + x_\tau^2)/(2\sigma^2(1 - R^2))\} \quad (1.12)$$

с дисперсией  $\sigma^2$  и коэффициентом корреляции  $R(\tau)$  в зависимости от соотношения между временем задержки  $\tau$  и временем корреляции процесса  $\tau_k$ .

Необходимые сведения из теории случайных процессов [4. 6]. Статистическая связь между двумя сечениями  $x(t)$  и  $x_\tau = x(t + \tau)$  случайного процесса характеризуется корреляционной функцией

$$B(t, \tau) = \langle (x - \langle x \rangle) (x_\tau - \langle x_\tau \rangle) \rangle = \langle xx_\tau \rangle - \langle x \rangle \langle x_\tau \rangle, \quad (1.13)$$

где оператор статистического усреднения

$$\langle \dots \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} dx dx_\tau w(x, x_\tau; t, t + \tau), \quad (1.14)$$

и в нормированном виде ( $-1 \leq R \leq 1$ ) - коэффициентом корреляции

$$R(t, \tau) = B(t, \tau) / (\sigma\sigma_\tau), \quad (1.15)$$

где  $\sigma^2$  и  $\sigma_\tau^2$  - значения дисперсии (мощности флуктуаций) случайного процесса  $x$  в моменты времени  $t$  и  $t + \tau$ , соответственно,  $\sigma^2 = B(t, 0)$  и  $\sigma_\tau^2 = B(t + \tau, 0)$ .

Для случайного стационарного процесса  $B(t, \tau) = B(\tau)$  и  $\sigma = \sigma_\tau = \text{const}$ . Характерный интервал времени, на котором происходит заметный спад (в несколько раз) функции корреляции, называется временем корреляции  $\tau_k$ . Время корреляции можно оценить как

$$\tau_k = 2 \int_0^{\infty} R^2(\tau) d\tau. \quad (1.16)$$

Если  $\tau > \tau_k$ , то корреляцией между выбранными сечениями случайного процесса можно пренебречь.

Корреляционную функцию стационарного процесса можно определить также, заменив статистическое усреднение временным. Вместо (1.13) получим

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (\langle x x_\tau \rangle_T - \langle x \rangle_T \langle x_\tau \rangle_T). \quad (1.17)$$

Решение. Линии равной яркости определяются условием:  $w(x, x_\tau, \tau) = \text{const}$ . Используя (1.12), получаем, что искомые линии представляют собой в общем случае эллипсы и описываются уравнением:  $x^2 - 2Rxx_\tau + x_\tau^2 = \text{const}$ . При  $\tau \ll \tau_k$ , когда  $R(\tau) \approx 1$ , вместо эллипсов приближенно получаем прямые линии:  $(x - x_\tau)^2 = \text{const}$ . Напротив, при  $\tau \gg \tau_k$ , когда  $R(\tau) \approx 0$ , получаем окружности:  $x^2 + x_\tau^2 = \text{const}$ .

Схему рис. 1.3 можно использовать и для изучения одномерных функций распределения  $w(x)$  по одномерному распределению яркости на экране осциллографа. Достаточно на  $Y$  - вход осциллографа подать исследуемый сигнал  $x(t)$ , а

на X - пластины осциллографа подать сигнал развертки. Экспериментальная оценка функции корреляции (1.17) может быть проведена в два этапа. Для измерения величин  $\langle x \rangle_T$  и  $\langle x_\tau \rangle_T$  можно использовать схему рис. 1.2. Для измерения величины  $\langle x x_\tau \rangle_T$  схему рис. 1.2 следует изменить, включив в нее дополнительно линию задержки и перемножитель сигналов. Перечисленные методы измерения и анализа случайных процессов называют аналоговыми. Широкие возможности цифровых ЭВМ в ряде случаев делают более предпочтительной цифровую обработку реализаций случайных процессов [6, 12, 16].

### 1.3. Цифровая обработка случайных процессов

В качестве примера обработки рассмотрим дискретизацию случайного непрерывного сигнала и обратную процедуру - восстановление непрерывного сигнала. Технически дискретизация осуществляется с помощью аналого-цифровых преобразователей (АЦП), восстановление - с помощью цифро-аналоговых преобразователей (ЦАП) [6, 17]. Это преобразование необходимо для непрерывного сигнала, например, перед обработкой на цифровой ЭВМ или перед передачей по цифровому каналу связи. Передача информации в цифровой форме, а не в аналоговой, позволяет повысить информационную емкость каналов связи, их помехоустойчивость, снизить затраты энергии на передачу.

Под дискретизацией понимается замена непрерывного сигнала  $x(t)$ , заданного на интервале  $(0, T)$ , совокупностью координат  $c_1, c_2, \dots, c_N$ . Простейшим является дискретное временное представление, когда  $c_k = x(t_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Сигналов, которые одновременно имеют ограниченную длительность и ширину спектра, не существует. В реальных условиях длительность измерений всегда ограничена. В инженерных расчетах обычно учитывают ту часть спектра сигнала, в которой сосредоточено не менее 80 - 85 % его энергии. Для модели сигнала с ограниченным частотным спектром  $(0, F)$  решение задачи о дискретизации и восстановлении решается на основе теоремы Котельникова. Формулировка теоремы: любая реализация случайного процесса с ограниченным спектром в интервале  $(0, F)$  полностью определяется последовательностью ее значений в точках, отстоящих на  $\Delta t_d = 1 / (2 F)$  секунд друг от друга, где  $\Delta t_d$  - интервал дискретизации [18]. Следствием теоремы Котельникова является ортогональное разложение Котельникова для изучаемых сигналов

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t_d) \sin(2 \pi F (t - k \Delta t_d)) / (2 \pi F (t - k \Delta t_d)), \quad (1.18)$$

где  $x(k \Delta t_d)$  -  $k$ -ый отсчет реализации случайного процесса.

Отметим, что разложение (1.18) может быть обобщено на случай сигналов с полосовыми спектрами  $(F_1, F_2)$  [18].

Необходимые сведения из теории случайных процессов [4. 6]. Представим флуктуационную компоненту:  $\xi_\zeta(t) = x(t) - \langle x \rangle$ , случайного процесса интегралом Фурье

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.19)$$

где  $\xi_{\omega}$  случайная спектральная амплитуда.

Спектральная плотность мощности шума случайного процесса  $G(\omega)$  описывает распределение интегральной мощности (дисперсии  $\sigma^2$ ) шума по спектру

$$\sigma^2 = B(0) = \langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega. \quad (1.20)$$

Для случайных стационарных процессов справедлива теорема Винера-Хинчина: Спектральная плотность  $G(\omega)$  процесса оказывается Фурье-трансформантой корреляционной функции процесса

$$G(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1.21)$$

- прямое преобразование Винера - Хинчина и

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (1.22)$$

- обратное преобразование Винера-Хинчина.

Спектральные амплитуды  $\xi_{\omega}$  и  $\xi_{\omega'}$  случайного стационарного процесса  $\delta$ -коррелированы, так что

$$\langle \xi_{\omega} \xi_{\omega'} \rangle = G(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (1.23)$$

Так как  $B(\tau)$  - четная функция:  $B(\tau) = B(-\tau)$ , то, согласно (1.21) и (1.22),  $G(\omega)$  - также четная:  $G(\omega) = G(-\omega)$ . Эффективная ширина спектра шума случайного процесса может быть оценена как

$$\Delta\omega_{ш} = \sigma^4 / (4 \int_0^{\infty} G^2(\omega) d\omega). \quad (1.24)$$

С учетом (1.21) и (1.22) найдем связь между временем корреляции случайного процесса  $\tau_k$  из (1.16) и шириной спектра его флуктуаций  $\Delta\omega_{ш}$  из (1.24):

$$\Delta\omega_{ш} \tau_k = \pi. \quad (1.25)$$

Из (1.24) следует, что чем больше эффективная ширина спектра шума случайного процесса, тем меньше время корреляции процесса.

Приведенные сведения применим для выяснения физического смысла интервала дискретизации  $\Delta t_d = 1/(2F)$  в (1.18). Передача информации посредством сигнала - случайный процесс. Поэтому передача возможна, если амплитудный спектр сигнала эффективно заключен внутри полосы спектра шума, то есть,

если  $2 \pi F < \Delta\omega_{ш}$ . Отсюда, с учетом (1.24), получаем:  $\Delta t_d > \tau_k$  (то есть соседние отсчеты должны быть некоррелированы).

Пример. У телефонного сигнала 95 % энергии заключено в полосе частот 300 - 3400 Гц. Примем  $F=3400$  Гц, тогда частота дискретизации  $1/\Delta t_d = 6800$  Гц.

## 2. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 2.1. Случайный одиночный импульс

Пусть момент появления импульса  $t_0$  случаен и меняется от реализации к реализации, а форма импульса задана детерминированной функцией  $F$ . Представим импульс как

$$x(t) = F(t - t_0). \quad (2.1)$$

Процесс (2.1) характеризуется средним значением

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_0) w(t_0) dt_0 \quad (2.2)$$

и корреляционной функцией

$$\langle x x_{\tau} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_0) F(t + \tau - t_0) w(t_0) dt_0, \quad (2.3)$$

где  $w(t_0)$  - плотность вероятности появления импульса в момент  $t_0$ , и использовано другое, чем в (1.13), определение корреляционной функции.

Задача. Рассчитать среднее значение и функцию корреляции для импульса гауссовской формы

$$F(t) = F_0 \exp(-\alpha^2 t^2) \quad (2.4)$$

с длительностью:  $\tau_{\text{имп}} \sim 1/\alpha$ , и при гауссовском распределении времени появления импульса

$$w(t_0) = (\beta / \pi^{1/2}) \exp(-\beta^2 t_0^2). \quad (2.5)$$

Решение. Подставляя (2.4) и (2.5) в (2.2) и (2.3), найдем

$$\langle x \rangle = F_0 \beta / (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \exp(-\alpha^2 \beta^2 t^2 / (\alpha^2 + \beta^2)), \quad (2.6)$$

$$\langle x x_{\tau} \rangle = F_0^2 \beta / (2 \alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \exp\{-\alpha^2 / (2\alpha^2 + \beta^2) (2t^2 \beta^2 + 2t\beta^2 \tau + \tau^2 (\alpha^2 + \beta^2))\}. \quad (2.7)$$

Изучаемый в задаче случайный процесс нестационарен, так как  $\langle x \rangle$  и  $\langle x x_{\tau} \rangle$  зависят от времени  $t$ . Теперь вместо (2.5) примем, что появление импульса равновероятно на большом интервале времени:  $T \gg \tau_{\text{имп}}$ , то есть  $w(t_0) = 1/T$ . Тогда, вводя обозначение:  $\theta = t - t_0$ , вместо (2.6) и (2.7) получим

$$\langle x \rangle = (1/T) \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.8)$$

∞

$$\langle x x_\tau \rangle = (1/T) \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta, \quad (2.9)$$

где  $\langle x \rangle$  и  $\langle x x_\tau \rangle$ , как и все остальные моменты функции распределения, не зависят от времени  $t$ , так что процесс  $x(t)$  стационарен.

Представим импульс  $F(t)$  интегралом Фурье

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.10)$$

и подставим (2.10) в (2.9). После преобразований получим выражение корреляционной функции через амплитудный спектр импульса  $\varphi(\omega)$

$$\langle x x_\tau \rangle = (2\pi/T) \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega. \quad (2.11)$$

Определим спектральную плотность мощности  $G'(\omega)$  случайного процесса  $x(t)$  посредством выражения

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G'(\omega) d\omega. \quad (2.12)$$

Полагая  $\tau = 0$  в (2.11) и сравнивая полученное выражение с (2.12), найдем для одиночного импульса (2.1)

$$G'(\omega) = (2\pi/T) |\varphi(\omega)|^2. \quad (2.13)$$

Вместо (2.1) рассмотрим импульс со случайной структурой  $\xi(t)$  и регулярной огибающей  $F(t)$

$$x(t) = F(t) \xi(t). \quad (2.14)$$

Случайный процесс  $x(t)$  из (2.14) - нестационарный процесс с дисперсией  $\sigma_x^2(t) = F^2(t) \langle \xi^2(t) \rangle$  и коэффициентом корреляции  $R_x = \langle x x_\tau \rangle / (\sigma_x(t) \sigma_x(t+\tau)) = \langle \xi \xi_\tau \rangle / \langle \xi^2 \rangle = R_\xi$ , где  $R_\xi$  - коэффициент корреляции случайной модуляции  $\xi(t)$  процесса  $x(t)$ . Полученный результат можно обобщить на пространственный импульс:  $A(x, y) = F(x, y) \xi(x, y)$ , например, - для распределения электромагнитного поля в поперечном сечении с координатами  $x$  и  $y$  лазерного луча:  $R_A = R_\xi$ .

## 2.2. Квазипериодические импульсные процессы

Такой процесс описывается выражением:  $x(t) = \rho(t) F(\psi)$ , где  $F(\psi)$  - периодическая функция ( $F(\psi + 2\pi n) = F(\psi)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), аргумент которой следующим образом зависит от времени:  $\psi = \omega_0 t + \varphi(t)$ . Здесь  $\rho(t)$  и  $\varphi(t)$  - флуктуирующие функции, определяющие случайные изменения импульсов по высоте и длительности. Примером такого процесса является телеграфный сигнал - случайная видеопоследовательность прямоугольных положительных и отрицатель-

ных импульсов со случайными длительностями  $\tau_1$  и  $\tau_2$  и детерминированными амплитудами  $\sigma$  и  $-\sigma$  [19]. Пусть длительности импульсов распределены по показательным законам:  $w_k(\tau_k) = \lambda_k \exp(-\lambda_k \tau_k)$ , где  $\lambda_k$  - параметры,  $k = 1, 2$ . Тогда телеграфный сигнал является случайным стационарным процессом с корреляционной функцией (см. (1.13))

$$B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|), \quad (2.15)$$

где  $\tau = \tau_2 - \tau_1$ ,  $\sigma^2$  - дисперсия процесса,  $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$  - параметр, изменяя значения которого можно менять в широком диапазоне корреляционные и спектральные свойства телеграфного сигнала.

Используя (1.15), (1.16) и (2.15), найдем время корреляции телеграфного сигнала

$$\tau_k = 1 / \alpha. \quad (2.16)$$

Спектральную плотность мощности телеграфного сигнала найдем, используя преобразование Винера - Хинчина (1.21):  $G(\omega) = \sigma^2 \alpha / (\pi (\alpha^2 + \omega^2))$ . Ширину спектра телеграфного сигнала найдем, используя (1.25) и (2.16):

$$\Delta\omega_{ш} = \pi / \tau_k = \pi \alpha. \quad (2.17)$$

При  $\alpha \rightarrow 0$  имеем:  $\Delta\omega_{ш} \rightarrow 0$ , и процесс вырождается в постоянную составляющую. При  $\alpha \rightarrow \infty$  и  $\sigma^2/\alpha = const$  имеем:  $\Delta\omega_{ш} \rightarrow \infty$  и  $G(\omega) = G_0 = \sigma^2 / (\alpha\pi) = const$ ,  $B(\tau) = 2 \pi G_0 \delta(\tau)$ , где  $\delta(\tau)$  - дельта-функция, и процесс вырождается в белый шум. Название «белый шум» возникло по аналогии с понятием «белый свет» в оптике. Белый шум используют как модель наиболее тяжелого вида помехи в каналах связи. Белый шум - это  $\delta$ -коррелированный случайный стационарный процесс с бесконечно большими значениями ширины спектра, дисперсии и энергии:  $E = G_0 \Delta\omega_{ш} \rightarrow \infty$ . В природе не существует источников сигналов с бесконечно большой энергией. Однако иногда помехи можно аппроксимировать белым шумом. Это можно сделать, если ширина спектра помехи много больше ширины спектра полезного сигнала и в полосе частот сигнала спектральная плотность помехи  $G_n(\omega) \approx const$ .

### 2.3. Случайные импульсные последовательности

Этот процесс состоит из совокупности импульсов

$$x(t) = \sum_{p=1}^n F(t - t_p). \quad (2.18)$$

Здесь  $F(t)$  - регулярная функция времени, описывающая форму одиночного импульса. Случайными могут быть как моменты появления отдельных импульсов  $t_p$ , так и полное число импульсов  $n$  за время наблюдения  $T$ . Исследуем статистические свойства последовательности (2.18) в следующих приближениях.

1) Каждый импульс возникает независимо от остальных, и их появление равно-

вероятно, так что  $w(t_p) = 1/T$ . 2) Интервал  $T$  велик по сравнению с длительностью  $\tau_{\text{имп}}$  каждого импульса:  $T \gg \tau_{\text{имп}}$ . 3) Моменты  $t_p$  и число импульсов  $n$  - статистически независимые случайные величины. Тогда плотность вероятности

$$w(n, t_1, t_2, \dots, t_n) = P(n) \prod_{p=1}^n w(t_p) = P(n) / T^n, \quad (2.19)$$

где  $P(n)$  - вероятность появления  $n$  импульсов за время  $T$ , среднее по времени появления импульса  $t_p$  значение и корреляционная функция процесса  $F$  равны

$$\langle F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_p) w(t_p) dt_p = (1/T) \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.20)$$

$$\langle F F_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_p) F(t + \tau - t_p) w(t_p) dt_p = (1/T) \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta, \quad (2.21)$$

где  $\theta = t - t_p$ , и в силу предположения 2) функции  $\langle F \rangle$  и  $\langle F F_\tau \rangle$  практически не зависят от  $t$ .

При предположениях 1) - 3) статистика числа импульсов подчинена закону Пуассона

$$P(n) = e^{-\alpha} \alpha^n / n!, \quad (2.22)$$

для которого среднее значение и дисперсия случайной величины  $n$  равны:  $\langle n \rangle = \alpha$ , и  $\langle n^2 \rangle = \alpha(1 + \alpha)$ ; в пределе:  $n \rightarrow \infty$  распределение Пуассона переходит приближенно в нормальное, причем  $\sigma_n / \langle n \rangle \rightarrow 0$ .

При учете (2.19), (2.20) и (2.22) среднее значение для последовательности импульсов (2.18) равно

$$\langle x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(n, t_1, t_2, \dots, t_n) \sum_{p=1}^n F(t - t_p) dt_1 \dots dt_n = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.23)$$

где  $\Omega = \alpha/T = \langle n \rangle/T$  и  $\theta = t - t_p$ , причем  $\langle x \rangle = \langle x_\tau \rangle$  для произвольного  $\tau \ll T$ .

Используя ту же методику, что и при выводе (2.23), найдем корреляционную функцию процесса (2.18)

$$B(\tau) = \langle x x_\tau \rangle - \langle x \rangle \langle x_\tau \rangle = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta. \quad (2.24)$$

Итак, среднее значение и корреляционная функция пуассоновской импульсной последовательности даются формулами Кэмпбелла (2.23) и (2.24). Как известно [6], энергию импульса  $F(\theta)$  можно выразить через амплитудный спектр импульса  $\varphi(\omega)$  (см. (2.10)) с помощью равенства Парсевала

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\theta) d\theta = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.25)$$

Сравнивая (1.20) с (2.24) при  $\tau = 0$ , получаем выражение для спектральной плотности мощности  $G(\omega)$  пуассоновской последовательности импульсов

$$G(\omega) = 2\pi \Omega |\varphi(\omega)|^2. \quad (2.26)$$

#### 2.4. Дробовой шум

Анодный ток электронной лампы - случайная последовательность импульсов. Флуктуирующая часть тока называется дробовым шумом. Статистика дробового шума зависит от статистики термоэлектронной эмиссии из катода и от взаимодействия электронов при пролете от катода к аноду. Пусть лампа работает в режиме насыщения. Тогда из двух факторов действует только первый. Различные термоэлектроны эмитируются из катода независимо друг от друга. Поэтому статистика термоэлектронной эмиссии, а значит - и импульсов анодного тока, является пуассоновской (2.22). Последнее выражение определяет вероятность вылета  $n$  электронов из катода за время  $T$ . Среднее число электронов, эмитируемых в единицу времени, равно  $\Omega = I_0 / e$ , где  $I_0$  - средняя сила анодного тока и  $e$  - элементарный заряд. За время  $T$  в среднем эмитируется  $\langle n \rangle = \Omega T$  электронов. Из (2.26) следует выражение для спектра мощности дробового шума:  $G(\omega) = 2\pi \Omega |i(\omega)|^2$ , где  $i(\omega)$  - фурье - образ импульса тока  $i(t)$ , возбуждаемого в анодной цепи отдельным электроном.

Пусть в плоском ламповом диоде ось  $z$  направлена от катода к аноду и  $z = 0$  на поверхности катода. При достаточно высоком анодном напряжении  $V$  можно пренебречь тепловым разбросом скоростей электронов и задать начальную (при  $t = 0$ ) скорость электрона  $u(0) = 0$  при  $z = 0$ . Проинтегрируем уравнение движения:  $m d^2z / dt^2 = eE$ , электрона с массой  $m$ , движущегося в однородном электрическом поле с напряженностью:  $E = V/d$ , где  $d$  - расстояние между катодом и анодом. Получим выражение для скорости электрона:  $u(t) = (e/m) (V/d) t$ . Мощность работы электрического поля по переносу электрона равна  $P_1 = eEu(t)$ . В единицу времени при протекании импульса анодного тока, вызванного электроном, в анодной цепи выделяется количество теплоты:  $P_2 = i(t)V$ . По закону сохранения энергии, имеем:  $P_1 = P_2$ . В результате получаем, что импульс тока, вызванный движением электрона между катодом и анодом, имеет треугольную форму и описывается выражением

$$i(t) = 2 e t / \tau_{np}^2, \quad (0 < t < \tau_{np}) \quad (2.27)$$

где  $\tau_{np}$  - время пролета электрона от катода к аноду,  $\tau_{np} = (2md / (e E))^{1/2}$ .

Сила случайного тока последовательности импульсов равна

$$I(t) = \sum_n i(t - t_n) = (2 e / \tau_{np}^2) \sum_n a_n, \quad (2.28)$$

где  $a_n = t - t_n$ , если  $0 < t - t_n < \tau_{np}$ , иначе  $a_n = 0$ .

Запишем Фурье - образ импульса тока

$$i(\omega) = (1/(2\pi))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt = (e/(\pi\tau_{\text{пр}}^2)) \int_0^{\tau_{\text{пр}}} t e^{-j\omega t} dt. \quad (2.29)$$

Интегрируя (2.29), найдем

$$|i(\omega)|^2 = (e / (\pi \theta^2))^2 (2 + \theta^2 - 2\theta \sin \theta - 2 \cos \theta) = (e / (2\pi))^2 F(\theta), \quad (2.30)$$

где  $\theta$  - пролетный угол,  $\theta = \omega \tau_{\text{пр}}$ ,  $F(\theta) = (4 / \theta^4) (2 + \theta^2 - 2\theta \sin \theta - 2 \cos \theta)$ .

Подставляя (2.30) в (2.26), получаем выражение для спектра мощности дробового шума

$$G(\omega) = (e / (2\pi)) I_0 F(\theta). \quad (2.31)$$

Согласно (2.31), частота колебаний  $\omega$  входит в выражение (2.31) только в комбинации со временем пролета  $\tau_{\text{пр}}$  ( $\theta = \omega \tau_{\text{пр}}$ ), и спектральная плотность  $G(\omega)$  пропорциональна средней силе анодного тока  $I_0$ . При  $\theta \rightarrow 0$  ( $\omega \rightarrow 0$ ) имеем:  $F(\theta) \rightarrow 1$ , и спектральная плотность дробового шума максимальна:

$$G(\omega) = (e / (2\pi)) I_0. \quad (2.32)$$

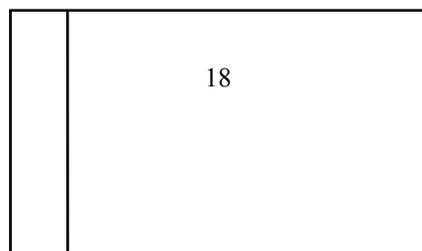
Формула Шоттки (2.32) используется при расчете дробового эффекта низкочастотных ламп, когда  $\theta \ll 1$ . Напротив, при  $\theta \rightarrow \infty$  получим:  $G(\omega) \rightarrow 0$ , то есть при больших пролетных углах дробовой шум исчезает. При  $\theta \rightarrow \infty$  резко уменьшается коэффициент усиления лампы. Поэтому увеличение  $\theta$  не приводит к увеличению чувствительности усилителя. Добиться уменьшения уровня дробового шума можно, перейдя от режима насыщения к режиму ограничения анодного тока облаком отрицательного пространственного заряда электронов у катода. Наличие облака приводит к взаимодействию электронов. Статистика взаимодействия такова, что уровень дробового шума уменьшается. Данный эффект называется депрессией дробового шума. С учетом эффекта депрессии (2.32) перепишется как

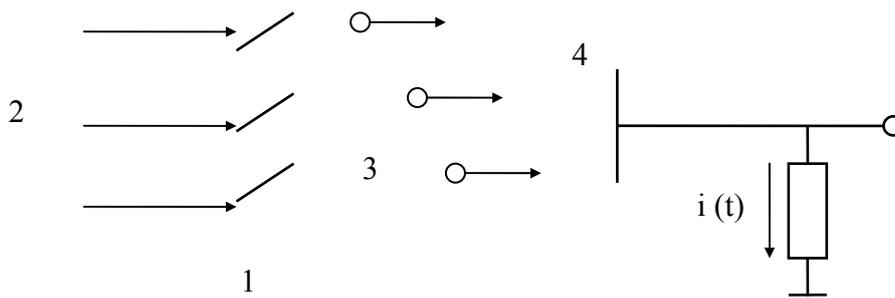
$$G(\omega) = \Gamma (e / (2\pi)) I_0, \quad (2.33)$$

где  $\Gamma$  - коэффициент депрессии, на низких частотах обычно  $\Gamma \approx 0,01$  вдали от режима насыщения.

## 2.5. Фотоотсчеты в случайном световом поле

Задача - изучить статистику фототока, возбуждаемого световым излучением на фотокатоде. Схема фотоэлектрического детектора показана на рис. 2.1.





1 - катод (фоточувствительная поверхность); 2 - падающее световое излучение  
 3 - эмитированные катодом фотоэлектроны; 4 - коллекторный анод;  
 $i(t)$  - выходной ток;  $R$  - нагрузочное сопротивление.

Рис. 2.1

Катод освещается источником света с флуктуирующей интенсивностью  $I(t)$ . В задаче о термоэлектронной эмиссии (см. п. 2.4) такой постановке соответствовали бы флуктуационные изменения температуры катода, не учтенные в той задаче. Согласно полуклассической теории фотоэффекта [20], вероятность появления одного фотоотсчета (импульса фототока) за время  $T$  наблюдения равна  $P_{от} = \beta U$ , где  $\beta$  - коэффициент чувствительности фотодетектора и  $U$  - энергия светового потока, прошедшего через поверхность детектора за время  $T$ ,

$$U = \int_0^T I(t) dt.$$

Если флуктуации светового поля отсутствуют ( $U = const$ ), то все фотоотсчеты равновероятны. Тогда статистика фотоотсчетов подчиняется закону Пуассона (2.22), причем  $\alpha = \langle n \rangle = \beta U$ . Если учесть дополнительно флуктуации светового поля, то вероятность (2.22) - условная вероятность при заданном числе фотоотсчетов  $n$ :  $P(n|U) = (\beta U)^n / n! \exp(-\beta U)$  и  $\langle n \rangle_U = \alpha = \beta U$ . Полную вероятность появления  $n$  фотоотсчетов найдем, усреднив  $P(n|U)$  при помощи функции распределения  $w(U)$  энергии светового потока

$$P(n) = \int_0^{\infty} P(n|U) w(U) dU = \int_0^{\infty} (\beta U)^n / n! \exp(-\beta U) w(U) dU. \quad (2.34)$$

Распределение (2.34), называемое формулой Манделя, может существенно отличаться от пуассоновского из-за флуктуаций светового поля. Причем в случае (2.34) имеем:  $\langle n \rangle = \beta \langle U \rangle = \beta \langle I \rangle T$ , и дисперсия числа фотоотсчетов в случайном световом поле:  $\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle + \beta^2 \sigma_U^2$ , где  $\sigma_U^2$  - дисперсия энергии светового потока. Случайные поля можно различать по величине разности  $\sigma_n^2 - \langle n \rangle$ . Величина  $\sigma_U^2$  существенно зависит от соотношения между временем корреляции светового поля  $\tau_k$  и временем наблюдения  $T$ . В предельном случае:  $\tau_k \ll T$ , статистика фотоотсчетов вообще не чувствительна к статистике светового поля. В этом случае имеем:  $w(U) = \delta(U - \langle U \rangle)$ , где  $\delta$  - дельта-

функция, и вместо (2.34) получаем:  $P(n) = (\beta \langle U \rangle)^n / n! \exp(-\beta \langle U \rangle)$ . То есть статистика фотоотсчетов будет пуассоновской независимо от распределения интенсивности света. Пусть теперь статистика светового поля является гауссовской. Как показано в [5], тогда отклонение дисперсии числа фотоотсчетов от их среднего значения:  $(\sigma_n^2 - \langle n \rangle) / \langle n \rangle^2$ , монотонно уменьшается с ростом относительного времени наблюдения  $T / \tau_k$ . Поэтому для сохранения сведений о флуктуациях светового поля в статистике фотоотсчетов необходимо, чтобы  $\tau_k > T$ .

В другом предельном случае, когда  $\tau_k \gg T$ , имеем в (2.34):  $U=IT$ , В частности, для модели идеального лазера, работающего в надпороговом режиме, для которой:  $w(I) = \delta(I - I_0)$ , где  $\delta$  - дельта-функция, вместо (2.34) получим пуассоновское распределение (2.22) со средним и дисперсией:  $\langle n \rangle = \sigma_n^2 = \alpha = \beta T I_0$ . Тепловое излучение, например лазерное, рассеянное в неоднородной среде, имеет экспоненциальное распределение интенсивности:  $w(I) = (1 / \sigma^2) \exp(-I / \sigma^2)$ , где  $\sigma^2 = \langle I \rangle$  [5]. Тогда получим функцию распределения:  $P(n) = \langle n \rangle^n / (1 + \langle n \rangle)^{1+n}$  со средним  $\langle n \rangle = \beta T \sigma^2$  и дисперсией  $\sigma_n^2 = \langle n \rangle (1 + \langle n \rangle)$ . Здесь величины  $\langle n \rangle$  и  $\sigma_n^2$  могут сильно отличаться друг от друга. Последнее распределение  $P(n)$ , в отличие от пуассоновского (2.22), дает функцию, убывающую с ростом  $n$  при любом  $\langle n \rangle > 0$ , не только при  $\langle n \rangle < 1$ .

Задача нахождения статистики светового поля по статистике фотоотсчетов является обратной к изученной выше. Решение задачи однозначно, но возможны разные методики его получения. Математически оно сводится к обращению формулы Манделя (2.34). Рассмотрим, например, функцию

$$Q(s) = \int_0^{\infty} e^{jsU} w(U) e^{-\beta U} dU, \quad (2.35)$$

Фурье - преобразование которой дает

$$w(U) = e^{\beta U} / (2\pi) \int_0^{\infty} e^{-jsU} Q(s) ds. \quad (2.36)$$

Если в (2.35) разложить экспоненту  $e^{jsU}$  в ряд Тейлора:  $e^{jsU} = 1 + jsU + \dots + (jsU)^n / n! + \dots$ , и использовать формулу Манделя (2.34), то получим

$$Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (j s / \beta)^n P(n). \quad (2.37)$$

Выражение (2.37) позволяет по распределению фотоотсчетов  $P(n)$  найти функцию  $Q(s)$ . Затем с помощью (2.36) можно найти статистику светового поля  $w(U)$ .

### 3. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ

#### 3.1. Случайные узкополосные процессы

Процесс называется узкополосным, если  $\Delta\omega / \omega_0 \ll 1$ , где  $\Delta\omega$  - ширина спектра процесса и  $\omega_0$  - средняя (несущая) частота колебаний процесса. Реализации узкополосных процессов можно наблюдать на выходе радиосистем, работающих на высоких и промежуточных частотах. Используют две эквивалентные формы представления таких процессов: в виде амплитудно - частотно - модулированных колебаний или в виде суммы двух амплитудно - модулированных колебаний [6]

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t)) = a(t) \cos \omega_0 t + b(t) \sin \omega_0 t, \quad (3.1)$$

где  $A(t)$  и  $\Phi(t)$  - случайные амплитуда (огibaющая) и начальная фаза процесса,  $a(t)$  и  $b(t)$  - случайные синфазная и квадратурная компоненты процесса,  $a(t) = A(t) \cos \Phi(t)$  и  $b(t) = -A(t) \sin \Phi(t)$ , функции  $A(t)$ ,  $\Phi(t)$ ,  $a(t)$  и  $b(t)$  медленно изменяются по сравнению с несущей частотой  $\omega_0$ .

Функции  $a(t)$  и  $b(t)$  можно рассматривать как ортогональные составляющие комплексной огibaющей:  $C(t) = a(t) + j b(t) = A(t) \exp(j \Phi(t))$ , а сам процесс (3.1) - как вещественную часть комплексной функции:  $x(t) = \operatorname{Re} \{z(t)\}$ , где  $z(t) = C(t) \exp(j \omega_0 t)$  [19]. Сигнал  $C(t)$  называется аналитическим, если функции  $x(t)$  и  $y(t) = \operatorname{Im} \{z(t)\}$  составляют пару преобразований Гильберта

$$y(t) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) / (t - \tau) d\tau, \quad x(t) = - (1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) / (t - \tau) d\tau. \quad (3.2)$$

Если процесс (3.1) имеет непрерывный спектр

$$\xi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.3)$$

то из (3.2) следует, что спектр сопряженной функции  $y(t)$  выражается как

$$\xi_y(\omega) = -j \operatorname{sign} \omega \xi_x(\omega), \quad (3.4)$$

где знаковая функция  $\operatorname{sign} \omega = 1$  (при  $\omega > 0$ ),  $0$  (при  $\omega = 0$ ) и  $-1$  (при  $\omega < 0$ ).

Из (3.4) следует, что прямое преобразование Гильберта:  $x \rightarrow y$ , можно рассматривать как результат прохождения сигнала  $x(t)$  через линейный четырехполюсник, сдвигающий фазу всех составляющих спектра на  $-\pi/2$ . Используя (3.2) и (3.4), легко выразить спектр аналитического сигнала:  $\xi_z(\omega) = 2 \xi_x(\omega)$  (при  $\omega > 0$ ),  $\xi_x(0)$  (при  $\omega = 0$ ) и  $0$  (при  $\omega < 0$ ). Получили, что спектр аналитического сигнала является односторонним и существует только в области положительных частот. Обозначим спектральные плотности мощности процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  как  $G_x(\omega)$  и  $G_y(\omega)$ , соответственно. Используя выражение для спектра мощности

случайного стационарного процесса (1.23) и (3.4), получим:  $G_x(\omega) = G_y(\omega)$ . Тогда, применяя преобразование Винера - Хинчина (1.22) к функциям  $G_x(\omega)$  и  $G_y(\omega)$ , найдем, что и корреляционные функции сопряженных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  одинаковы:  $B_x(\tau) = B_y(\tau)$ .

Задача N 1. Найти функцию корреляции узкополосного процесса  $x(t)$  с равномерным спектром мощности  $G_x(\omega) = G_x = const$  в интервале частот  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ .

Решение. Используя (1.22), после интегрирования получим:

$$B_x(\tau) = \sigma_x^2 R_x(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad (3.5)$$

где дисперсия процесса  $x(t)$  равна  $\sigma_x^2 = B_x(0) = 2G_x \Delta\omega$ , ширина спектра:  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , коэффициент корреляции:  $R_x(\tau) = \sin(\Delta\omega \tau / 2) / (\Delta\omega \tau / 2)$ ; величина  $\sigma_x^2 R_x(\tau)$  равна корреляционной функции огибающей  $A(t)$  изучаемого процесса (3.1).

Исследуем статистику огибающей и фазы узкополосного процесса (3.1). Алгоритм решения этой задачи следующий. Определяют совместную плотность распределения  $w_{1,2}(a, b)$  случайных величин  $a$  и  $b$ . Находят якобиан преобразования  $J$  от системы координат  $A$  и  $\Phi$  к системе координат  $a$  и  $b$  ( $da db = J dA d\Phi$ , где  $J = A$ ). Из условия равенства вероятностей:  $dP(a, a + da, b, b + db) = dP(A, A + dA; \Phi, \Phi + d\Phi)$ , получают совместную плотность распределения

$$w_{1,2}(A, \Phi) = J w_{1,2}(a, b). \quad (3.6)$$

Проинтегрировав (3.6) по фазе, получают одномерную плотность распределения огибающей

$$w_1(A) = \int_{-\pi}^{\pi} w_{1,2}(A, \Phi) d\Phi. \quad (3.7)$$

Проинтегрировав (3.6) по амплитуде, получают одномерную плотность распределения фазы

$$w_2(\Phi) = \int_0^{\infty} w_{1,2}(A, \Phi) dA. \quad (3.8)$$

Задача N 2. Исследовать статистику огибающей и фазы гауссовского стационарного узкополосного процесса (3.1) при следующих условиях:  $\langle x(t) \rangle = 0$ , и случайные компоненты процесса:  $a(t)$  и  $b(t)$ , статистически независимы друг от друга:  $\langle a(t) b(t + \tau) \rangle = 0$ , и имеют одинаковую дисперсию:  $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma^2$ .

Решение. Учитывая условия задачи, с помощью (3.1) найдем:  $\langle a(t) \rangle = 0$ ,  $\langle b(t) \rangle = 0$  и  $\langle x^2(t) \rangle = \sigma^2$ . Все моменты:  $\langle x^n(t) \rangle = 0$  при  $n > 2$ , так как процесс  $x(t)$  нормальный. Тогда из (3.1) получаем:  $\langle a^n(t) \rangle = \langle b^n(t) \rangle = 0$  при  $n > 2$ , так что процессы  $a(t)$  и  $b(t)$  тоже нормальные. Из-за некоррелированности процессов  $a(t)$  и  $b(t)$  совместная плотность распределения  $w_{1,2}(a, b)$  равна произведению одномерных плотностей:  $w_{1,2}(a, b) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-a^2/(2\sigma^2)) (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-b^2/(2\sigma^2)) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp(-A^2/(2\sigma^2))$ . Подставляя это выражение в (3.6), найдем:  $w_{1,2}(A, \Phi) =$

$= A (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp(-A^2 / (2\sigma^2))$ . Далее, с учетом (3.7) и (3.8) получаем:  $w_1(A) = A \bullet \sigma^{-2} \exp(-A^2 / (2\sigma^2))$  (распределение Рэлея) и  $w_2(\Phi) = 1 / (2\pi)$ . Среднее по функции распределения  $w_1(A)$  значение огибающей равно  $\langle A(t) \rangle = (\pi/2)^{1/2} \sigma$ , а дисперсия огибающей -  $\sigma_A^2 = \langle A^2(t) \rangle - \langle A(t) \rangle^2 = (4 - \pi) \sigma^2 / 2$ . Так как распределение фазы  $w_1(\Phi)$  равномерно и симметрично, то  $\langle \Phi(t) \rangle = 0$  и дисперсия фазы равна:  $\sigma_\Phi^2 = \langle \Phi^2(t) \rangle = \pi^2 / 3$ .

Обобщим результаты изучения статистики узкополосных процессов. Рассмотрим сигнал равный сумме гармонического колебания и узкополосной помехи (3.1)

$$z(t) = a_0 \cos \omega_0 t + x(t). \quad (3.9)$$

Выражение (3.9) - частный случай случайного процесса в виде смеси статистически независимых полезного сигнала и шума. Такая модель описывает процессы на выходе реальных приемных устройств. Аддитивный шум может накладываться на сигнал как в самом приемном устройстве, так и при распространении от передатчика к приемнику. Для процесса (3.9) случайные синфазная и квадратурная составляющие соответственно равны:  $a_1(t) = a_0 + a(t)$  и  $b_1(t) = b(t)$ , где  $a(t)$  и  $b(t)$  определены в (3.1). Огибающая и фаза процесса (3.9) соответственно равны:  $A_1(t) = ((a_0 + a(t))^2 + b^2(t))^{1/2}$  и  $\Phi_1(t) = \arctg(b(t) / (a_0 + a(t)))$ .

**Задача N 3.** Изучить статистику огибающей и фазы смеси (3.9) гармонического сигнала и узкополосной помехи, удовлетворяющей условиям задачи N2.

**Решение.** Совместное распределение синфазной и квадратурной компонент процесса (3.9) описывается функцией:  $w_{1,2}(a_1, b_1) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp(-((a_1 - a_0)^2 + b_1^2) / (2\sigma^2))$ . Совместная функция распределения амплитуды  $A_1(t)$  и фазы  $\Phi_1(t)$  равна:  $w_{1,2}(A_1, \Phi_1) = J w_{1,2}(a_1, b_1) = (A_1 / (2\pi\sigma^2)) \exp(-(A_1^2 - 2A_1 a_0 \cos \Phi_1 + a_0^2) / (2\sigma^2))$ , где  $J$  - якобиан преобразования координат:  $(A_1, \Phi_1) \rightarrow (a_1, b_1)$ ,  $J = A_1$ . Используя формулы (3.7) и (3.8) применительно к функции  $w_{1,2}(A_1, \Phi_1)$ , найдем распределения огибающей

$$w_1(A_1) = (A_1 / \sigma^2) I_0(A_1 a_0 / \sigma^2) \exp(-(A_1^2 + a_0^2) / (2\sigma^2)), \quad (3.10)$$

где  $I_0$  - модифицированная функция Бесселя [21], и фазы процесса (3.9)

$$w_2(\Phi_1) = 1 / (2\pi) \exp(-\mu^2) \{1 + \pi^{1/2} \mu \exp(\mu^2) (1 + \Phi_L(\mu))\}, \quad (3.11)$$

где  $\mu = a_0 / (2^{1/2} \sigma)$ , так что  $\mu^2$  - отношение мощности сигнала к мощности шума,  $\mu = \mu \cos \Phi_1$  и  $\Phi_L(\mu)$  - функция Лапласа [21],

$$\Phi_L(\mu) = 1 / 2 + 1 / (2\pi)^{1/2} \int_0^\mu \exp(-u^2 / 2) du. \quad (3.12)$$

Формулы (3.10) и (3.11) иллюстрируются графиками на рис. 3.1, а, б, соответственно.

$w_1(A_1) \sigma$

$0 < \mu_2 < \mu$

$w_2(\Phi_1)$

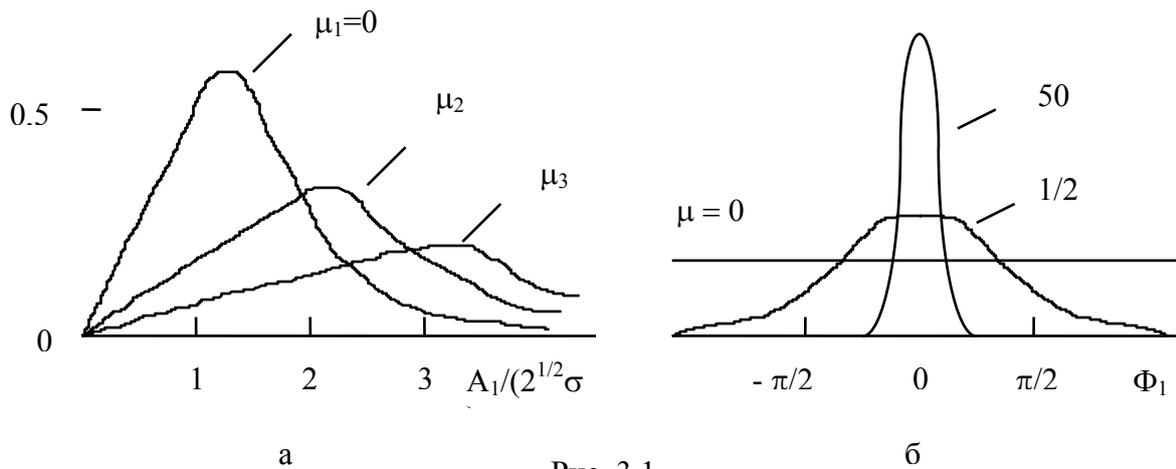


Рис. 3.1

На рис. 3.1 случай:  $\mu = 0$ , соответствует распределению Рэлея (см. задачу N 2). При  $\mu > 0$  графики на рис. 3.1 и формулы (3.10) и (3.11) описывают обобщенное распределение Рэлея. При малом отношении сигнал / шум ( $\mu \ll 1$ ) обобщенное распределение Рэлея близко к обычному. При  $\mu \gg 1$  распределение  $w_1(A_1)$  стремится к нормальному со средним значением  $a_0$  и дисперсией  $\sigma^2$ , а распределение  $w_2(\Phi_1)$  - к  $\delta$  - функции.

### 3.2. Случайные диффузионные процессы

Пусть  $x(t)$  - функция, описывающая случайный процесс и являющаяся решением стохастического дифференциального уравнения

$m$

$$\sum_{k=0}^m a_k(t) d^k x(t) / dt^k = f(t), \quad (3.13)$$

$k=0$

где  $a_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , и  $f(t)$  - случайные функции.

В зависимости от вида коэффициентов и правой части уравнения (3.13) в некоторых случаях оказывается, что  $w(x, t)$  - функция распределения процесса  $x(t)$ , удовлетворяет уравнению Фоккера - Планка

$$\partial w / \partial t = - \partial / \partial x (K_1 w) + (1 / 2) \partial^2 / \partial x^2 (K_2 w), \quad (3.14)$$

где случайные функции  $K_1(x, t)$  и  $K_2(x, t)$  зависят от коэффициентов и правой части уравнения (3.13); решение  $w(x, t)$  уравнения (3.14) должно удовлетворять заданному начальному условию:  $w(x, 0) = w_0(x)$ .

Линейное уравнение (3.14) широко применяется в физике для описания диффузии вещества в неоднородных средах. При соблюдении принятых предположений случайный процесс  $x(t)$  называется диффузионным. В частном случае стационарного процесса ( $w(x, t) = w(x)$ ) уравнение (3.14) легко интегрируется:  $-K_1 w + (1/2) \partial / \partial x (K_2 w) = const$ . Используя условие регулярности ( $w(x) \rightarrow 0$  при

$x \rightarrow \pm \infty$ ), получим  $const = 0$ . Полученное уравнение для  $w$  интегрируем еще раз, имеем

$$w(x) = (C / K_2(x)) \exp \left[ 2 \int_{-\infty}^x (K_1(x) / K_2(x)) dx \right], \quad (3.15)$$

где константа интегрирования  $C$  определяется условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1. \quad (3.16)$$

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  -  $n$  произвольно выбранных сечений процесса  $x(t)$  в произвольно заданные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Используя условные вероятности, выразим  $n$  - мерную функцию распределения процесса

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) w(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \dots = \\ &= w(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) w(x_{n-1} | x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \bullet \dots \bullet w(x_2 | x_1) w(x_1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

При произвольных корреляционных функциях для  $a_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , и  $f(t)$  в (3.13) значения  $x(t)$  на разных и необязательно соседних временных интервалах:  $t_{s-1} < t < t_s$  и  $t_{p-1} < t < t_p$ , вообще говоря, статистически взаимосвязаны. В частном случае  $\delta$  - коррелированных функций  $a_k(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , и  $f(t)$  указанная статистическая связь исчезает. Тогда случайная величина  $x_s$  не зависит от значений  $x$ , предшествующих  $x_{s-1}$ . Однако чтобы проинтегрировать уравнение (3.13) на интервале времени  $t_{s-1} < t < t_s$  надо знать начальные условия для  $x(t)$  при  $t = t_{s-1}$ . Для уравнения первого порядка, когда  $m = 1$  в (3.13), требуется только одно начальное условие - случайная величина  $x_{s-1}$ . Другими словами,  $x_s$  статистически зависит от  $x_{s-1}$ , но не зависит от предыдущих отсчетов. Тогда имеем

$$w(x_s | x_1, x_2, \dots, x_{s-1}) = w(x_s | x_{s-1}) \quad (3.18)$$

где  $1 < s \leq n$ .

Случайные процессы, для которых выполняется (3.18), называются марковскими. Из проведенного анализа следует, что марковскими являются случайные процессы, удовлетворяющие уравнениям (линейным или нелинейным) первого порядка (или системам уравнений первого порядка) со случайными  $\delta$  - коррелированными коэффициентами. Подставим (3.18) в (3.17), получим

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = w(x_n | x_{n-1}) w(x_{n-1} | x_{n-2}) \bullet \dots \bullet w(x_2 | x_1) w(x_1), \quad (3.19)$$

то есть многомерное стационарное распределение марковского процесса определяется стационарным одномерным распределением  $w(x_1)$  вида (3.15) и так называемой вероятностью перехода  $p_{ns} = w(x_n | x_s)$ , то есть  $w(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{ns}$

$w(x_1)$ . Вероятность перехода может быть найдена как нестационарное решение уравнения Фоккера - Планка (3.14), соответствующее начальному распределению:  $w(x, 0) = w_0(x)$ , вида  $\delta$  - функции:  $p_{ns} = w(x, t)$  при  $x_n = x$ ,  $x_s = x_0$  и  $w_0(x) = \delta(x - x_0)$ . Проведенный анализ позволяют сделать следующее заключение. Уравнения (3.13) с  $\delta$  - коррелированными коэффициентами и правыми частями (с коэффициентом корреляции  $R(\tau) = \delta(\tau)$ ) описывают диффузионные случайные процессы.

Исследуем важную модель случайного нестационарного процесса, который является интегралом по времени от некоторой случайной функции

$$\xi(t) = \int_0^t \eta(\theta) d\theta. \quad (3.20)$$

Функция  $\xi(t)$  удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) / dt = \eta(t). \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) описывает, например, флуктуации фазы в автономном генераторе радиодиапазона или в лазере, возникающие под действием собственного теплового, дробового или квантового шума. В теории броуновского движения уравнение (3.21) появляется, когда инерцией частиц пренебрегается. Тогда движение частиц определяется балансом силы вязкости и случайной силы, возникающей из-за соударений между ними.

Пусть статистические свойства процесса  $\eta(t)$  заданы:  $\langle \eta \rangle = 0$ ,  $\langle \eta_\infty^2 \rangle = \sigma_0^2$  и, с учетом преобразования Винера - Хинчина (1.22),  $\langle \eta \eta_\tau \rangle = B_0(\tau) = 2 \int_0^\infty G_0(\omega) \cdot \cos \omega \tau d\omega$ .

Учитывая (3.20), получим

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle = 2 \int_0^t (t - \tau) B_0(\tau) d\tau = 2 \int_0^\infty G_0(\omega) (\sin(\omega t / 2) / (\omega / 2))^2 d\omega. \quad (3.22)$$

Отсюда видно, что дисперсия  $\sigma^2$  процесса  $\xi(t)$  зависит от времени, то есть данный процесс является нестационарным. Пусть  $\tau_k$  - время корреляции процесса  $\eta(t)$ . На малых интервалах времени:  $t \ll \tau_k$ , на которых функция  $B_0(\tau)$  успева-ет измениться мало ( $B_0(\tau) \approx \sigma_0^2$ ), найдем:  $\sigma^2 \approx \sigma_0^2 t^2$ . При больших  $t \gg \tau_k$  полагаем:  $B_0(\tau) \approx 0$ , так что  $\sigma^2 \approx 2D(t - \tau_0)$ , где  $D = \pi G_0(0) = \int_0^\infty B_0(\tau) d\tau$ ,  $\tau_0 = (1/D) \int_0^\infty \tau B_0(\tau) d\tau$ .

Пример. Изучим винеровский диффузионный процесс. Тогда в (3.20) функция  $\eta(t)$  - белый шум. При этом  $G_0(\omega) = G_0$ ,  $\sigma_0^2 = \infty$ ,  $B_0(\tau) = 2 D \delta(\tau)$ , где  $D = \pi G_0$ . Подставляя полученное выражение для  $B_0(\tau)$  в (3.22), получим:  $\sigma^2 = 2Dt$ , то есть дисперсия линейно растет со временем. Найдем корреляционную функцию винеровского процесса:  $B(t, \tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle$ . Для этого подставим (3.20) в последнее выражение, получим:  $B(t, \tau) = 2Dt$  при  $\tau > 0$ ;  $B(t, \tau) = 2D(t + \tau)$  при  $-t < \tau \leq 0$ ;  $B(t, \tau) = 0$  при  $\tau \leq -t$ .

### 3.3. Колебания, модулированные шумом

Изучим статистические характеристики случайных процессов, возникающих за счет случайной модуляции гармонического сигнала по частоте, фазе или амплитуде. Статистические характеристики огибающей и фазы модулированного колебания предполагаются известными из измерений или теоретически. Эта задача является обратной к изученной в п. 3.1. Приведем примеры возникновения колебаний, модулированных шумом. Воздействие электромагнитного шума на лазер или радиогенератор приводит к стохастической модуляции колебаний генератора за счет нелинейности воздействия шума. Другой пример - уширение спектральных линий излучения и поглощения атомов и молекул. Частоты, амплитуды и фазы колебаний поля излучения случайным образом изменяются при взаимодействии таких частиц.

Амплитудная модуляция. АМ - колебание описывается выражением

$$\xi(t) = a_0 [1 + \eta(t)] \cos(\omega_0 t + \Phi_0). \quad (3.23)$$

Шумовая АМ обеспечивается случайным процессом  $\eta(t)$ . Пусть  $\eta(t)$  - стационарный процесс, начальная фаза  $\Phi_0$  - случайная постоянная величина с равномерным распределением:  $w(\Phi_0) = 1/(2\pi)$ ,  $-\pi < \Phi_0 \leq \pi$ ,  $a_0$  и  $\omega_0$  - постоянные величины. Тогда процесс  $\xi(t)$  - стационарный со случайной огибающей:  $A(t) = (1 + \eta(t))a_0$ . Предполагая, что  $\langle \eta \rangle = 0$  и  $\langle \eta \eta_\tau \rangle = B_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$ , с помощью (3.23) находим

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = B(\tau) = (a_0^2 / 2) (1 + B_0(\tau)) \cos \omega_0 \tau. \quad (3.24)$$

Применяя преобразование Винера - Хинчина (1.21), найдем спектр процесса  $\xi(t)$ :

$$G(\omega) = (a_0^2 / 4) (\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega) + G_0(\omega_0 - \omega) + G_0(\omega_0 + \omega)). \quad (3.25)$$

Измеряемый спектральными приборами спектр мощности:  $G^+(\omega) = 2 G(\omega)$  при  $\omega \geq 0$  и  $G^+(\omega) = 0$  при  $\omega < 0$ , наиболее просто выглядит, если спектр АМ уже  $\omega_0$ , то есть  $G_0(\omega) = 0$  при  $|\omega| > \omega_0$ . Тогда этот спектр симметричен относительно несущей частоты  $\omega_0$ :

$$G^+(\omega_0 + \Omega) = G^+(\omega_0 - \Omega) = (a_0^2 / 2) (\delta(\Omega) + G_0(\Omega)), \quad (3.26)$$

где  $\Omega$  - смещение частоты  $\omega$  относительно  $\omega_0$  ( $0 < \Omega < \omega_0$ ).

Спектр (3.26) имеет две компоненты - дискретную и непрерывную. Дискретная расположена на несущей частоте  $\omega_0$ , а непрерывная повторяет по форме спектр модулирующего шума  $G_0(\omega)$ . Выразим функцию распределения АМ - процесса (3.23). Пусть его огибающая  $A(t)$  и фаза  $\Phi(t) = \omega_0 t + \Phi_0$  статистически независимы друг от друга. Так как  $w(\Phi_0) = 1/(2\pi)$ , то и  $w_2(\Phi) = 1/(2\pi)$ . Совмест-

ная функция распределения огибающей и фазы равна:  $w_{1,2}(A, \Phi) = w_1(A) w_2(\Phi) = w_1(A) / (2\pi)$ . От переменных  $A$  и  $\Phi$  перейдем к переменным:  $\xi = A \cos \Phi$  и  $\psi = A \sin \Phi$ . Якобиан преобразования координат  $(A, \Phi) \rightarrow (\xi, \psi)$  равен:  $J = 1 / A$ . Совместное распределение в переменных  $\xi$  и  $\psi$  выражается как  $w_{1,2}(\xi, \psi) = J w_{1,2}(A, \Phi) = w_1(A) / (2\pi A)$ . Отсюда найдем функцию распределения огибающей АМ - процесса

$$w_1(\xi) = \int_{\xi = const}^{\infty} w_1(A) / (2\pi A) d\psi = (1 / (2\pi)) \int_{|\xi|}^{\infty} w_1(A) / (A^2 - \xi^2)^{1/2} dA. \quad (3.27)$$

Фазовая модуляция. Рассмотрим квазигармоническое колебание с постоянной амплитудой  $A_0$  и случайной флуктуирующей фазой  $\Phi(t)$ :

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Phi(t)). \quad (3.28)$$

Пусть фазовая модуляция является стационарной гауссовской

$$w(\Phi) = 1 / (2\pi\sigma_0^2)^{1/2} \exp(-\Phi^2 / (2\sigma_0^2)), \quad (3.29)$$

где  $-\infty < \Phi < \infty$ .

Для распределения (3.29) получим:  $\langle \Phi \rangle = 0, \langle \Phi \Phi_\tau \rangle = B_0(\tau) = \sigma_0^2 R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$ . Для того же распределения найдем средние:  $\langle e^{j\Phi} \rangle = \langle e^{-j\Phi} \rangle = \exp(-\sigma_0^2 / 2)$  и  $\langle \exp(j(\Phi \pm \Phi_\tau)) \rangle = \exp(-\sigma_0^2 (1 \pm R_0(\tau)))$ . Используя последние выражения, теперь найдем среднее  $\langle x \rangle$  и корреляционную функцию:  $B(t, \tau) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ , ФМ - колебания (3.28)

$$\langle x \rangle = A_0 \exp(-\sigma_0^2 / 2) \cos \omega_0 t, \quad (3.30)$$

$$B(t, \tau) = (A_0^2 / 2) \exp(-\sigma_0^2) (\exp B_0(\tau) - 1) (\cos \omega_0 \tau - \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau)). \quad (3.31)$$

Выражения (3.30) и (3.31) показывают, что ФМ - колебание (3.28) является случайным нестационарным процессом. Соответствующими приборами измеряются средние по времени спектральные и корреляционные характеристики. Проводя в (3.31) усреднение по периоду колебания на несущей частоте:  $T = 2\pi / \omega_0$ , получим

$$\langle B(t, \tau) \rangle_T = (A_0^2 / 2) \exp(-\sigma_0^2) (\exp B_0(\tau) - 1) \cos \omega_0 \tau. \quad (3.32)$$

Найдем средний спектр флуктуаций ФМ - колебания

$$\begin{aligned} \langle G(\omega) \rangle_T &= (1 / (2\pi)) \int_{-\infty}^{\infty} \langle B(t, \tau) \rangle_T e^{-j\omega\tau} d\tau = (A_0^2 / (8\pi)) \exp(-\sigma_0^2) \cdot \\ &\bullet \int_{-\infty}^{\infty} (\exp B_0(\tau) - 1) (\exp(j(\omega_0 - \omega)\tau) + \exp(-j(\omega_0 + \omega)\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (3.33)$$

и среднюю интегральную по спектру мощность флуктуаций

$$\langle \sigma^2 \rangle_T = \langle V(t, 0) \rangle_T = (A_0^2/2) (1 - \exp(-\sigma_0^2)). \quad (3.34)$$

Усредним по периоду  $T$  полную статистически среднюю мощность ФМ - колебания:  $\langle x^2 \rangle = \sigma^2 + \langle x \rangle^2$ , с учетом (3.30) и (3.34) получим:  $\langle \langle x^2 \rangle \rangle_T = A_0^2/2$ . Таким образом, средняя статистически и по времени мощность ФМ - колебания постоянна и равна мощности немодулированного колебания. Другими словами, модулируя фазу, можно изменить спектр колебания, но не его среднюю интегральную интенсивность. Этот вывод справедлив не только при гауссовской, но и при любой другой статистике ФМ. В (3.28) зависимость  $x(t)$  от  $\Phi(t)$  нелинейная. Поэтому спектр ФМ - колебания, вообще говоря, имеет совершенно другую форму, чем спектр модулирующего шума. Исключением является лишь случай слабой ФМ:  $|V_0(\tau)| \leq \sigma_0^2 \ll 1$ , когда  $\exp V_0(\tau) - 1 \approx V_0(\tau)$ . Тогда из (3.33) получаем:  $\langle G(\omega) \rangle_T \approx (A_0^2/4) (G_0(\omega - \omega_0) + G_0(\omega + \omega_0))$ . Таким образом, при слабой ФМ спектр ФМ - колебания по форме приближенно повторяет спектр модуляции. Напротив, при глубокой ФМ ( $\sigma_0^2 \gg 1$ ) имеем:  $\exp V_0(\tau) \gg 1$ , для основной по энергии части спектра. Кроме того,  $V_0(\tau)$  быстро уменьшается при отклонении  $\tau$  от нуля, так что  $\exp V_0(\tau) - 1 \approx \exp(\sigma_0^2 R_0(\tau)) \approx \exp(\sigma_0^2(1 - \alpha^2 \tau^2/2))$ . В результате получим:  $\langle G(\omega) \rangle_T \approx (A_0^2/(4\alpha(2\pi)^{1/2})) (\exp(-(\omega - \omega_0)^2/(2\alpha^2 \sigma_0^2)) + \exp(-(\omega + \omega_0)^2/(2\alpha^2 \sigma_0^2)))$ . При глубокой ФМ колебание имеет гауссовский спектр независимо от формы спектра самой модуляции. Спектр  $\langle G(\omega) \rangle_T$  намного шире спектра  $G_0(\omega)$ :  $\Delta\omega_0 \sim \alpha$ ,  $\Delta\omega \sim \alpha\sigma_0$ , так что  $\Delta\omega/\Delta\omega_0 \gg 1$ .

Частотная модуляция. Рассмотрим квазигармоническое колебание

$$\xi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \int_0^t \eta(\theta) d\theta) = A_0 \cos \Phi(t). \quad (3.35)$$

В отличие от ФМ (3.28) при ЧМ случайный процесс с заданными характеристиками:  $\langle \eta \rangle = 0$ ,  $\langle \eta \eta_\tau \rangle = V_0(\tau) = \sigma_0^2 R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$ , входит под знак интеграла. В (3.35) мгновенная частота колебания:  $\omega(t) = d\Phi(t)/dt = \omega_0 + \eta(t)$ , испытывает модуляцию по случайному закону  $\eta(t)$ . Фаза

$$\varphi(t) = \int_0^t \eta(\theta) d\theta, \quad (3.36)$$

является случайным диффузионным процессом.

Выражение для дисперсии  $\langle \varphi^2(t) \rangle$  дается выражением (3.22). Используя результаты анализа выражения (3.22) в п. 3.2, заключаем, что в установившемся режиме частотной модуляции ( $t \rightarrow \infty$ ) дисперсия фазовых флуктуаций растет со временем по линейному закону:  $\sigma^2 = 2Dt$ , где  $D = \pi G_0$ . То есть дисперсия фазы  $\varphi(t)$  неограниченно растет со временем. Тогда независимо от вида статистики

частотной модуляции распределение фазы  $w(\varphi)$ , приведенное к интервалу  $2\pi$ , с течением времени стремится к равномерному (как у белого шума)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(\varphi) = 1 / (2\pi). \quad (-\pi < \varphi < \pi) \quad (3.37)$$

Из (3.37) следует, что ЧМ - колебание в установившемся режиме является стационарным процессом. Для определения функции распределения  $w_1(\xi)$  ЧМ - колебания с равномерным распределением фазы можно использовать формулу (3.27). При постоянной амплитуде  $A_0$  функция распределения амплитуды:  $w_1(A) = \delta(A - A_0)$ . Подставляя последнее выражение в (3.27), получаем одномерное распределение ЧМ - колебания в установившемся режиме

$$w_1(\xi) = \begin{cases} 1 / (2\pi (A_0^2 - \xi^2)^{1/2}) & (|\xi| \leq A_0) \\ 0 & (|\xi| > A_0). \end{cases} \quad (3.38)$$

Из (3.38) следует, что  $\langle \xi \rangle = 0$ , то есть в спектре ЧМ - колебания нет дискретной составляющей на несущей частоте  $\omega_0$ .

Конкретизируем полученные результаты для случая ЧМ - модуляции шумом  $\eta(t)$ , распределенным по гауссовскому закону. При этом гауссовскими будут и флуктуации фазы  $\varphi(t)$  из (3.36). Выше было показано, что при ЧМ дисперсия фазовых флуктуаций  $\sigma^2 \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому в пределе:  $t \rightarrow \infty$ , получим (см. вывод формул (3.30) и (3.31))

$$\langle \exp(j\varphi) \rangle = \langle \exp(j(\varphi + \varphi_\tau)) \rangle = 0, \quad (3.39)$$

$$\langle \exp(j(\varphi - \varphi_\tau)) \rangle = \langle \exp(-j \int_0^\tau \eta(\theta + t) d\theta) \rangle = \exp(-\sigma^2(|\tau|)/2). \quad (3.40)$$

Используя выражение (3.22) для  $\sigma^2$ , а также (3.39) и (3.40), можно получить корреляционную функцию ЧМ - колебания (3.35)

$$B(\tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle = (A_0^2 / 2) \exp(-\sigma_0^2 \psi(\tau)) \cos \omega_0 \tau, \quad (3.41)$$

где  $\psi(\tau) = \sigma^2(|\tau|) / (2 \sigma_0^2)$  и среднее берется по распределению (5.38).

В частности, из (3.41) следует:  $\langle \xi^2 \rangle = B(0) = A_0^2 / 2$ , то есть ЧМ, как и ФМ, не изменяет интегральной по спектру мощности  $G(\omega)$  интенсивности колебания  $\langle \xi^2 \rangle$ . Функция  $\psi(\tau)$  при малых значениях  $\tau$  изменяется по квадратичному закону, а при больших - по линейному закону

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \tau^2 / 2 & (\tau \ll \tau_0) \\ (D / \sigma_0^2) (|\tau| - \tau_0) & (\tau \gg \tau_0), \end{cases} \quad (3.42)$$

где  $\tau_0$  - время корреляции для случайного процесса  $\eta(t)$ ,  $D = \pi G_0(0)$ .

Если интенсивность модуляции велика:  $\tau_0^2 \sigma_0^2 \gg 1$ , то  $B(\tau)$  в (3.41) успеет уменьшиться почти до нуля на квадратичном участке (см. (3.42)). Тогда вместо (3.41) получим приближенно

$$B(\tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle = (A_0^2 / 2) \exp(-\sigma_0^2 \tau^2 / 2) \cos \omega_0 \tau. \quad (3.43)$$

Применим преобразование Винера - Хинчина (1.21) к выражению (3.43):

$$G(\omega) = (A_0^2 / (4(2\pi)^{1/2} \sigma_0)) (\exp(-(\omega - \omega_0)^2 / (2\sigma_0^2)) + \exp(-(\omega + \omega_0)^2 / (2\sigma_0^2))), \quad (3.44)$$

то есть спектр ЧМ - колебания гауссовский, ширина спектра:  $\Delta\omega \sim \sigma_0$ .

Сравним ширину  $\Delta\omega$  спектра ЧМ - колебания с шириной  $\Delta\omega_0$  спектра частотных флуктуаций  $\eta(t)$ . Величину  $\Delta\omega_0$  выразим, используя (1.25), как  $\Delta\omega_0 = \pi / \tau_0$ . В результате получим оценку:  $\Delta\omega / \Delta\omega_0 \sim \sigma_0 / \Delta\omega_0 = (\sigma_0^2 / \Delta\omega_0^2)^{1/2} \sim (\sigma_0^2 \tau_0^2)^{1/2} \gg 1$ . То есть при интенсивной ЧМ - модуляции спектр шума ЧМ - колебания намного шире спектра шума, модулирующего частоту. Рассмотрим другой предельный случай - слабой (или достаточно быстрой) модуляции:  $D \tau_0 \ll 1$ . Тогда заметное уменьшение корреляционной функции  $B(\tau)$  происходит на линейном участке (3.42). Вместо (3.41) получим

$$B(\tau) = (A_0^2 / 2) \exp(-D |\tau|) \cos \omega_0 \tau. \quad (3.45)$$

Применим преобразование Винера - Хинчина (1.21) к выражению (3.45):

$$G(\omega) = (A_0^2 D / (4\pi)) (1 / (D^2 + (\omega - \omega_0)^2) + 1 / (D^2 + (\omega + \omega_0)^2)). \quad (3.46)$$

Спектр мощности (3.46) имеет вид лоренцевской кривой, ширина спектра:  $\Delta\omega \sim D = \pi G_0(0)$ . Отношение ширины спектра ЧМ - колебания к ширине спектра модуляции частоты равно  $\Delta\omega / \Delta\omega_0 \sim D \tau_0 \ll 1$ . Значит при слабой ЧМ - модуляции спектр шума ЧМ - колебания более узкий, чем у шума, модулирующего частоту.

## 4. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ РАДИОСИСТЕМАХ

### 4.1. Статистика случайных процессов

Случайный процесс  $\xi(t)$  на входе системы выразим через спектральную амплитуду процесса  $\xi_\omega$ , используя преобразование Фурье (1.19). Случайный процесс  $x(t)$  на выходе системы с постоянными параметрами выразим через передаточную функцию  $K(\omega)$  или импульсную характеристику  $H(t)$  системы [6]:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\omega K(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.1)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\theta) H(t - \theta) d\theta. \quad (4.2)$$

Пусть  $\xi(t)$  - стационарный шум:  $\langle \xi \rangle = 0$ ,  $\langle \xi \xi_\tau \rangle = B_{\text{вх}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$ , из (1.23) имеем:  $\langle \xi_\omega \xi_{\omega'} \rangle = \langle \xi_\omega \xi_{-\omega}^* \rangle = G_{\text{вх}}(\omega) \delta(\omega + \omega')$ ; усредняя (1.19), найдем:  $\langle \xi_\omega \rangle = 0$ , а из (4.1) -  $\langle x \rangle = 0$ . Функция корреляции стационарного процесса на выходе

$$\langle x x_\tau \rangle = B_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) |K(\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega. \quad (4.3)$$

Используя (1.22) для четных функций  $B(\tau)$  и  $G(\omega)$ , имеем

$$B_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega. \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) следует связь спектров шума на входе и выходе линейной системы с постоянными параметрами

$$G_{\text{вых}}(\omega) = G_{\text{вх}}(\omega) |K(\omega)|^2. \quad (4.5)$$

Интегрируя (4.5), найдем полную дисперсию стационарных флуктуаций на выходе системы

$$\langle x^2 \rangle = \sigma_{\text{вых}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.6)$$

Когда параметры системы непостоянны, передаточная функция зависит и от времени:  $K(\omega, t)$ . Тогда процесс на выходе уже нестационарный. Если на входе системы действует белый шум:  $G_{\text{вх}}(\omega) = 1/(2\pi)$ , то из (4.3) найдем функцию корреляции процесса на выходе

$$B_0(\tau) = (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} d\omega. \quad (4.7)$$

Обратное к (4.7) преобразование Фурье дает

$$|K(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.8) в (4.3), выразим корреляционную функцию на выходе

$$B_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau + \tau') B_{\text{вх}}(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau') B_{\text{вх}}(\tau + \tau') d\tau'. \quad (4.9)$$

## 4.2. Фильтрация шума избирательными системами

Об устройствах, изменяющих форму спектра шума, говорят как о фильтрах. Для линейных систем фильтрация описывается выражением (4.5). Максимумы резонансной кривой  $|K(\omega)|^2$  приходятся на резонансные частоты избирательной системы. На рис. 4.1 качественно показаны резонансные кривые и спектры мощности входного шума для двух предельных случаев а) и б).

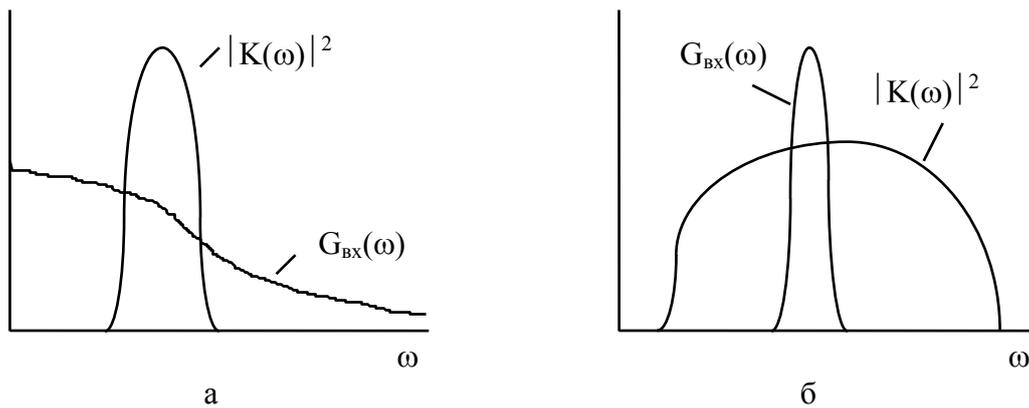


Рис. 4.1

В случае а) спектр  $G_{\text{вых}}(\omega)$  мало меняется в пределах полосы пропускания системы, то есть  $G_{\text{вых}}(\omega) \sim |K(\omega)|^2$ , и эффект фильтрации выражен наиболее сильно. В случае б) величина  $|K(\omega)|^2$  почти постоянна в пределах основной части спектра  $G_{\text{вх}}(\omega)$ , то есть  $G_{\text{вых}}(\omega) \sim G_{\text{вх}}(\omega)$ , и фильтрация почти не проявляется.

**Задача N 1.** Найти корреляционную функцию шума тока на сопротивлении  $R$  схемы фильтра НЧ на рис. 4.2, где действует генератор белого шума  $i(t)$ .

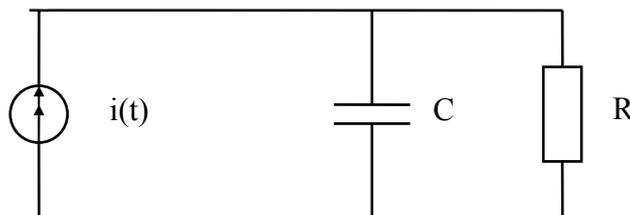


Рис. 4.2

Решение. Для схемы на рис. 4.2 резонансная кривая описывается выражением:  $|K(\omega)|^2 = \alpha^2 / (\alpha^2 + \omega^2)$ , где  $\alpha = 1 / (RC)$ . Подставляя это выражение для  $|K(\omega)|^2$  в (4.7) и применяя теорию вычетов [22], найдем:  $V_0(\tau) = (\alpha/2) \exp(-\alpha |\tau|)$ .

Задача N 2. Найти корреляционную функцию шума напряжения на емкости  $C$  колебательного контура (см. рис. 4.3), где действует э.д.с. белого шума.

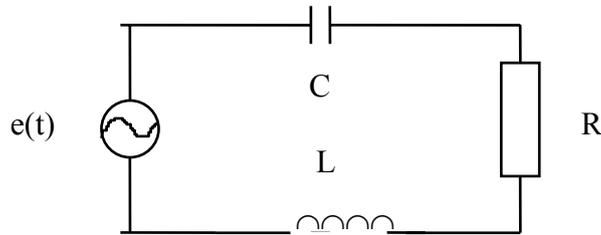


Рис. 4.3

Решение. Для схемы на рис. 4.3 резонансная кривая описывается выражением:  $|K(\omega)|^2 = \omega_0^4 / ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \alpha^2 \omega^2)$ , где  $\alpha = R / (2 L)$  и  $\omega_0 = 1 / (L C)^{1/2}$ . Подставляя это выражение для  $|K(\omega)|^2$  в (4.7) и применяя теорию вычетов [22], найдем:  $V_0(\tau) = (\omega_0^2 / (4\alpha)) \exp(-\alpha |\tau|) [\cos((\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \tau) + \alpha / (\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \sin((\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \tau)]$ .

### 4.3. Установление шумовых колебаний

Предположим, что стационарный шум  $\xi(t)$  ( $\langle \xi \rangle = 0$ ,  $\langle \xi \xi_\tau \rangle = V_{\text{вх}}(\tau)$ ) начал действовать на систему в момент  $t = 0$ . На входе системы действует сигнал

$$f(t) = I(t) \xi(t), \quad (4.10)$$

где  $I(t)$  - ступенчатая единичная функция,  $I(t) = 1$  при  $t > 0$  и  $I(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Для описания нестационарных процессов удобно использовать не спектральный (4.1), а временной подход (4.2). Подставив (4.10) в (4.2) (вместо  $\xi(t)$ ), выразим сигнал на выходе системы

$$x(t) = \int_0^t \xi(t - \theta) H(\theta) d\theta. \quad (4.11)$$

Используя (4.11), выразим дисперсию нестационарного шума на выходе

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \langle x^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t H(\theta) H(\theta') V_{\text{вх}}(\theta - \theta') d\theta d\theta'. \quad (4.12)$$

Если система устойчива, то импульсная характеристика затухает со временем:  $H(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , и  $\sigma_{\text{вых}}^2$  стремится к установившемуся значению (4.6).

Задача. Для схемы колебательного контура (см. рис. 4.3) исследовать дисперсию шумовых колебаний напряжения на емкости  $C$  со временем при пере-

ходном процессе, вызванном включением э.д.с. белого шума с корреляционной функцией:  $V_{\text{вх}}(\tau) = \delta(\tau)$  (см. п. 2.2), в контуре в момент  $t = 0$ .

**Решение.** Известно [6], что импульсная характеристика цепи может быть выражена через передаточную функцию цепи

$$H(\theta) = (1 / (2\pi)) \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{j\omega\theta} d\omega. \quad (4.13)$$

Передаточная функция для изучаемой цепи:  $K(\omega) = \omega_0^2 / ((\omega_0^2 - \omega^2) + 2 j \alpha \omega)$ . Подставим последнее выражение в (4.13), получим:  $H(\theta) = \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \bullet \bullet \exp(-\alpha \theta) \sin((\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \theta)$ , где  $\theta \geq 0$ . Подставляя выражения для  $V_{\text{вх}}(\tau)$  и  $H(\theta)$  в (4.12), получим

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \sigma_{\text{уст}}^2 (1 - \alpha / (\omega_0^2 - \alpha^2) C(t) \exp(-2 \alpha t)), \quad (4.14)$$

где  $\sigma_{\text{уст}}^2$  - установившееся значение дисперсии, которое соответствует выражению (4.6),  $\sigma_{\text{уст}}^2 = \omega_0^2 / (4\alpha)$ ,  $\sigma_{\text{вых}}^2(t) \rightarrow \sigma_{\text{уст}}^2$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $C(t) = (2 \alpha \sin^2((\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} t) + (\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} \sin(2(\omega_0^2 - \alpha^2)^{1/2} t) + (\omega_0^2 - \alpha^2) / \alpha)$ .

Для контура со слабым затуханием:  $\alpha^2 \ll \omega_0^2$ , тогда (4.14) приближенно упрощается:  $\sigma_{\text{вых}}^2(t) \approx \sigma_{\text{уст}}^2 (1 - \exp(-2\alpha t))$ . Отсюда следует, что характерное время установления стационарной мощности шума в колебательном контуре  $\sim 1/\alpha$ , то есть порядка характерного времени затухания свободных колебаний в контуре.

#### 4.4. Распределение вероятностей на выходе системы

Пусть при заданном распределении вероятностей случайного процесса на входе линейной системы требуется определить распределение вероятностей на выходе системы. Наиболее просто эта задача решается, если на входе действует гауссовский случайный процесс  $\eta(t)$  со средним  $\langle \eta \rangle$ :  $\eta(t) = \langle \eta(t) \rangle + \eta_{\text{ш}}(t)$ , где  $\eta_{\text{ш}}(t)$  - гауссовский шум с функцией распределения:  $w_{\text{ш}}(\eta_{\text{ш}}, t) = 1 / (2\pi \sigma_{\text{ш}}^2)^{1/2} \bullet \bullet \exp(-\eta_{\text{ш}}^2 / (2 \sigma_{\text{ш}}^2))$ . Прохождение детерминированного процесса  $\langle \eta(t) \rangle$  через линейную систему даст на выходе детерминированный процесс  $\langle x(t) \rangle$ . Основываясь на центральной предельной теореме (ЦПТ) теории вероятностей [2, 3], представим гауссовский шум  $\eta_{\text{ш}}(t)$  суперпозицией большого числа  $N$  статистически независимых друг от друга случайных процессов с произвольными функциями распределения. В соответствии с принципом суперпозиции прохождение каждой из составляющих сигнала  $\eta(t)$  через линейную систему можно исследовать независимо от остальных. Шум  $\eta_{\text{ш}}(t)$  на входе системы создаст шум  $x_{\text{ш}}(t)$  на выходе, состоящий из большого числа  $N$  случайных процессов, статистически независимых друг от друга. Согласно ЦПТ, их суперпозиция есть гауссовский шум на выходе системы. Вывод - если на входе линейной системы действует гауссовский случайный процесс:  $\eta(t) = \langle \eta(t) \rangle + \eta_{\text{ш}}(t)$ , то на ее выходе случайный процесс:  $x(t) = \langle x(t) \rangle + x_{\text{ш}}(t)$  также будет гауссовским.

Интеграл наложения (4.2) можно обобщить на случай линейной системы с переменными параметрами [6] посредством замены:  $H(t - \theta) \rightarrow H(t, \theta)$  в (4.2). При этом надо учесть, что импульсная характеристика системы в общем случае зависит от двух аргументов:  $t$  и  $\theta$ , и лишь для систем с постоянными параметрами  $H(t, \theta) = H(t - \theta)$ . Проводя искомую замену в (4.2) и усредняя полученное равенство, найдем среднее значение процесса на выходе системы

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \eta \rangle H(t, \theta) d\theta. \quad (4.15)$$

Действие же шума  $\eta_{ш}(t)$  на входе создаст шум на выходе

$$x_{ш}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{ш}(\theta) H(t, \theta) d\theta. \quad (4.16)$$

Используя (4.16), найдем корреляционную функцию флуктуаций, вообще говоря, нестационарного процесса на выходе

$$B_{\text{ВЫХ}}(t, t + \tau) = \langle x_{ш}(x_{ш})_{\tau} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{ВХ}}(\theta, \theta') H(t, \theta) H(t + \tau, \theta) d\theta d\theta', \quad (4.17)$$

где  $B_{\text{ВХ}}(\theta, \theta')$  - корреляционная функция случайного процесса  $\eta(t)$  на входе,  $B_{\text{ВХ}}(\theta, \theta') = \langle \eta_{ш}(\theta) \eta_{ш}(\theta') \rangle$ ; дисперсия шума на выходе:  $\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \langle x_{ш}^2 \rangle$ .

Среднее  $\langle x \rangle$  и дисперсия  $\sigma_{\text{ВЫХ}}^2$  полностью определяют функцию распределения гауссовского процесса на выходе системы:  $w(x, t) = 1 / (2 \pi \sigma_{\text{ВЫХ}}^2)^{1/2} \cdot \exp(- (x - \langle x \rangle)^2 / (2 \sigma_{\text{ВЫХ}}^2))$ .

Теперь рассмотрим случай, когда входной шум не является гауссовским. Формулы (4.15) - (4.17) остаются справедливыми и в этом случае. Однако знания лишь среднего и дисперсии недостаточно для определения функции распределения любого негауссовского процесса. Во многих практически важных случаях статистика шума на выходе линейной системы оказывается близка к гауссовскому шуму. Это явление называют эффектом нормализации шумовых колебаний на выходе линейной системы. Обоснуем существование данного эффекта в линейной системе с постоянными параметрами при выполнении следующих условий: 1) спектр входного шума намного шире резонансной кривой системы ( $\Delta\omega_{ш}^{\text{ВХ}} \gg \Delta\omega_{\text{рез}}$ ); 2) если шум нестационарный (переходной процесс), то дополнительно к 1) ставится еще одно условие -  $\Delta\omega_{ш}^{\text{ВХ}} \gg 1/t$ , где  $t$  - полное время действия внешнего шума на систему.

Обозначим  $\tau_{\text{рел}}$  - характерное время затухания свободных колебаний на выходе системы, описывающих переходной процесс,  $\tau_{\text{рел}} \sim 1 / \Delta\omega_{\text{рез}}$ . Тогда значениями импульсной характеристики при  $\theta > \tau_{\text{рел}}$  ( $\theta = 0$  - момент начала переходного процесса) можно пренебречь. Вместо (4.2) получим приближенно

$$x(t) \approx \int_0^t H(\theta) \eta(t - \theta) d\theta. \quad (4.18)$$

Введя время корреляции входного шума:  $\tau_k \sim 1 / \Delta\omega_{ш}^{Bx}$ , условие 1) можно переписать:  $\tau_k \ll 1 / \Delta\omega_{рез}$ . Будем считать, что последнее неравенство выполняется с запасом, и выберем интервал времени  $\tau$  такой, что  $\tau_k \ll \tau \ll \tau_{рел}$ . Представим интеграл (4.18) приближенно в виде суммы  $N$  членов ( $N \approx \tau_{рел} / \tau \gg 1$ )

$$x(t) \approx \sum_{n=1}^N x_n(t), \quad (4.19)$$

$$x_n(t) = \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} H(\theta) \eta(t - \theta) d\theta \approx H(n\tau) \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \eta(t - \theta) d\theta. \quad (4.20)$$

Условие 1) позволяет рассматривать приближенно входной шум как белый с корреляционной функцией:  $B_{вх}(\theta - \theta') = \langle \eta(t - \theta) \eta(t - \theta') \rangle = 2\pi G_0 \delta(\theta - \theta')$ . Оценим корреляцию между отдельными членами ряда (4.19). Для этого запишем выражение для корреляционной функции:  $B_{nm} = \langle x_n x_m \rangle$ , и выразим  $x_n$  и  $x_m$  с помощью (4.20). В результате преобразований получим:  $B_{nm} = 0$  при  $n \neq m$ . То есть члены ряда (4.19) статистически независимы друг от друга, и, согласно (4.19), случайный процесс на выходе - суперпозиция большого числа независимых составляющих. В соответствии с ЦПТ можем считать приближенно, что процесс на выходе системы гауссовский независимо от статистики шума на входе.

#### 4.5. Тепловые шумы

Тепловое движение свободных электронов в проводнике приводит к флуктуациям потоков электронов и вызывает случайный электрический ток  $i_T(t)$ , который называют тепловым. Флуктуации электронной плотности, связанные с тепловыми токами, приводят к появлению случайной разности потенциалов на концах проводника. То есть любой двухполюсник, содержащий активное сопротивление, можно рассматривать как генератор случайной э.д.с.  $\varepsilon_T(t)$ . Тепловые шумы создают неустранимые флуктуационные помехи в любой радиосистеме. Применим термодинамический подход для выяснения спектральных свойств тепловых шумов. На рис. 4.4 показана цепь из двух двухполюсников с импедансами:  $Z_{1,2}(\omega) = R_{1,2}(\omega) + j X_{1,2}(\omega)$ , помещенная в термостат при температуре  $T$ .

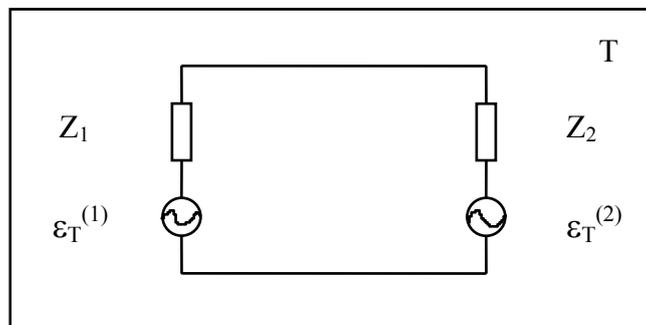


Рис. 4.4

Эквивалентная схема каждого из двух двухполюсников состоит из сопротивления и тепловой э.д.с. Пусть  $i_T^{(k)}$  - сила теплового тока, вызванного в цепи тепловой э.д.с.  $\varepsilon_T^{(k)}$ , где  $k = 1, 2$ . Полная сила шумового тока:  $i_T = i_T^{(1)} + i_T^{(2)}$ . Обозначим мощность, отдаваемую источником  $\varepsilon_T^{(1)}$  ( $\varepsilon_T^{(2)}$ ) в двухполюсник  $z_2$  ( $z_1$ ), как  $P_{1,2}$  ( $P_{2,1}$ ). Согласно второму началу термодинамики, теплообмен между отдельными частями равновесной изолированной системы не может нарушить теплового равновесия системы. Поэтому

$$P_{1,2} = P_{2,1}. \quad (4.21)$$

Пусть  $G_T^{(k)}(\omega)$  - спектральная плотность мощности флуктуаций э.д.с.  $\varepsilon_T^{(k)}$ , где  $k = 1, 2$ . Полный импеданс цепи равен  $z = z_1 + z_2$ . Спектральная плотность мощности флуктуаций силы тока  $i_T^{(k)}$  равна  $G_T^{(k)}(\omega) / |z|^2$ , где  $k = 1, 2$ . Тогда

$$P_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} R_2 G_T^{(1)}(\omega) / |z|^2 d\omega, \quad (4.22)$$

$$P_{2,1} = \int_{-\infty}^{\infty} R_1 G_T^{(2)}(\omega) / |z|^2 d\omega. \quad (4.23)$$

Подставляя (4.22) и (4.23) в (4.21), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_2 G_T^{(1)}(\omega) / |z|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} R_1 G_T^{(2)}(\omega) / |z|^2 d\omega. \quad (4.24)$$

Пусть, например,  $R_2 = 0$  и  $R_1 > 0$ . Тогда из (4.24) следует:  $G_T^{(2)}(\omega) = 0$ . То есть, если двухполюсник не содержит активного сопротивления, то спектральная плотность э.д.с. теплового шума на нем равна нулю. Пусть между двухполюсниками  $z_1$  и  $z_2$  включен дополнительно произвольный пассивный двухполюсник:  $z_3 = j X_3$ . Повторяя выкладки, вместо (4.24) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_2 G_T^{(1)}(\omega) / |z'|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} R_1 G_T^{(2)}(\omega) / |z'|^2 d\omega, \quad (4.25)$$

где  $z'$  - полный импеданс цепи,  $z' = z_1 + z_2 + z_3$ .

Так как выбор сопротивления  $z_3$  произволен, то из (4.25) следует:  $R_2 G_T^{(1)}(\omega) / |z'|^2 = R_1 G_T^{(2)}(\omega) / |z'|^2$ . Отсюда следует, что отношение спектральной плотности теплового шума к активной части любого сопротивления, в котором он генерируется, является универсальной функцией  $T$  и  $\omega$ :

$$G_T(\omega) = R(\omega) u(\omega, T) = \text{Re} \{z(\omega)\} u(\omega, T). \quad (4.26)$$

Так как функция  $u(\omega, T)$  универсальна, то результат ее расчета не зависит от конкретного выбора системы. В классической области (при  $kT \gg h\nu$ , где  $h$  - постоянная Планка,  $k$  - постоянная Больцмана, и частота:  $\nu = \omega/(2\pi)$ ) справедлива теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Тогда средняя

энергия тепловых флуктуаций в системе с  $N$  колебательными степенями свободы равна

$$\langle w \rangle = N k T. \quad (4.27)$$

В качестве пробной системы рассмотрим высокодобротный колебательный контур (см. рис. 4.3), настроенный на резонансную частоту  $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$ . Под э.д.с.  $e(t)$  контура понимается тепловая э.д.с.  $\varepsilon_T(t)$ . Полоса пропускания контура:  $\Delta\omega = 2\alpha = R/L$ , предполагается много уже эффективной ширины спектра флуктуаций  $G_T(\omega)$  тепловой э.д.с. Тогда входной шум можно аппроксимировать как белый:  $G_{\text{вх}}(\omega) = G_T(\omega_0)$ . Передаточная функция изучаемой цепи (см. задачу п. 4.3):  $K(\omega) = \omega_0^2 / ((\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\alpha\omega)$ . Подставим приведенные выражения для  $G_T(\omega)$  и  $K(\omega)$  в (4.6). Найдем дисперсию флуктуаций напряжения на емкости контура:  $\langle u_{\text{вых}}^2(t) \rangle = \pi G_T(\omega_0) \omega_0^2 / (2\alpha)$ . Средняя энергия шумового электрического поля конденсатора:  $\langle w_E \rangle = C \langle u_{\text{вых}}^2(t) \rangle / 2$ , равна средней энергии шумового магнитного поля катушки индуктивности в контуре. Сумма этих энергий есть полная средняя энергия шумовых колебаний контура. Та же полная энергия может быть выражена из (4.27) при  $N = 1$  (колебательный контур обладает одной колебательной степенью свободы). Таким образом, имеем:  $\pi C G_T(\omega_0) \omega_0^2 / (2\alpha) = k T$ , то есть  $G_T(\omega_0) = kTR/\pi$ . Последнее выражение подставим в (4.26), взятое при  $\omega = \omega_0$ , и выразим отсюда универсальную функцию

$$u(\omega_0, T) = u(T) = (1/\pi) k T. \quad (4.28)$$

Из (4.28) следует, что искомая универсальная функция не зависит от частоты  $\omega$ . Подставляя (4.28) в (4.26), получаем формулу Найквиста для спектральной плотности мощности теплового шума произвольного двухполюсника

$$G_T(\omega) = (k T/\pi) \operatorname{Re} \{z(\omega)\}. \quad (4.29)$$

Из (4.29) следует, что  $G_T(\omega) \sim T$  и что зависимость  $G_T(\omega)$  от частоты  $\omega$  полностью определяется зависимостью активной части сопротивления двухполюсника от частоты. Формула Найквиста справедлива в квазиклассическом приближении:  $kT \gg \hbar\nu$  ( $\nu = \omega/(2\pi)$ ). При комнатной температуре:  $T = 300$  К, равенство:  $kT = \hbar\nu$ , имеет место приближенно на частоте  $\nu \sim 10^{13}$  Гц. То есть классическое приближение при комнатной температуре справедливо для всего радиодиапазона частот. В частности, идеальное омическое сопротивление  $R$  не зависит от частоты. Поэтому тепловой шум, генерируемый омическим сопротивлением в радиодиапазоне, можно считать белым. Приближение  $\delta$ -коррелированности процесса хорошо выполняется практически для всех задач, связанных с изучением воздействия теплового шума на реальные радиотехнические системы.

Задача. Модель реального омического сопротивления состоит из параллельно соединенных идеального сопротивления  $R$  и паразитной шунтирующей

емкости  $C_n$ . Для заданной схемы, находящейся при температуре  $T$ , найти спектр мощности теплового шума  $G_T(\omega)$  и время корреляции  $\tau_k$  шума.

Решение. Для изучаемой схемы имеем:  $\text{Re} \{z(\omega)\} = R / (1 + (\omega C_n R)^2)$ . С учетом (4.29) найдем

$$G_T(\omega) = (kT / \pi) R / (1 + (\omega C_n R)^2). \quad (4.30)$$

Из (1.24) и (1.25) следует

$$\tau_k = (4 \pi / \sigma_T^4) \int_0^{\infty} G_T^2(\omega) d\omega, \quad (4.31)$$

где, согласно (1.20), дисперсия теплового шума

$$\sigma_T^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_T^2(\omega) d\omega. \quad (4.32)$$

Подставляя (4.30) в (4.31) и (4.32), найдем:  $\tau_k = C_n R$ , где  $\tau_k \leq (10^{-9} - 10^{-8})$  с.

В оптическом диапазоне  $\omega > 10^{14}$  Гц, и классическое приближение уже не действует. В этом диапазоне тепловой шум превращается в тепловое электромагнитное излучение, и вместо (4.29) справедливо распределение Планка для излучательной способности абсолютно черного тела.

#### 4.6. Выделение сигнала из шума

В реальных условиях прием сигнала, содержащего передаваемую информацию, всегда происходит на фоне шума. Шум может как приходить вместе с сигналом, так и генерироваться самой приемной станцией. Пусть  $I$  - мощность полезного сигнала, а  $\sigma^2$  - дисперсия фонового шума. Отношение сигнал/шум равно  $s/\sigma = I / \sigma^2$ . Прием сигнала становится статистической задачей, если  $s/\sigma$  меньше или порядка единицы. В статистической теории приема сигналов выделяют две группы задач: 1) обнаружение сигнала на фоне шума; 2) выделение сигнала из шума. В первом случае требуется лишь с максимальной надежностью вынести статистическое решение о наличии или отсутствии сигнала. Сама структура сигнала не изучается. Во втором случае речь идет о наилучшем в статистическом смысле воспроизведении сигнала, скрытого в шуме. Пусть спектры сигнала и шума различны. Тогда решение обеих задач достигается посредством линейной фильтрации (сигнал и шум пропускают через линейный фильтр).

Решим первую задачу посредством построения оптимального линейного фильтра. Пусть на линейную систему действует регулярный сигнал

$$\zeta_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.33)$$

с произвольным спектром  $\zeta_0(\omega)$ , мгновенной интенсивностью:  $I_0(t) = \zeta_0^2(t)$ , и энергией:  $Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(t) dt = 2 \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta_0(\omega)|^2 d\omega$  (равенство Парсеваля [6]).

Пусть вместе с сигналом  $\zeta_0(t)$  на вход фильтра поступает стационарный шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью мощности  $G_0(\omega)$ . Оптимальным называется фильтр, на выходе которого отношение с/ш наибольшее из всех возможных. Требуется найти передаточную функцию оптимального фильтра  $K(\omega)$ . С учетом (4.33) выразим сигнал, его мощность и энергию на выходе фильтра

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(\omega) K(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.34)$$

$$I(t) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0(\omega) K(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)^2, \quad (4.35)$$

$$Q = 2 \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta_0(\omega) K(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.36)$$

Используя (4.3), находим отношение сигнал/шум на выходе фильтра

$$(с/ш)_{\text{ВЫХ}} = I(t) / \sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = I(t) / \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 G_0(\omega) d\omega, \quad (4.37)$$

где  $\sigma_{\text{ВЫХ}}^2$  - дисперсия шума на выходе фильтра.

Интенсивность сигнала (4.35) оценим сверху с помощью неравенства Коши - Буняковского

$$I(t) \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta_0(\omega)|^2 d\omega \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega \right). \quad (4.38)$$

Предположим сначала, что шум на входе фильтра белый:  $G_0(\omega) = G_0 = \text{const}$ . Подставляя (4.38) в (4.37) и учитывая (4.36), найдем

$$(с/ш)_{\text{ВЫХ}} \leq (1/G_0) \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta_0(\omega)|^2 d\omega = Q_0 / (2 \pi G_0). \quad (4.39)$$

Оптимальному фильтру соответствует знак равенства в (4.39) и в (4.38). Равенство достигается в момент времени  $t_0$ , если передаточная функция равна оптимальной

$$K(\omega) = K_{\text{опт}}(\omega) = \alpha \zeta_0^*(\omega) \exp(-j \omega t_0), \quad (4.40)$$

где  $\alpha$  и  $t_0$  - произвольные постоянные, и знак «\*» обозначает комплексное сопряжение.

Выражение (4.40) дает передаточную функцию оптимального фильтра, если входной шум белый. В (4.39) равенство достигается только в момент  $t = t_0$ , который оптимален для вынесения решения о наличии сигнала. Выражение (4.40) также показывает, что характеристика оптимального фильтра близка к спектру входного сигнала. Поэтому оптимальный фильтр называют также

фильтром, согласованным с сигналом. Подставляя (4.40) в (4.34), найдем сигнал на выходе оптимального фильтра

$$\zeta(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta_0(\omega)|^2 \exp(j\omega(t - t_0)) d\omega, \quad (4.41)$$

который принимает максимальное значение:  $\zeta_{\max} = \alpha Q_0 / (2\pi)$ , в момент  $t = t_0$ .

Сигнал (4.41) - симметричный относительно момента  $t = t_0$  импульс, который по форме может сильно отличаться от сигнала на входе фильтра. Например, если на входе прямоугольный импульс, то на выходе - треугольный.

Теперь предположим, что шум на входе фильтра уже не является белым. Если спектры шума и сигнала на входе не перекрываются или перекрываются слабо, то нет необходимости строить оптимальный фильтр. Как обнаружение, так и выделение сигнала из шума достигается применением полосового фильтра. Сигнал находится в полосе пропускания фильтра, а шум - в полосе задержки. Более сложная ситуация, когда перекрытие сигнала и шума по спектру существенно или даже полное, но спектр шума значительно изменяется в полосе спектра сигнала. Оптимальный фильтр строят путем каскадного соединения двух фильтров. Передаточная функция всего фильтра:  $K(\omega) = K_1(\omega) K_2(\omega)$ . Первый фильтр выбирают так, чтобы на его выходе шум был белым. Для этого задают

$$K_1(\omega) = C / G_0^{1/2}(\omega) \exp(j\varphi(\omega)), \quad (4.42)$$

где выбор  $C = const$  и  $\varphi(\omega)$  произволен.

Чтобы проверить, что на выходе первого фильтра действительно получается белый шум, достаточно подставить (4.42) в (4.5). Характеристику второго фильтра берут равной (4.40).

Перейдем к решению задачи о выделении сигнала из шума. Во многих случаях радиосигнал, например промодулированный человеческой речью, можно рассматривать как стационарный шум  $\xi_1(t)$ . Предположим, что искажающая сигнал  $\xi_1(t)$  помеха  $\xi_2(t)$  - тоже стационарный шум. Пусть процессы  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  статистически независимы,  $\langle \xi_1 \rangle = \langle \xi_2 \rangle = 0$ , корреляционные функции  $B_1(\tau)$  и  $B_2(\tau)$  процессов  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  считаются известными. Требуется определить передаточную функцию  $K(\omega)$  фильтра, суммарный процесс на выходе которого

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) (\xi_{1\omega} + \xi_{2\omega}) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.43)$$

где спектральные компоненты ( $n = 1, 2$ )

$$\xi_{n\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_n(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.44)$$

с некоторой задержкой по времени  $t_0$  наилучшим образом воспроизводит бы входной сигнал  $\xi_1(t)$ .

В качестве критерия наилучшего воспроизведения выберем критерий минимума среднеквадратичного значения  $\langle \mu^2 \rangle$  ошибки воспроизведения сигнала

$$\mu(t) = \xi(t + t_0) - \xi_1(t). \quad (4.45)$$

Обозначим импульсную характеристику оптимального фильтра как  $H(\theta)$  и найдем уравнение, которому подчиняется эта функция. Используя интеграл наложения, запишем

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) (\xi_1(t - \theta) + \xi_2(t - \theta)) d\theta, \quad (4.46)$$

где функция:  $\xi_1(t - \theta) + \xi_2(t - \theta)$  - полный процесс на входе фильтра как функция аргумента  $t - \theta$ . Подставим (4.46) в (4.45) и выразим  $\langle \mu^2 \rangle$ :

$$\langle \mu^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) H(\theta') [B_1(\theta - \theta') + B_2(\theta - \theta')] d\theta d\theta' - 2 \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) B_1(\theta - t_0) d\theta + B_1(0), \quad (4.47)$$

где корреляционные функции:  $B_1(\tau) = \langle \xi_1 \xi_{1\tau} \rangle$  и  $B_2(\tau) = \langle \xi_2 \xi_{2\tau} \rangle$ .

Выражение (4.47) рассмотрим как функционал от функции  $H$ . Найдем вариацию этого функционала по  $H$ :

$$\delta \langle \mu^2 \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta H(\theta) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta') [B_1(\theta - \theta') + B_2(\theta - \theta')] d\theta' - B_1(\theta - t_0) \right\} d\theta. \quad (4.48)$$

Минимум функционала достигается при равенстве нулю его вариации

$$\delta \langle \mu^2 \rangle = 0. \quad (4.49)$$

Уравнения (4.48) и (4.49) совместны, если функция  $H(\theta)$  удовлетворяет

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) [B_1(\tau - \theta) + B_2(\tau - \theta)] d\theta = B_1(\tau - t_0). \quad (4.50)$$

Уравнение (4.50) называется уравнением Винера - Хопфа, и его решением является импульсная характеристика  $H(\theta)$  оптимального фильтра. Используя преобразование Винера - Хинчина (1.22), выразим ( $n = 1, 2$ )

$$B_n(\tau - \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(\omega) \exp(j \omega (\tau - \theta)) d\omega, \quad (4.51)$$

где  $G_n$  - спектральная плотность мощности процесса  $\xi_n(t)$ ; аналогично выразим

$$B_n(\tau - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_n(\omega) \exp(j \omega (\tau - t_0)) d\omega. \quad (4.52)$$

Известно [6], что передаточная функция выражается через импульсную характеристику линейной системы преобразованием Фурье

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta. \quad (4.53)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [K(\omega) (G_1(\omega) + G_2(\omega)) \exp(j\omega\tau) - G_1(\omega) \exp(j\omega(\tau - t_0))] d\omega = 0. \quad (4.54)$$

Интеграл (4.54) равен нулю независимо от выбора параметров  $\tau$  и  $t_0$ . Поэтому тождественно равно нулю подинтегральное выражение в (4.54). Тогда передаточная функция фильтра, оптимального для выделения сигнала из шума,

$$K(\omega) = G_1(\omega) / (G_1(\omega) + G_2(\omega)) \exp(-j\omega t_0). \quad (4.55)$$

Применяя к (4.55) преобразование Фурье, обратное к (4.53), найдем решение уравнения Винера - Хопфа (4.50),

$$H(t_0 + \tau) = (1 / \pi) \int_0^{\infty} G_1(\omega) / (G_1(\omega) + G_2(\omega)) \cos \omega\tau d\omega. \quad (4.56)$$

Импульсная характеристика (4.56) симметрична относительно момента  $t = t_0$ , так что  $H(t_0 + \tau) = H(t_0 - \tau)$ . Поскольку  $\delta$ -импульс поступает на вход фильтра при  $t_0 + \tau = 0$ , то отклик системы появляется лишь при  $t_0 + \tau > 0$ . Фильтр с характеристикой (4.56) физически не осуществим, так как в большинстве случаев оказывается  $H(t_0 + \tau) > 0$  при  $t_0 + \tau < 0$ . Физически же отклик системы при  $t_0 + \tau < 0$  должен быть равен нулю. В связи с этим требуется выполнить условие отсечки - заменить функцию (4.56) на импульс длительностью  $2 t_0$ :

$$H'(t_0 + \tau) = \begin{cases} H(t_0 + \tau) & \text{при } |\tau| \leq t_0 \\ 0 & \text{при } |\tau| > t_0. \end{cases} \quad (4.57)$$

При увеличении времени задержки  $t_0$  функция  $H'$  приближается к функции  $H$ . Из (4.47) применительно к оптимальному фильтру можно получить оценку для среднеквадратической погрешности воспроизведения сигнала [5]

$$\langle \mu^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega) G_2(\omega) / (G_1(\omega) + G_2(\omega)) d\omega \leq \min_{k=1,2} \sigma_k^2, \quad (4.58)$$

где  $\sigma_k^2$  - дисперсия  $k$ -ого из двух процессов  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  на входе фильтра,

$$\sigma_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_k(\omega) d\omega. \quad (4.59)$$

Таким образом, минимальная ошибка воспроизведения (4.59) не зависит от времени запаздывания  $t_0$  и от того, какой из двух шумов  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  считается сигналом, а какой - помехой. Интенсивности (дисперсии) сигнала, шума и отно-

шение сигнал/шум на выходе оптимального фильтра в соответствии с (4.5) и (4.59) описываются выражениями

$$\sigma_c^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.60)$$

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.61)$$

$$(c / ш)_{\text{ВЫХ}} = \sigma_c^2 / \sigma_n^2, \quad (4.62)$$

где, согласно (4.55),  $|K(\omega)|^2 = G_1(\omega) / (G_1(\omega) + G_2(\omega))^2$ ; на входе же фильтра

$$(c / ш)_{\text{ВХ}} = \sigma_c^2 / \sigma_n^2. \quad (4.63)$$

Обсудим два характерных режима фильтрации. В первом из них отношение  $(c / ш)_{\text{ВХ}}$  имеет произвольную величину, но спектры  $G_1(\omega)$  и  $G_2(\omega)$  не перекрываются или перекрываются слабо. Тогда  $|K(\omega)|^2 \approx 1$  в основной части полосы спектра сигнала  $G_1(\omega)$  и  $|K(\omega)|^2 \approx 0$  вне этой полосы. Таким образом,  $\sigma_c^2 \approx \sigma_1^2$ ,  $\sigma_n^2 \approx 0$  и  $(c / ш)_{\text{ВЫХ}} \gg 1$ . В данном режиме оптимальный фильтр работает наиболее эффективно, практически не искажая сигнала и обеспечивая почти полное подавление помехи. Во втором режиме спектры  $G_1(\omega)$  и  $G_2(\omega)$  сильно перекрываются. Рассмотрим два характерных случая: а)  $G_1 \ll G_2$  - слабый сигнал на входе фильтра:  $(c / ш)_{\text{ВХ}} \approx G_1 / G_2 \approx (c / ш)_{\text{ВЫХ}} \ll 1$ ; б)  $G_1 \gg G_2$  - сильный сигнал на входе фильтра:  $|K(\omega)|^2 \approx 1$  и  $(c / ш)_{\text{ВХ}} \approx (c / ш)_{\text{ВЫХ}} \gg 1$ . В исследуемом режиме в обоих случаях линейный фильтр бесполезен, так как не может повлиять существенно на отношение сигнал/шум. В случае б) фильтрация может быть и не нужна. Чтобы исправить положение в случае а), можно закодировать входной сигнал и промодулировать его по известному закону.

## 5. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАДИОСИСТЕМАХ

### 5.1. Нелинейное преобразование сигналов

Примеры нелинейных преобразований колебаний в радиофизике - детектирование, смещение, умножение частоты. Закономерности преобразования случайных процессов в нелинейных системах принципиально отличаются от таковых в линейных системах. Основная причина - нарушение принципа суперпозиции в нелинейных системах. Нелинейные преобразования компонент спектра входного сигнала обусловлены взаимодействием и самовоздействием этих компонент. При нелинейных преобразованиях в спектре сигнала возникают новые компоненты. Например, гауссовские флуктуационные силы, действующие на нелинейную систему, возбуждают в ней колебания, статистика которых может сильно отличаться от гауссовской. Представим нелинейный преобразователь (НЛ) четырехполюсником. Случайный процесс  $y(t)$  на выходе его выражается через входной  $x(t)$  посредством нелинейного дифференциального уравнения

$$\sum_{n=0}^N a_n(x, y, t) \frac{d^n y}{dt^n} = f(x, y, t), \quad (5.1)$$

где  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) и  $f$  - случайные функции, зависящие от выбора системы.

В общем случае нелинейное преобразование обладает свойством инерционности. Инерционность означает, что в каждой реализации случайного процесса на выходе  $y(t)$  значение  $y(t_k)$  в произвольный момент времени  $t_k$  зависит не только от значения  $x(t_k)$  в тот же момент времени, но и от значений  $x(t)$  при  $t < t_k$ . Когда инерционностью можно пренебречь, решение (5.1) можно записать как

$$y = F(x), \quad (5.2)$$

где каждое значение  $y$  зависит только от значения  $x$  в тот же момент времени.

Функция  $F$  - нелинейная характеристика безинерционного преобразователя. Часто нелинейные устройства нельзя считать безинерционными, но их можно представить последовательным соединением безинерционного нелинейного элемента НЛ и линейного инерционного элемента - фильтра  $\Phi$  (см. рис. 5.1).

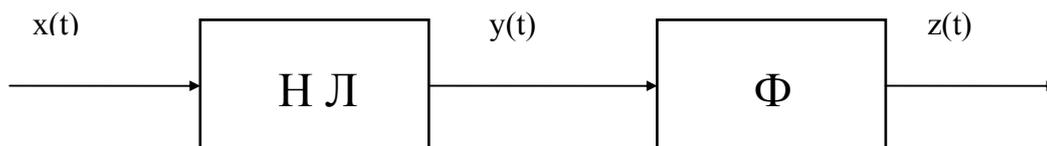


Рис. 5.1

Анализ прохождения сигнала через систему упрощается, если пренебречь взаимным влиянием элементов НЛ и Ф на их характеристики. Тогда сначала изучается нелинейное преобразование:  $x \rightarrow y$ , а затем - линейное преобразование:  $y \rightarrow z$ . Начнем с первого этапа. Пусть функция распределения  $w_1(x)$  случайного процесса  $x(t)$  задана. Найдем функцию распределения  $w_2(y)$  процесса на выходе элемента НЛ. Если элемент НЛ обладает детерминированной характеристикой  $F$ , то вероятность  $dP = w_1(x) |dx| = w_2(y) |dy|$ , где, согласно (5.2),  $|dx| = |d\varphi/dy| |dy|$  и  $\varphi(y)$  - функция, обратная к функции  $F$  из (5.2). Отсюда имеем

$$w_2(y) = w_1(x = \varphi(y)) |d\varphi / dy|. \quad (5.3)$$

Конкретизируем зависимость (5.2) как степенную:  $y = x^n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). Вместо (5.3) получим:  $w_2(y) = w_1(x = y^{1/n}) |y^{1/n-1}|/n$ . В частности, гауссовское распределение на входе:  $w_1(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-x^2/(2\sigma^2))$ , переходит в существенно негауссовское:  $w_2(y) = |y|^{1/n-1} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} (1/n) \exp(-y^{2/n}/(2\sigma^2))$ , на выходе. Одно из часто встречающихся нелинейных преобразований - умножение частоты (генерация гармоник). Пусть на вход элемента НЛ со степенной характеристикой подано колебание со случайной амплитудно-фазовой модуляцией

$$x = \rho(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)) = A(t) \exp(j\omega_0 t) + \text{к. с.}, \quad A = (\rho/2) \exp(j\theta), \quad (5.4)$$

где случайные функции  $\rho(t)$  и  $\theta(t)$  статистически независимы друг от друга.

Подставим (5.4) в выражение для характеристики элемента НЛ:  $y = x^n$ . Используя формулу бинома Ньютона, получим

$$y = (\rho(t)/2)^n \sum_{p=0}^n C_n^p \exp[j(n-2p)(\omega_0 t + \theta(t))], \quad (5.5)$$

где  $C_n^p$  - число сочетаний,  $C_n^p = n! / ((n-p)! p!)$ .

Из (5.5) видно, что с помощью нелинейности четной степени  $n$  можно генерировать только четные гармоники с частотами:  $0, 2\omega_0, 4\omega_0, \dots$ , а с помощью нелинейности нечетной степени - только нечетные:  $3\omega_0, 5\omega_0, \dots$ . Переходя от переменной  $p$  к переменной  $m = n - 2p$ , вместо (5.5) найдем интегральный спектр мощности процесса на выходе элемента НЛ

$$y = \sum_{m=0}^n z_m(t), \quad (5.6)$$

где  $m$  - ая гармоника процесса на выходе:  $z_m(t) = C_n^{(n-m)/2} (\rho(t)/2)^n (2 - \delta_{0m}) \bullet \bullet \cos[m(\omega_0 t + \theta(t))]$ , и  $\delta_{0m} = 1$  при  $m = 0$  и  $\delta_{0m} = 0$  при  $m = 1, 2, \dots, n$ .

Дисперсия  $m$  - ой гармоники на выходе нелинейного элемента

$$\sigma_m^2 = \langle z_m^2 \rangle = 2^{1-2n} \langle \rho^{2n} \rangle F_{mn}, \quad (5.7)$$

где

$$F_{mn} = (C_n^{(n-m)/2})^2 (1 - \delta_{0m}/2). \quad (5.8)$$

Зависимость  $\sigma_m^2$  от номера гармоники  $m$  определяет форму спектра (5.6). Последняя зависит от фактора  $F_{mn}$  и не зависит от статистических свойств входного сигнала  $x(t)$ . Из (5.8) следует, что при заданной степени нелинейности  $n$  относительная эффективность генерации  $m$ -ой гармоники, пропорциональная  $F_{mn}$ , уменьшается с ростом  $m$ . Введем к.п.д. генерации  $m$ -ой гармоники

$$\text{к.п.д.} = \sigma_m^2 / \sigma_{\text{вх}}^2, \quad (5.9)$$

где, согласно (5.4), дисперсия процесса на входе:  $\sigma_{\text{вх}}^2 = \langle x^2 \rangle = \langle \rho^2 \rangle / 2$ .

При заданных  $m$  и  $n$  имеем: к.п.д.  $\sim \langle \rho^{2n} \rangle / \langle \rho^2 \rangle$ , то есть к.п.д. зависит от статистики огибающей  $\rho(t)$  входного сигнала (5.4). Изучим частный случай - амплитудная модуляция в (5.4) отсутствует:  $\rho(t) = \rho_0 = \text{const}$ . Тогда функция распределения огибающей:  $w_\rho = \delta(\rho - \rho_0)$ , и из (5.9) получим:  $(\text{к.п.д.})_1 \sim \rho_0^{2n-2} = \sigma_{\text{вх}}^{2n-2} 2^{n-1}$ , где  $\sigma_{\text{вх}}^2 = \rho_0^2 / 2$ . Пусть теперь амплитудная модуляция входного сигнала есть, и огибающая  $\rho(t)$  распределена по экспоненциальному закону:  $w_\rho = (1/\sigma) \exp(-\rho/\sigma)$ . Найдем дисперсию процесса на входе:  $\sigma_{\text{вх}}^2 = \langle \rho^2 \rangle / 2 = \sigma^2$ , и далее, используя (5.9), -  $(\text{к.п.д.})_2 \sim \sigma^{2n-2} (2n)! / 2$ . Пусть  $\sigma_{\text{вх}}^2$  одинакова в обоих изучаемых случаях. В результате имеем:  $(\text{к.п.д.})_2 / (\text{к.п.д.})_1 = (2n)! / 2^n > 1$ . То есть при переходе от  $\delta$ -распределения к более широкому - экспоненциальному, достигается статистический выигрыш в к.п.д. генерации каждой гармоники. Статистический выигрыш тем больше, чем медленнее спадает распределение  $w_\rho(\rho)$  при удалении  $\rho$  от  $\langle \rho \rangle$ .

Пусть процесс (5.4) на входе узкополосный (квазигармонический). Тогда отдельные гармоники  $z_m$  в разложении (5.6) - узкополосные процессы. Пусть эффективная ширина спектра шума каждой гармоники  $\Delta\omega_{\text{ш}} < \omega_0$ , где  $\omega_0$  равно расстоянию между соседними гармониками. Для выделения  $m$ -ой гармоники достаточно после нелинейного преобразователя поставить линейный фильтр. Последний должен быть настроен на частоту  $m$ -ой гармоники  $m\omega_0$  и иметь полосу пропускания  $\Delta\omega_\phi$ , удовлетворяющую условию:  $\Delta\omega_{\text{ш}} < \Delta\omega_\phi < \omega_0$ .

## 5.2. Амплитудное детектирование шума

Идеальным квадратичным детектором называют устройство с нелинейной характеристикой:  $y = \alpha x^2$ . Схеме реального детектора соответствует изображенная на рис. 5.1, где искомая характеристика приписывается элементу НЛ. Пусть  $K_\phi(\omega)$  - характеристика фильтра  $\Phi$  той же схемы. Пусть входной процесс описывается выражением (5.4). На выходе элемента НЛ, согласно (5.5), генерируются нулевая и вторая гармоники входного колебания:  $y(t) = y_0(t) + y_2(t)$ , где  $y_0(t) = (\alpha/2) \rho^2(t)$  и  $y_2(t) = (\alpha/2) \rho^2(t) \cos(2\omega_0 t + 2\theta(t))$ . Пусть  $\Delta\omega$  - эффективная ширина спектра процесса  $x(t)$ , а  $\Delta\omega_\phi$  - эффективная ширина полосы пропускания фильтра. На выходе линейного фильтра  $\Phi$  получим сигнал, пропорциональный мгно-

венной интенсивности входного сигнала  $x(t)$ :  $z \sim y_0(t) \sim \rho^2(t) \sim I(t)$ , если  $\Delta\omega \ll \Delta\omega_\phi$ , или среднему по времени мгновенной интенсивности:  $z \sim \langle y_0(t) \rangle_T \sim \langle \rho^2(t) \rangle_T \sim \langle I(t) \rangle_T$ , если  $\Delta\omega \gg \Delta\omega_\phi$ . Задача - рассчитать корреляционную функцию и спектр случайного процесса на выходе детектора. Пусть на вход схемы поступает стационарный гауссовский шум с известной статистикой:  $\langle x \rangle = 0$ ,

$$\langle x x_\tau \rangle = B_0(\tau) = \sigma^2 R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau. \text{ Расчет дает: } \langle x^2 x_\tau^2 \rangle = \sigma^4 (1 + 2R_0^2(\tau)).$$

С учетом последнего выражения и квадратичности характеристики элемента НЛ схемы найдем корреляционную функцию процесса  $y(t)$ :

$$\langle y y_\tau \rangle = \alpha^2 \langle x^2 x_\tau^2 \rangle = \alpha^2 \sigma^4 (1 + 2 R_0^2(\tau)). \quad (5.10)$$

К корреляционной функции (5.10) применим преобразование Винера - Хинчина (1.21), учтем связь между коэффициентом корреляции  $R_0(\tau)$  и спектром мощности входного шума  $G_0(\omega)$ , данную выше. В результате найдем выражение для спектра мощности процесса  $y(t)$ :

$$G(\omega) = \alpha^2 \sigma^4 \delta(\omega) + 2 \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega_1) G_0(\omega_1 - \omega) d\omega_1. \quad (5.11)$$

В (5.11) первое слагаемое дает спектр мощности  $G_c(\omega)$  постоянной составляющей  $\langle y \rangle$ , а второе - спектр мощности  $G_{\text{фл}}(\omega)$  флуктуаций:  $y - \langle y \rangle$ , причем

$$\langle y \rangle^2 = \alpha^2 \sigma^4 = \int_{-\infty}^{\infty} G_c(\omega) d\omega, \quad (5.12)$$

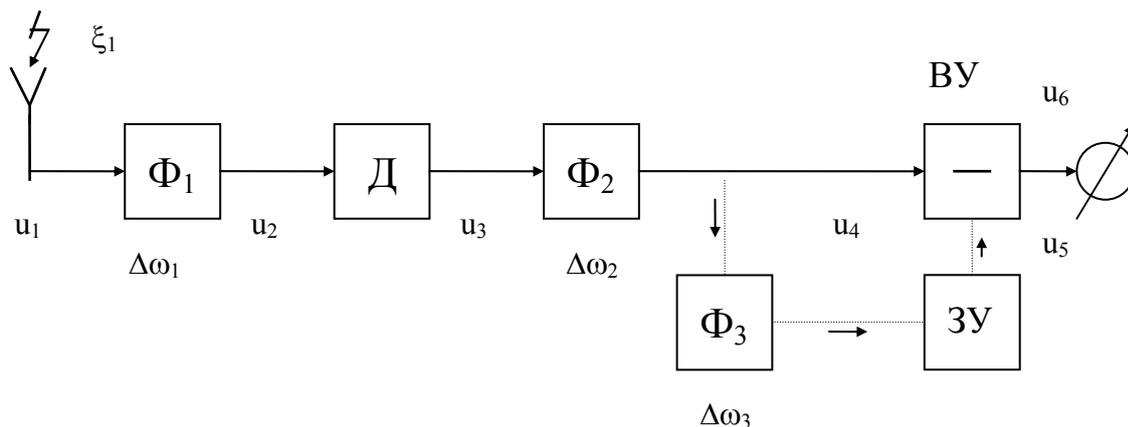
$$\langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle = 2 \alpha^2 \sigma^4 = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{фл}}(\omega) d\omega. \quad (5.13)$$

Пусть входной процесс  $x(t)$  узкополосный - спектр  $G_0(\omega)$  сосредоточен в узкой полосе частот  $\Delta\omega$  около  $\omega = \pm \omega_0$ . Структура подинтегрального выражения второго слагаемого в (5.11) показывает, что  $G_{\text{фл}}(\omega)$  заметно отличается от нуля лишь при  $\omega \approx 0$  и  $\omega \approx \pm 2 \omega_0$ . Поэтому спектр  $G_{\text{фл}}(\omega)$  можно представить суммой спектров низкочастотных и высокочастотных флуктуаций:  $G_{\text{фл}}(\omega) = G_{\text{нч}}(\omega) + G_{\text{вч}}(\omega)$ , где  $G_{\text{нч}}(\omega) \approx G_{\text{фл}}(\omega)$  при  $\omega \approx 0$  и  $G_{\text{вч}}(\omega) \approx G_{\text{фл}}(\omega)$  при  $\omega \approx \pm 2 \omega_0$ . Причем дисперсии низко- и высокочастотных флуктуаций одинаковы:  $\sigma_{\text{нч}}^2 = \sigma_{\text{вч}}^2$ . Итак, для гауссовского входного шума на выходе квадратичного детектора НЛ получаем равномерное распределение дисперсии по компонентам шума:  $\langle y \rangle^2 : \sigma_{\text{нч}}^2 : \sigma_{\text{вч}}^2 = 1:1:1$ . На практике типично соотношение:  $(\langle y \rangle^2 + \sigma_{\text{нч}}^2) : \sigma_{\text{вч}}^2 = 2 : 1$ . В схеме детектора на рис. 5.1 в качестве нелинейного элемента НЛ можно использовать диод, а в качестве фильтра  $\Phi$  - линейный РС - фильтр нижних частот (см. рис. 4.2). Последний обычно присоединяют к диоду без согласующей развязки. Тогда диод шунтирует фильтр, расширяя полосу пропускания фильтра. Коэффициент

уширения полосы пропускания фильтра растет вместе с отношением сопротивления фильтра  $R$  к внутреннему сопротивлению диода  $R_i$ .

### 5.3. Измерение слабых шумов

Даже при использовании оптимальной линейной фильтрации эффективное выделение слабого случайного сигнала  $\xi_1$  на фоне сильного  $\xi_2$  возможно лишь в том случае, когда спектры сигналов достаточно разнесены по частоте. Если же спектры сигналов  $G_1(\omega)$  и  $G_2(\omega)$  перекрываются и  $G_1(\omega) \ll G_2(\omega)$ , то линейная фильтрация непригодна для выделения сигнала  $\xi_1$ . Эта проблема важна, в частности, при измерении слабых шумовых полей. Устройства, используемые для этой цели, называются радиометрами. В данном случае помехой измерению являются внутренние (например, тепловые и дробовые) шумы радиометра. Для измерения  $\xi_1$  на фоне  $\xi_2 \gg \xi_1$  в радиометрах используется то обстоятельство, что слабый шум  $\xi_1$  является внешним. Поэтому, периодически отключая приемную антенну, можно модулировать или вообще выключать процесс  $\xi_1$ , не влияя при этом на большой внутренний шум  $\xi_2$ . Основные типы радиометров - это флуктуационный и компенсационный. Схема последнего типа показана на рис. 5.2.



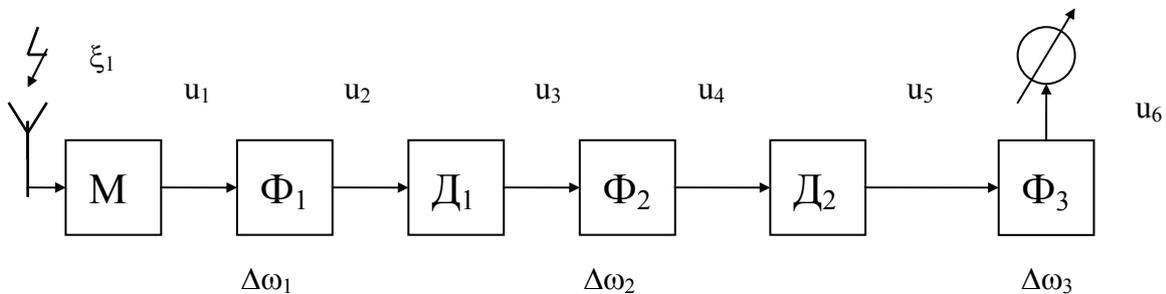
$\Delta\omega_3 \ll \Delta\omega_2 \ll \Delta\omega_1$  - полосы пропускания линейных фильтров  $\Phi_3$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_1$

Рис. 5.2

Радиометр можно представить упрощенно как стандартный приемник. Его основными элементами являются антенна, полосовой фильтр  $\Phi_1$ , детектор  $D$ , фильтр нижних частот  $\Phi_2$  и выходной измерительный прибор. Фильтр  $\Phi_1$  заменяет узел реального приемника, состоящий из усилителя высокой частоты (УВЧ), смесителя и усилителя промежуточной частоты (УПЧ). Под полосой  $\Delta\omega_1$  пропускания фильтра  $\Phi_1$  следует понимать полосу пропускания УПЧ. Слабый шум  $\xi_1$ , подлежащий измерению, улавливается антенной и поступает на вход фильтра  $\Phi_1$ , то есть  $u_1 = \xi_1$ . В фильтре  $\Phi_1$  к нему добавляется сильный внутренний шум  $\xi_2$ . Сигнал на выходе фильтра  $\Phi_1$ :  $u_2 = \xi_1 + \xi_2$ . Считая детектор  $D$  квадратичным, выразим сигнал после детектора (на входе измерительного прибора):

$u_3 = \alpha (\xi_1 + \xi_2)^2$ . Измерительный прибор действует по компенсационному принципу следующим образом. При выключенной антенне ( $\xi_1 = 0$ ) вводится в действие показанная пунктиром цепь, состоящая из фильтра  $\Phi_3$  и запоминающего устройства ЗУ. В ЗУ фиксируется постоянная составляющая:  $\langle u_3 \rangle (\xi_1=0) = \alpha \sigma_2^2$ , где  $\sigma_2^2$  - дисперсия внутреннего шума фильтра  $\Phi_1$  (сигнала, поступающего из детектора). Затем уже при включенной антенне эта составляющая подается на вычитающее устройство ВУ. То есть при включенной антенне:  $u_5 = \alpha \sigma_2^2$  и  $u_4 = \alpha (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ , где  $\sigma_1^2$  - дисперсия шума сигнала  $\xi_1$ . На выходе вычитающего устройства ВУ получим сигнал:  $u_6 = u_4 - u_5 = \alpha \sigma_1^2$ . Точность измерения интенсивности шума радиометром тем выше, чем больше отношение  $\Delta\omega_1 / \Delta\omega_2$ .

Недостатки компенсационной схемы обусловлены неизбежными медленными изменениями параметров приемного тракта, например, - из-за флуктуаций внешней температуры. Тогда достаточно точная компенсация может стать невозможной. От этого недостатка свободна модуляционная схема (см. рис. 5.3).



$\Delta\omega_2 \ll \Omega_0, \Delta\omega_1$ ;  $\Delta\omega_1 < \Delta\omega_3 \ll 2\pi \Omega_0$ ;  $\Omega_0 = 2\pi / T_0$ ,  $T_0$  - период модуляции,  
 $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2$ , и  $\Delta\omega_3$  - полосы пропускания линейных фильтров  $\Phi_1, \Phi_2$  и  $\Phi_3$

Рис. 5.3

В схеме рис. 5.3 модулятор производит периодическую модуляцию входного шума  $\xi_1$ :  $u_1 = m(t) \xi_1$ , где  $m(t)$  - периодическая функция модуляции с периодом  $T_0$ . На выходе первого детектора  $D_1$  регулярная составляющая шума  $\xi_1$  возникает не только на нулевой частоте, но и на частотах, кратных частоте модуляции  $\Omega_0$ . На этих частотах нет конкурирующих регулярных составляющих, порожденных внутренним шумом  $\xi_2$ . Используя полосовой фильтр  $\Phi_2$ , настроенный на частоту одной из гармоник  $n \Omega_0$ , второй детектор  $D_2$  и фильтр нижних частот  $\Phi_3$ , на выходе радиометра можно выделить постоянную составляющую, обусловленную в основном только измеряемым шумом  $\xi_1$ . Влияние флуктуаций параметров схемы подавляется, если ширина их спектра по частоте  $\Delta\omega_n \ll \Omega_0$ .

#### 5.4. Параметрическое усиление и преобразование частоты

Параметрическими называют системы, один или несколько параметров которых меняются со временем. Статистические задачи, возникающие при анализе параметрических систем, связаны: 1) со случайными колебаниями, возни-

кающими под действием стороннего шума при регулярной, например, монохроматической накачке; 2) с эффектами, обусловленными случайным характером самой накачки. Накачка может быть импульсной, непрерывной, шумовой, смешанной и т. д. Спектр накачки всегда имеет некоторую ширину  $\Delta\omega_n$ . Накачку можно приближенно считать гармонической, если  $\Delta\omega_n \ll \Delta\omega_{рез}$ , где  $\Delta\omega_{рез}$  - ширина резонансной кривой системы. Если частота гармонической накачки  $\omega_n$  выбрана произвольно по отношению к резонансной частоте системы  $\omega_{рез}$ , то эффект накачки на систему чисто модуляционный и не влияет на устойчивость системы [7, 8]. Передаточная функция системы является периодической во времени с периодом накачки  $T_n$

$$K(\omega, t) = K(\omega, t + T_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n(\omega) \exp(-j \omega_n t). \quad (5.14)$$

Пусть на входе системы действует гармонический сигнал частоты  $\omega$ . Согласно (5.14), на выходе системы, кроме сигнала на частоте  $\omega$ , появятся сигналы на различных комбинационных частотах  $\omega \pm n \omega_n$ , где  $n = 1, 2, \dots$ . При специальном выборе частоты накачки относительно резонансной кривой системы накачка влияет на устойчивость системы.

Пример. Двухконтурный параметрический усилитель с переменной емкостью  $C(t)$ , изменяющейся по гармоническому закону на частоте накачки  $\omega_n$ , и источниками э.д.с.  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  входных гармонических сигналов на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , совпадающими с резонансными частотами контуров усилителя (см. рис. 5.4).

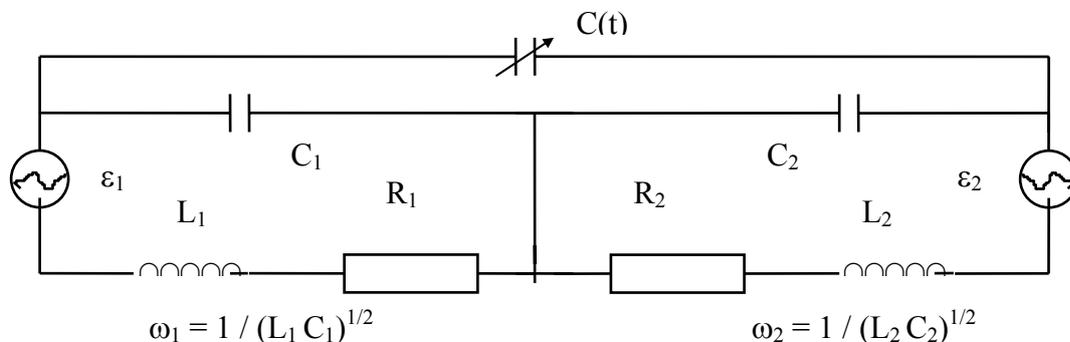


Рис. 5.4

Рассмотрим два специальных случая выбора частоты накачки: 1)  $\omega_n \approx \omega_1 + \omega_2$ ; 2)  $\omega_n \approx \omega_2 - \omega_1$  ( $\omega_2 > \omega_1$ ). В первом из них в среднем со временем происходит передача энергии колебаний от источника накачки контурам. Получается частичная или даже полная компенсация собственных потерь энергии колебаний контуров. В связи с этим говорят о вносимых накачкой отрицательных потерях в контуры. С ростом амплитуды  $C_0$  колебаний накачки  $C(t)$  происходит сужение резонансной кривой каждого из контуров. При некотором пороговом значении:  $C_0 = C_{пор}$ , ширина резонансной кривой обращается в нуль и ее высота становится теоретически бесконечно большой. То есть происходит потеря устойчивости системы. При  $C_0 > C_{пор}$  интенсивность колебаний в контурах теоретически будет

неограниченно возрастать со временем. В области устойчивости:  $C_0 < C_{\text{пор}}$ , изучаемую схему можно использовать либо как усилитель, работающий на отражение, либо как усилитель - преобразователь частоты [7, 8]. Во втором случае вносимые накачкой эффективные потери положительны. То есть в среднем энергия колебаний передается из контуров источнику накачки. Положительные потери стабилизируют работу схемы, но не позволяют использовать ее как усилитель, а лишь как преобразователь частоты. Изучим преобразование сигнала и шума в одноконтурном параметрическом усилителе (ПУ), изображенном на рис. 5.5.

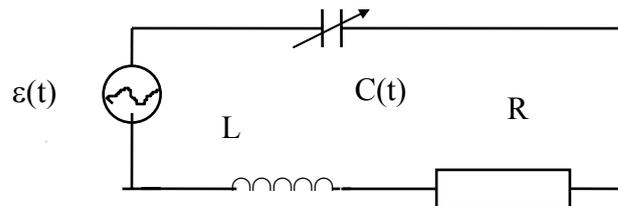


Рис. 5.5

Схема рис. 5.5 соответствует более общей схеме рис. 5.4 при  $\omega_1 = \omega_2 \approx \omega_H / 2$ . Пусть модуляция емкости задана выражением:  $C(t) = C_1 (1 - \xi(t))$ , где, вообще говоря,  $C_1$  - случайная величина, и  $\xi(t)$  - случайная функция. Необходимое условие устойчивости работы одноконтурного ПУ с малыми потерями ( $2\alpha \ll \omega_0$ , где  $\alpha = R / (2L)$ ) и  $\omega_0$  - резонансная частота контура усилителя без накачки,  $\omega_0 = 1 / (LC_1)^{1/2}$ ) - условие слабости модуляции накачки:  $|\xi(t)| \ll 1$  [7, 8]. Пусть  $u(t)$  - напряжение на постоянной части емкости контура  $C_1$ . Применяя закон Ома для цепи ПУ, показанной на рис. 5.5, получим приближенное стохастическое уравнение для искомого напряжения в линеаризованном виде

$$d^2 u / dt^2 + 2\alpha du / dt + \omega_0^2 (1 + \xi(t)) u = \omega_0^2 \varepsilon(t). \quad (5.15)$$

Пусть действует гармоническая накачка, так что  $\xi(t) = m \cos(\omega_H t + \varphi_H)$ , где  $\omega_H = 2\omega_0$ . В общем выражении (5.14) передаточной функции ПУ достаточно учесть лишь наиболее существенные резонансные члены:  $K(\omega, t) \approx K_0(\omega) + K_1(\omega) \bullet \bullet \exp(-j\omega_H t)$ . На частотах:  $\omega \approx \pm \omega_0$ , гармонического сигнала:  $\varepsilon'(t) = A e^{j\omega t} + \text{к. с.}$ , действующего на входе ПУ, последние дают на выходе сигналы с частотами также близкими к  $\pm \omega_0$ . Сигнал на выходе ПУ выразим как  $u'(t) = K(\omega, t) \varepsilon'(t) \approx (K_0(\omega) + K_1(\omega) \exp(-j\omega_H t)) (A e^{j\omega t} + \text{к. с.})$ . Последнее выражение, как и заданные для  $\varepsilon'(t)$  и  $\xi(t)$ , подставим в (5.15). Получится система двух уравнений для определения  $K_0(\omega)$  и  $K_1(\omega)$ . Решая эту систему, в частности, для резонансной частоты:  $\omega = \omega_0$ , найдем

$$K_0(\omega_0) = \omega_0 / (2j\alpha (1 - m^2 / m_{\text{пор}}^2)), \quad (5.16)$$

где  $m_{\text{пор}}$  - пороговое для самовозбуждения ПУ значение амплитуды модуляции  $m$ ,  $m_{\text{пор}} = 4\alpha / \omega_0 = 2/Q$ , где  $Q$  - добротность контура без накачки,  $Q = \omega_0 / (2\alpha)$ .

Пусть частота входного гармонического сигнала равна  $\omega = \omega_0 - \delta$ , где  $0 < \delta \ll \omega_0$ . Наличие в передаточной функции ПУ члена, пропорционального  $K_0(\omega)$ , обеспечит на выходе схемы усиленный сигнал на частоте входного сигнала. Наличие же второго члена, пропорционального  $K_1(\omega)$ , обеспечит дополнительное появление на выходе схемы сигнала на частоте  $\omega_0 + \delta$ . При резонансной частоте входного сигнала оба этих выходных сигнала имеют частоту, равную частоте входного сигнала, и интерферируют между собой. В результате коэффициент усиления ПУ на резонансной частоте вблизи порога неустойчивости сильно зависит от начальной фазы входного сигнала. Пусть теперь гармонический сигнал действует на входе ПУ на фоне стационарного шума  $u''(t)$  со спектром мощности  $G(\omega)$ . Используя (4.6), найдем дисперсию шума на выходе ПУ

$$\langle (u'')^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} G(\omega) |K(\omega, t)|^2 d\omega, \quad (5.17)$$

которая зависит от времени по периодическому закону с периодом, равным периоду накачки  $T_H = 2\pi/\omega_H$ , так что шум на выходе ПУ всегда нестационарный.

Изменим условия задачи. Пусть на входе ПУ в отсутствие шума действует гармонический сигнал на частоте, близкой к резонансной ( $\omega = \omega_0 - \delta \approx \omega_0$ ), а накачка - шумовая. Пусть спектр накачки локализован на низких частотах, так что  $\omega_0 \gg \omega_r$ , где  $\omega_r$  - верхняя граничная частота этого спектра. Последнее позволяет считать передаточную функцию ПУ медленно меняющейся со временем:  $dK / dt \ll \omega_0 K$ . Используя данное условие и подставляя выходной сигнал:  $u(t) = \varepsilon(t) K(\omega, t) = A e^{j\omega t} K(\omega, t)$ , в (5.15), получим приближенное уравнение для  $K(\omega, t)$ :

$$dK / dt + [\alpha - j\delta + \omega_0 / (2j)] K = \omega_0 / (2j). \quad (5.18)$$

Пусть ширина спектра накачки много больше таковой у резонансной кривой контура без накачки. Тогда спектр модуляции накачки аппроксимируем спектром белого шума с корреляционной функцией:  $\langle \xi \xi_{\tau} \rangle = 2D \delta(\tau)$ , где  $\delta(\tau)$  - дельта - функция. Уравнение (5.18) - частный случай стохастического уравнения с  $\delta$  - коррелированными коэффициентами. Следуя методике [5], усредним статистически уравнение (5.18)

$$d\langle K \rangle / dt + (\alpha - j\delta + \omega_0^2 D / 4) \langle K \rangle = \omega_0 / (2j). \quad (5.19)$$

Для колебательного контура без накачки ( $D=0$ ) из (5.19) имеем:  $d\langle K \rangle / dt + (\alpha - j\delta) \langle K \rangle = \omega_0 / (2j)$ . То есть действие изучаемой накачки эффективно увеличивает коэффициент затухания колебательного контура от  $\alpha$  до  $\alpha' = \alpha + \omega_0^2 D / 4$ . Значит, низкочастотная накачка способствует стабилизации ПУ посредством передачи энергии колебаний из контура источнику накачки. Пусть теперь накачка - белый шум:  $\langle \xi \rangle = 0$  и  $\langle \xi \xi_{\tau} \rangle = 2D \delta(\tau)$ . В отличие от случая низкочастотной накачки спектр белого шума заведомо перекрывает резонансную кривую контура.

Функция  $K(\omega, t)$  уже не изменяется медленно во времени, и уравнение (5.18) использовать нельзя. Обозначая  $du/dt=x$ , уравнение (5.15) сведем к системе двух уравнений первого порядка относительно  $u$  и  $x$ . Последняя относится к типу систем стохастических уравнений с  $\delta$ -коррелированными коэффициентами [5]. Усредняя статистически эту систему и исключая  $\langle x \rangle$ , вместо двух уравнений получим одно

$$d^2 \langle u \rangle / dt^2 + 2 \alpha d \langle u \rangle / dt + \omega_0^2 \langle u \rangle = \omega_0^2 \varepsilon(t). \quad (5.20)$$

Из (5.20) следует, что накачка типа белого шума вообще не влияет на среднее значение напряжения  $\langle u \rangle$  на выходе ПУ, а значит, - на устойчивость работы ПУ. При такой накачке в среднем не происходит направленной передачи энергии колебаний от контура источнику накачки или обратно. Если низкочастотная часть спектра шума оказывает стабилизирующее действие на работу ПУ, то высокочастотная часть спектра шума, напротив дестабилизирует ПУ. Дестабилизация обусловлена передачей энергии колебаний из высокочастотной части спектра шума в контур ПУ. В частности, квазигармоническая накачка:  $C(t) = C_0 (1 + m(t) \cos(\omega_n t + \varphi_n(t)))$ , где  $m(t)$  и  $\varphi_n(t)$  - случайные функции, оказывает дестабилизирующее влияние на работу ПУ, если частота накачки:  $\omega_n = 2 \omega_0$ .

### 5.5. Флуктуации и шумы в автоколебательных системах

Автоколебательные системы широко применяют в радиотехнике для построения генераторов гармонических колебаний. В любой системе всегда есть шумы и флуктуации. Поэтому генерация идеальных гармонических колебаний невозможна. Колебания генератора, близкие к гармоническим, - это процесс:  $x(t) = \rho(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ , со случайной модуляцией амплитуды и фазы. Случайные воздействия генератора на сигнал можно разделить на два вида: 1) технические флуктуации амплитуды и фазы колебаний; 2) их естественные флуктуации. Первые обусловлены медленными (низкочастотными), но значительными по величине изменениями параметров устройства под влиянием, как правило, внешних причин. Например, механические воздействия вызывают вибрацию электродов в ламповом генераторе (микрофонный эффект), температурные воздействия могут изменять значения параметров схемы, электромагнитные воздействия (электрические флуктуации в источниках питания, наводки) влияют на устойчивость и режим работы генератора. В некоторых случаях низкочастотные флуктуации возникают внутри генератора. Например, - эффект «мерцания», то есть хаотические вариации эмиссионной способности отдельных участков катода лампы. Эффект «мерцания» приводит к фликкер - шуму в анодном токе лампы, достаточно интенсивном лишь на низких частотах. Эффект «мерцания» обусловлен процессами диффузии и адсорбции в поверхностном слое катода. Случайные воздействия, с которыми связаны технические уходы частоты генератора, гораздо более медленны не только по сравнению с периодом колебаний, но даже со временем установления колебаний после включения генератора. Примеры есте-

ственных флуктуаций - тепловой и дробовой шум лампового генератора, спонтанные переходы в лазере. Эти шумы неустраняемы, и в их спектре есть компоненты на частотах автоколебаний. Для естественных флуктуаций амплитуды, фазы и частоты колебаний адекватна модель быстрых и слабых флуктуаций. Обычно уширение частотного спектра колебаний генератора из-за технических флуктуаций много больше, чем из-за естественных..

Выделим две характерные статистические задачи: 1) о естественных флуктуациях в слаболинейной автоколебательной системе с высокодобротной резонансной системой (тогда колебания близки к гармоническим, и сама автоколебательная система называется томсоновским генератором); 2) о стохастическом самовозбуждении автоколебаний (процесс самовозбуждения можно рассматривать как трансформацию собственного шума генератора со временем).

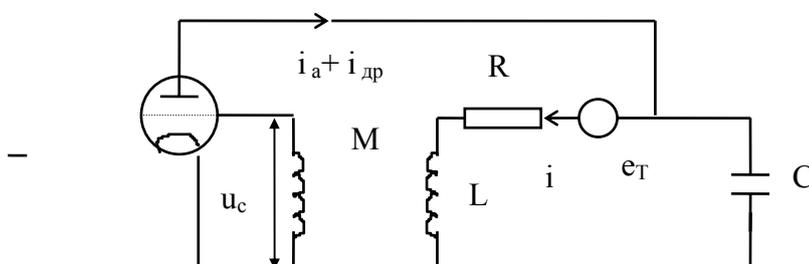
Ниже порога самовозбуждения собственный шум радиогенератора или лазера - стационарный узкополосный гауссовский процесс. При развитой стационарной генерации шум становится существенно негауссовским. При самовозбуждении генератора трансформация собственного шума системы приводит к превращению части энергии шумовых колебаний в энергию автоколебаний. Возбуждение автоколебаний, конечно, может быть вызвано также действием внешнего сигнала на частоте автоколебаний. Из-за флуктуационного характера самовозбуждения автоколебаний случайной величиной становится и время их установления. Это существенно для импульсных систем. При установлении колебаний в генераторе с несколькими устойчивыми ненулевыми состояниями выбор устойчивого состояния может зависеть от статистики начальных условий.

Теория флуктуаций в автоколебательных системах основана на решении нелинейных стохастических уравнений. Уравнение колебаний томсоновского генератора

$$d^2 x / dt^2 + \omega_0^2 x = \mu f(x, dx/dt, t), \quad (5.21)$$

где  $\mu$  - малый параметр,  $f$  - нелинейная функция, зависящая от конкретного вида системы; малость параметра  $\mu$  ( $\mu \ll 1$ ) подчеркивает слабое отличие колебаний от гармонических с частотой  $\omega_0$ .

На рис. 5.6 показана схема лампового генератора.



$i_a$  - сила регулярного анодного тока;  $i$  - сила тока индуктивной ветви контура;  
 $u_c$  - сеточное напряжение;  $i_{др}$  - сила тока дробового шума;  
 $e_T$  - напряжение теплового шума на сопротивлении R

Рис. 5.6

Для мягкого режима возбуждения генератора аппроксимируем анодно - сеточную характеристику лампы:  $i_a = S u_c (1 - \chi u_c^2 / 3)$ , где  $S$  - крутизна этой характеристики,  $\chi$  - коэффициент слабой нелинейности характеристики. Применяя правила Кирхгофа для схемы рис. 5.6, конкретизируем запись уравнения (5.21)

$$d^2 i / dt^2 + \omega_0^2 i = 2 [(\delta - \alpha) - 4 \beta / (3 \omega_0^2) (d i / dt)^2] d i / dt + \omega_0^2 \xi(t), \quad (5.22)$$

где  $\omega_0$  - резонансная частота колебательного контура,  $\omega_0 = 1 / (LC)^{1/2}$ ,  $\alpha$  - коэффициент затухания контура,  $\alpha = R / (2L)$ ,  $\delta$  - коэффициент отрицательных потерь, вносимых обратной связью в контур,  $\delta = \omega_0^2 S M / 2$ , параметр  $\beta$  характеризует нелинейность режима работы генератора,  $\beta = S M^3 \chi \omega_0^4 / 8$ ,  $\xi(t) = i_{др}(t) + 1 / (L \omega_0^2) d \varepsilon_T / dt$ ; слагаемые в правой части уравнения (5.22) обуславливают отличие колебаний в генераторе от гармонических. Решение уравнения (5.22) ищем в виде

$$i(t) = A(t) / 2 \exp(j \omega_0 t) + \text{к. с.} \quad (5.23)$$

В режиме мягкого возбуждения колебания в генераторе квазигармонические, то есть в (5.23) амплитуда  $A$  - функция, медленно меняющаяся во времени по сравнению с периодом резонансных колебаний  $2\pi / \omega_0$ . Высокодобротный колебательный контур является полосовым фильтром, так как эффективно подавляет часть спектра сигнала вне узкой полосы резонансной кривой контура. Поэтому шум в контуре

$$\xi(t) = \eta(t) \exp[j(\omega_0 t + \pi / 2)] + \text{к. с.}, \quad (5.24)$$

где  $\eta$  - медленно меняющаяся, как и  $A$ , функция, и фаза  $\pi / 2$  добавлена для удобства дальнейшей записи.

Подставим (5.23) и (5.24) в (5.22). Усредняя полученное уравнение по периоду колебаний  $2\pi / \omega_0$  и пренебрегая малыми членами ( $\alpha, \delta \ll \omega_0$ ), получим укороченное уравнение для амплитуды колебаний томсоновского генератора в комплексной форме

$$dA / dt + [(\alpha - \delta) + \beta |A|^2] A = \omega_0 \eta. \quad (5.25)$$

Выразим комплексную амплитуду  $A$  через огибающую  $\rho$  и фазу  $\varphi$  как:  $A = \rho \exp(j \varphi)$ . Случайную силу  $\eta(t)$  представим через квадратурные компоненты:  $\eta = a + j b$ . Подставим последние выражения для  $A$  и  $\eta$  в (5.25). Разделяя действительную и мнимую часть в полученном уравнении, придем к системе

$$\begin{cases} d\rho / dt + [(\alpha - \delta) + \beta \rho^2] \rho = \omega_0 \zeta_\rho \\ d\varphi / dt = (\omega_0 / \rho) \zeta_\varphi, \end{cases} \quad (5.26)$$

где  $\zeta_\rho = a \cos \varphi + b \sin \varphi$  и  $\zeta_\varphi = b \cos \varphi - a \sin \varphi$ .

Уравнения (5.26) - укороченные уравнения томсоновского генератора в действительной форме, равносильны (5.25). Если флуктуаций нет ( $\zeta_\rho = \zeta_\phi = 0$ ), система (5.26) упрощается:  $d\rho/dt + [(\alpha - \delta) + \beta\rho^2]\rho = 0$  и  $d\phi/dt = 0$ . Установившееся решение первого из уравнений (при  $d\rho/dt = 0$ ) дает амплитуду колебаний генератора в устойчивом ненулевом состоянии

$$\rho_\infty = ((\delta - \alpha) / \beta)^{1/2}, \quad (5.27)$$

если  $\delta > \alpha$ ; если  $\delta < \alpha$ , то имеется лишь устойчивое нулевое состояние:  $\rho_\infty = 0$ . Пороговое значение  $\delta_{\text{пор}}$  для самовозбуждения колебаний в генераторе:  $\delta_{\text{пор}} = \alpha$ . Самовозбуждение колебаний возможно, если  $\delta > \delta_{\text{пор}}$ . Решение второго уравнения последней системы:  $\phi = \phi_0$ , где  $\phi_0$  - случайное значение фазы, которое было при включения генератора и которое далее сохраняется постоянным. В автономном генераторе естественно считать величину  $\phi_0$  распределенной по равномерному закону:  $w(\phi_0) = 1/(2\pi)$ , где  $-\pi \leq \phi_0 \leq \pi$ . То есть, в отсутствие шума установившиеся колебания томсоновского генератора являются гармоническими.

При наличии шума установившиеся колебания генератора оказываются квазигармоническими. Используя (5.26), изучим их статистику. Тепловой и дробовой шум, определяющие статистику случайной функции  $\xi(t)$ , являются  $\delta$ -коррелированными случайными процессами. В пределах узкой полосы пропускания высокочастотного колебательного контура пренебрежем изменением спектральной мощности  $G_\xi$  шума  $\xi(t)$ . Тогда сам процесс  $\xi(t)$  можно аппроксимировать белым шумом:  $\langle \xi \rangle = 0$ ,  $B_\xi(\tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle = 2\pi G_\xi \delta(\tau)$ . В данном приближении в укороченных уравнениях (5.26) случайные функции:  $\eta(t)$ ,  $a(t)$  и  $b(t)$ , можно считать белым шумом в масштабе изменения величин  $A$ ,  $\rho$  и  $\phi$ . Чтобы упростить систему (5.26), запишем

$$\begin{cases} \zeta_\rho = \zeta'_\rho + \zeta''_\rho \\ \zeta_\phi = \zeta'_\phi + \zeta''_\phi \end{cases} \quad (5.28)$$

где индексами «'» и «''» помечены медленно и быстро изменяющиеся компоненты соответствующих величин.

Медленные компоненты имеют тот же временной масштаб изменения, что и огибающая  $\rho$ . Быстрые компоненты имеют масштаб одинаковый с масштабом изменения  $a(t)$  и  $b(t)$ . Пусть случайные процессы  $\zeta_\rho$  и  $\zeta_\phi$  - эргодические. Тогда  $\zeta'_\rho = \langle \zeta_\rho \rangle$  и  $\zeta'_\phi = \langle \zeta_\phi \rangle$ , где усреднение проведено по ансамблю быстрых флуктуаций величин  $a(t)$  и  $b(t)$ . Статистический расчет дает [5]

$$\begin{cases} \zeta'_\rho = \pi \omega_0 / (4 \rho) G_\xi \\ \zeta'_\phi = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

Подставим (5.29) в (5.28), а результат - в (5.26), получим систему

$$\left\{ \begin{array}{l} d\rho / dt + [(\alpha - \delta) + \beta \rho^2] \rho = \pi \omega_0^2 / (4 \rho) G_\xi + \omega_0 \zeta''_\rho(t) \\ d\varphi / dt = (\omega_0 / \rho) \zeta''_\varphi(t), \end{array} \right. \quad (5.30)$$

где  $\zeta''_\rho(t)$  и  $\zeta''_\varphi(t)$  -  $\delta$  - коррелированные шумы.

Для случая запуска генератора от шумов начальная амплитуда колебаний:  $\rho_0 = \rho(t=0)$ , является случайной величиной. Для определенности считаем функцию распределения начальной амплитуды рэлеевской:  $w_0(\rho_0) = (\rho_0 / \sigma_0^2) \cdot \exp(-\rho_0^2 / (2 \sigma_0^2))$ , где  $\sigma_0^2$  - дисперсия начального шума. Для выяснения физики установления амплитуды колебаний в генераторе решение (5.30) проведем в два этапа: 1) учитываются флуктуации начальных условий, но не учитываются флуктуации случайной силы  $\xi(t)$ , то есть при  $\xi(t) = 0$ ; 2) расчет возмущения амплитудных траекторий  $\rho(t)$  случайной силой  $\xi(t)$ . На первом этапе, когда правые части уравнений (5.30) равны нулю, решая первое из них, получаем амплитудную траекторию

$$\rho(t) = \rho_\infty [1 + ((\rho_\infty / \rho_0)^2 - 1) e^{-\tau}]^{-1/2} = F(\rho_0), \quad (5.31)$$

где  $\rho_\infty$  дано в (5.27),  $\rho_\infty = (p / \beta)^{1/2}$ ,  $\tau = pt / 2$ ,  $p = \delta - \alpha > 0$  в надпороговом режиме.

Функцию распределения амплитуды  $w_t(\rho)$  выразим через заданное выше начальное распределение  $w_0(\rho_0)$ , как:  $w_t(\rho) = w_0[F^{-1}(\rho)] |dF^{-1}(\rho) / d\rho|$ , где  $F^{-1}$  - функция, обратная к определенной в (5.31). В пределе:  $\tau \rightarrow \infty$ , из последнего выражения получаем:  $w_\infty(\rho) = \delta(\rho - \rho_\infty)$ , то есть установившиеся колебания в приближениях первого этапа являются гармоническими. После включения генератора дисперсия шума сначала возрастает, а затем уменьшается, стремясь к нулю.

Теперь учтем дополнительно наличие флуктуационной силы  $\xi(t)$ , то есть наличие правых частей в уравнениях (5.30). Первое из уравнений можно интегрировать независимо от второго. Грубая методика оценки эволюции статистики  $w_t(\rho)$  амплитуды колебаний во времени следующая. Зафиксировав начальное значение амплитуды  $\rho_0$ , оценивают флуктуационное размытие выбранной амплитудной траектории (5.31) за счет действия случайной силы  $\xi(t)$ . Затем, используя статистику  $w_0(\rho_0)$  начальной амплитуды  $\rho_0$ , оценивают вероятность появления отдельных размытых траекторий для разных значений  $\rho_0$ . В общем случае флуктуации начальных условий и случайной силы  $\xi(t)$  влияют неаддитивно на статистику колебаний генератора. Поэтому описанная двухэтапная методика может давать большие погрешности. Общий подход к расчету статистики  $w_t(\rho)$  основан на учете диффузионного характера случайного процесса, описываемого уравнениями (5.30) с  $\delta$  - коррелированными правыми частями. Статистика  $w_t(\rho)$  удовлетворяет уравнению Фоккера - Планка. (3.14) с диффузионными коэффициентами [5]

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \beta [q - p^2] \rho + \beta N / \rho \\ K_2 = 2 \beta N, \end{array} \right. \quad (5.32)$$

где  $N = (\pi / 4) \omega_0^2 G_\xi / \beta$  и  $q = (\delta - \alpha) / \beta = \rho / \beta = \rho_\infty^2$ .

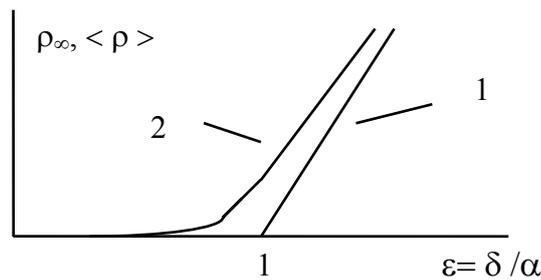
Интегрирование (3.14) с учетом (5.32) позволяет учесть влияние статистики как начальных условий, так и случайной силы  $\xi(t)$  на изменение распределения  $w_t(\rho)$  со временем. Подставляя (5.32) в (3.15), выразим установившееся распределение амплитуды колебаний в квадратурах

$$w(\rho) = 2 / (\pi N)^{1/2} [1 + \Phi(q / (2 N^{1/2}))]^{-1} \rho \exp [-(\rho^2 - q)^2 / (4 N)], \quad (5.33)$$

где  $\Phi(x)$  - табулированная функция, называемая интегралом вероятностей [21],

$$\Phi(x) = (2 / \pi^{1/2}) \int_0^x \exp(-\tau^2) dt.$$

При  $q \ll -1$  (в области значительно ниже порога генерации) распределение (5.33) близко к рэлеевскому:  $w(\rho) = (\rho / \sigma_0^2) \exp(-\rho / (2\sigma_0^2))$ , где  $\sigma_0^2$  - дисперсия процесса,  $\sigma_0^2 = N / |q|$ . Значительно выше порога генерации, когда  $q \gg 1$ , распределение (5.33) превращается в гауссовское:  $w(\rho) = 1 / (\pi^{1/2} \sigma_0) \exp(-(\rho - \rho_\infty)^2 / \sigma_0^2)$ . Зная  $w(\rho)$ , найдем моменты этой функции. Зависимость средней амплитуды установившихся колебаний:  $\langle \rho \rangle = \int_0^\infty \rho w(\rho) d\rho$ , от  $\varepsilon = \delta / \alpha$  показана на рис. 5.7.



- 1 - амплитуда установившихся колебаний  $\rho_\infty$  без учета флуктуаций  
 2 - средняя амплитуда установившихся колебаний  $\langle \rho \rangle$  с учетом флуктуаций

Рис. 5.7

Согласно рис. 5.7, при наличии шума средняя амплитуда установившихся колебаний в генераторе не равна нулю не только выше, но и ниже порога генерации:  $\varepsilon = 1$ . Теоретически имеем:  $\langle \rho \rangle \rightarrow \rho_\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Дисперсия флуктуаций амплитуды:  $\sigma_\rho^2 = \int_0^\infty (\rho - \langle \rho \rangle)^2 w(\rho) d\rho$ , где в качестве  $w(\rho)$  используем распре-

деление Рэля (Гаусса) при  $q \ll -1$  ( $q \gg 1$ ). Тогда найдем:  $\sigma_\rho / \langle \rho \rangle = 0,35$  в первом случае и  $\sigma_\rho / \langle \rho \rangle = \sigma_0 / (2\rho_\infty) \ll 1$  - во втором. То есть, относительная интенсивность флуктуаций сильно различается ниже ( $q \ll -1$ ) и выше ( $q \gg 1$ ) порога генерации.

Анализ статистики фазы затруднен из-за зависимости правой части второго уравнения системы (5.30) от амплитуды  $\rho$ . В режиме развитой генерации флуктуации амплитуды слабы, и искомое уравнение можно приближенно упростить, заменив  $\rho$  на  $\langle \rho \rangle$ ,

$$d\varphi / dt = (\omega_0 / \langle \rho \rangle) \zeta''_{\varphi}(t). \quad (5.34)$$

Согласно (5.34), в томсоновском генераторе в режиме развитой генерации флуктуации амплитуды и фазы некоррелированы. Интегрируя (5.34), найдем случайный набег фазы за время  $\tau$ :

$$\Delta\varphi(\tau) = (\omega_0 / \langle \rho \rangle) \int_t^{t+\tau} \zeta''_{\varphi}(t') dt'. \quad (5.35)$$

Процесс  $\Delta\varphi(\tau)$  является винеровским, так как случайная сила  $\zeta''_{\varphi}(t)$ , по предположению,  $\delta$ -коррелирована. Для дисперсии винеровского процесса найдено (см. п. 3.2):  $\sigma_{\varphi}^2 = 2Dt$ , где  $D$  - коэффициент диффузии фазы. Применительно к (5.35) получаем [5]:  $D = (\pi\omega_0^2 / (2\langle \rho \rangle^2)) G_{\xi'}$ , где  $G_{\xi'}$  - равномерная спектральная плотность мощности случайной силы  $\zeta''_{\varphi}(t)$ . Используя центральную предельную теорему теории вероятностей [2, 3], заключаем, что распределение фазы является гауссовским:  $w(\Delta\varphi) = 1 / ((2\pi)^{1/2} \sigma_{\varphi}) \exp(-(\Delta\varphi)^2 / (2\sigma_{\varphi}^2))$ . Полная фаза колебаний равна сумме начальной и набегу фазы:  $\varphi(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi$ . Здесь второе слагаемое обеспечивает неограниченный рост дисперсии полной фазы со временем независимо от статистики начальной фазы. Полная фаза  $\varphi$  имеет конечную вероятность сколь угодно большого отклонения со временем от начального значения. В пределе:  $t \rightarrow \infty$  (в установившемся состоянии), закон распределения полной фазы стремится к равномерному:  $w(\varphi) = 1 / (2\pi)$ , где  $-\pi < \varphi \leq \pi$ .

Томсоновский генератор с мягким самовозбуждением - типичный пример генератора с устойчивой амплитудой и произвольным значением фазы. Установившиеся колебания в таких генераторах определяется в основном динамическими силами системы. Иначе обстоит дело для генераторов с несколькими устойчивыми состояниями, которые отличаются амплитудами и фазами. Выбор устойчивого состояния определяется начальными условиями. В таких генераторах роль флуктуационных воздействий, в особенности - на начальном этапе процесса установления колебаний, принципиальна. Флуктуации существенно влияют на характер установившегося движения, определяя в ряде случаев выбор устойчивого состояния. Установление колебаний в одноконтурном параметрическом генераторе изучим посредством схемы рис. 5.5, закоротив источник входного сигнала  $\varepsilon(t)$ . Пусть переменная емкость модулируется напряжением гармонической накачки:  $C(t) = C_0(1 - m \cos(\omega_n t + \varphi_n))$ , малой амплитуды:  $m \ll 1$ , на частоте:  $\omega_n \approx 2\omega_0$ , где  $\omega_0$  - резонансная частота контура в отсутствие накачки,  $\omega_0 = 1 / (LC_0)^{1/2}$ . Ограничение стационарной амплитуды колебаний происходит за счет нелинейного сопротивления  $R$  с инерционной квадратичной характеристикой:  $R = R_0 + 2\beta \langle u^2 \rangle_T$ , где усреднение квадрата напряжения на постоянной части

емкости контура проведено по периоду колебаний:  $T=2\pi/\omega_0$ . Колебания в таком генераторе описываются уравнением, вывод которого аналогичен выводу (5.15),

$$d^2 u / dt^2 + 2 (\alpha + 2 \beta \langle u^2 \rangle_T) du / dt + \omega_0^2 [1 + m \cos (\omega_n t + \varphi_n)] u = 0, \quad (5.36)$$

Решение уравнения (5.36) ищем в виде:  $u(t) = \rho(t) \cos (\omega_n t / 2 + \varphi_n / 2 - \varphi(t))$ , где  $\rho(t)$  и  $\varphi(t)$  - амплитуда и фаза колебаний, медленно изменяющиеся по сравнению с периодом  $T$ . Подставляя это решение в (5.36) и используя условие медленности, можно вывести приближенные укороченные уравнения для параметрического генератора (аналогично выводу (5.26) для томсоновского генератора)

$$\begin{cases} d\rho / dt = \rho [-\alpha + (m \omega_n / 2) \cos (2 \varphi) - \beta \rho^2] \\ d\varphi / dt = h \omega_n - (m \omega_n / 2) \sin (2 \varphi), \end{cases} \quad (5.37)$$

где  $h$  - относительная отстройка частоты накачки,  $h = (\omega_n^2 / 4 - \omega_0^2) / \omega_n^2$ .

При  $h = 0$  стационарные значения фазы ( $d\varphi/dt=0$ ) вместо (5.37) даются уравнением:  $\sin(2\varphi_\infty)=0$ . Решая его, найдем:  $\varphi_\infty = -\pi/2, 0, \pi/2, \pi$ . При  $\varphi_\infty = \pm\pi/2$  ( $\cos 2\varphi_\infty = -1$ ), параметрические колебания подавляются. При  $\varphi_\infty = 0, \pi$  ( $\cos 2\varphi_\infty = 1$ ) параметрические колебания устойчивы. При последних значениях фазы энергия накачки частично передается в контур. Полагая  $d\rho/dt=0$  в первом из уравнений (5.37), для параметрического генератора найдем два устойчивых состояния с одним и тем же значением амплитуды, но разными значениями фазы. Изучим переходной процесс установления колебаний в генераторе. При  $h=0$  решение второго из уравнений (5.37):  $\varphi = \arctg(\exp(-\Gamma_0 t) \operatorname{tg} \varphi_0)$ , где  $\varphi_0$  - начальное значение фазы при  $t=0$  и  $\Gamma_0 = m\omega_n$ . Это решение показывает, что переходной процесс имеет временной масштаб:  $t_\varphi = 1/\Gamma_0$ . Подставляя то же выражение для  $\varphi$  в первое из уравнений (5.37) и полагая:  $\beta \rho^2 \ll \alpha$ , найдем закон изменения амплитуды на линейном этапе процесса установления:  $\rho = \rho_0 (\cos^2 \varphi_0 + \exp(-2\Gamma_0 t) \sin^2 \varphi_0)^{1/2} \exp((\Gamma_0/2 - \alpha)t)$ . Отсюда видно, что при  $t > t_\varphi$  имеет место экспоненциальный рост амплитуды. Дальнейшее поведение амплитуды уже на нелинейном этапе совершенно аналогично изученному для томсоновского генератора.

Связь между начальным  $w_0(\varphi)$  и текущим  $w_t(\varphi)$  распределениями фазы дается выражением:  $w_t(\varphi) = w_0(F^{-1}(\varphi)) |dF^{-1}(\varphi)/d\varphi|$ , где  $F^{-1}$  - функция, обратная к  $F$  ( $\varphi = F(t) = \arctg(\exp(-\Gamma_0 t) \operatorname{tg} \varphi_0)$ , как было получено). Из последнего выражения для  $w_t(\varphi)$  следует, что в процессе установления параметрический генератор производит квантование начального значения фазы. Множеству значений:  $-\pi/2 < \varphi_0 < -\pi/2, (\pi/2 < \varphi_0 < 3\pi/2)$  начальной фазы ставится в соответствие установившееся ее значение:  $\varphi_\infty = 0$  ( $\varphi_\infty = \pi$ ). Вероятность возбуждения каждого из двух устойчивых состояний зависит от функции начального распределения  $w_0(\varphi_0)$  и от начального сигнала (если он есть). Вероятности одинаковы при равномерном начальном распределении  $w_0(\varphi_0)$ , если генератор возбуждается только шумом.

## 6. СЛУЧАЙНЫЕ ВОЛНЫ

### 6.1. Случайные поля в физике и технике

Проявления случайных полей в физике и технике разнообразны. Случайным (гауссовским) является электромагнитное поле, излучаемое не лазерным источником света. Из-за внутренних флуктуаций в генераторе, флуктуаций параметров антенной системы следует рассматривать как случайное и поле излучения радиопередатчика. Модель случайного поля оказывается наиболее адекватной при описании излучения многомодового лазера. Примеры случайных полей - поле температуры, влажности, диэлектрической проницаемости в турбулентной атмосфере. Случайным становится и электромагнитное излучение, распространяющееся в такой среде. Случайные волны - один из типов случайных полей. Рассмотрим случайную квазиплоскую квазигармоническую волну с напряженностью поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} A(\mathbf{r}, z, t) \exp [j (\omega_0 t - k_0 z)], \quad (6.1)$$

распространяющуюся вдоль оси  $z$ ,  $A$  - комплексная амплитуда волны, медленно изменяющаяся в масштабах среднего периода колебаний  $T$  и средней длины волны  $\lambda$ ,  $\mathbf{e}$  - единичный вектор поляризации волны,  $\mathbf{r}$  - компонента радиус-вектора точки наблюдения поперек оси  $z$ ,  $k_0$  и  $\omega_0$  - среднее волновое число и частота колебаний, соответственно.

Поле (6.1) возникает, например, если плоскую монохроматическую волну пропустить через плоский безграничный экран, прозрачность и фазовый набег волны в котором случайно изменяются от точки к точке. В радиофизических задачах, как правило, поле волны (6.1) неоднородно в плоскости  $xu$  из-за пространственной ограниченности фронта волны, и  $\langle \mathbf{E} \rangle = 0$ . Если масштаб этой неоднородности много меньше такового вдоль оси  $z$ , то говорят о волновом пучке.

### 6.2. Интерференция случайных волн

Исторически понятие когерентности возникло в оптике в связи с интерпретацией результатов интерференционных опытов [23]. Классические интерференционные опыты Юнга и Майкельсона - прямые методы измерения пространственных и временных корреляционных функций случайных полей. Распределение средней интенсивности поля в картине интерференции позволяет оценить корреляционную функцию поля. Для изучения пространственной когерентности поля используем схему Юнга. Интерферометр Юнга - непрозрачный экран  $Q_1$  с двумя полупрозрачными отверстиями  $P_1$  и  $P_2$  (см. рис. 6.1). На экран  $Q_1$ , перпендикулярный оси  $z$ , падает случайная линейно поляризованная волна (6.1) со статистически стационарным и изотропным полем. Стационарность и изотропность означает, что пространственно-временная корреляционная функция:  $B(\mathbf{r}_1, z_1, t_1; \mathbf{r}_2, z_2, t_2) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, z_1, t_1) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, z_2, t_2) \rangle$ , поля  $\mathbf{E}$  удовлетворяет условию:

$B(\mathbf{r}_1, z_1, t_1; \mathbf{r}_2, z_2, t_2) = B(\mathbf{r}_1, z_1, \mathbf{r}_2, z_2, \tau = t_2 - t_1)$ , и поперечная пространственная корреляционная функция  $B(\mathbf{r}_1, z, t; \mathbf{r}_2, z, t) = B(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \zeta, z)$ .

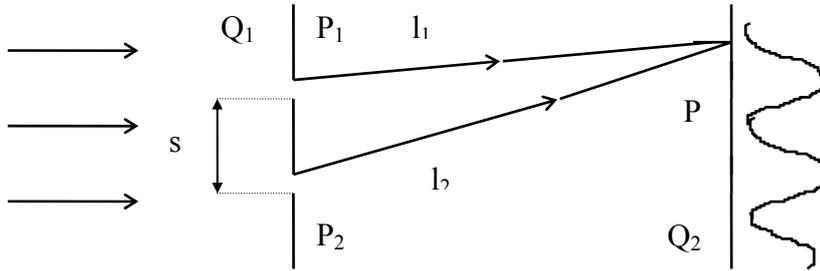


Рис. 6.1

Радиусом поперечной корреляции называется поперечный масштаб  $s_k$ , на котором функция корреляции значительно уменьшается при смещении от  $\zeta = 0$  до  $\zeta = s_k$  в плоскости  $xy$ . Предполагается, что диаметры отверстий в экране  $Q_1$  много меньше  $s_k$ . Это условие обеспечивает приближенно когерентность поля за экраном. Искомое поле - результат интерференции двух квазиплоских квазигармонических волн, получившихся при дифракции падающей волны на отверстиях в экране  $Q_1$ . Количественно когерентность характеризуют комплексным показателем когерентности  $\gamma$ . Для стационарного поля показатель пространственной когерентности в сечении  $z = const$  равен  $\gamma = \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) = B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z, \tau=0) / [\langle I(\mathbf{r}_1, z, t) \rangle \langle I(\mathbf{r}_2, z, t) \rangle]^{1/2}$ , где  $\langle I(\mathbf{r}_1, z, t) \rangle$  и  $\langle I(\mathbf{r}_2, z, t) \rangle$  - средние интенсивности поля в точках  $(\mathbf{r}_1, z)$  и  $(\mathbf{r}_2, z)$ ,  $I(\mathbf{r}, z, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, z, t)$ . Модуль степени когерентности (или просто степень когерентности):  $|\gamma| \leq 1$ . Два предельных случая:  $|\gamma| = 1$  ( $|\gamma| = 0$ ) - полностью когерентное (некогерентное) поле. При  $-1 < |\gamma| < 1$  поле частично когерентно. На экране  $Q_2$  наблюдают распределение средней интенсивности  $\langle I \rangle$  колебаний поля в картине интерференции.

Пусть  $E(P_i, t)$  - значения поля падающей волны непосредственно перед отверстием  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ). Пусть  $K_i$  - коэффициент передачи поля через полупрозрачное отверстие  $P_i$ ,  $K_i = |K_i| \exp(j\psi_i)$ . Здесь модуль  $|K_i|$  характеризует ослабление напряженности поля при прохождении волны через отверстие, и фаза  $\psi_i$  определяет запаздывание по фазе колебаний на выходе из отверстия по отношению ко входу в него. Для простоты полагаем:  $\psi_1 = \psi_2$ , тогда  $K_1 K_2^* = |K_1 K_2|$ . Дисперсией среды пренебрегаем. Фазовая скорость волны:  $v_\phi = \omega_0 / k_0$ . Колебания, приходящие в точку  $P$  из точки  $P_1$ , опережают по времени колебания, приходящие в ту же точку из точки  $P_2$ , на  $\tau = t_2 - t_1 = l_2 / v_\phi - l_1 / v_\phi$ . Суммарное комплексное поле в точке  $P$  от двух отверстий:  $E(P, t) = K_1 E(P_1, t - t_1) + K_2 E(P_2, t - t_2)$ . Для средней интенсивности поля в точке  $P$  получим

$$\langle I(P) \rangle = \langle E(P, t) E^*(P, t) \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2 (\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2} \text{Re}\{\gamma(\zeta, \tau)\}, \quad (6.2)$$

где  $\langle I_1 \rangle$  и  $\langle I_2 \rangle$  - средние интенсивности поля в точке  $P$ , если открыто только первое или только второе отверстие, соответственно,  $\langle I_1 \rangle = |K_1|^2 \langle |E(P_1, t - t_1)|^2 \rangle$ ,  $\langle I_2 \rangle = |K_2|^2 \langle |E(P_2, t - t_2)|^2 \rangle$ ,  $\gamma(\zeta, \tau)$  - показатель когерентности поля,

$$\gamma(\zeta, \tau) = B(\zeta, \tau) / (\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2}, \quad (6.3)$$

где  $B(\zeta, \tau)$  - пространственно-временная корреляционная функция поля для точек  $P_1$  и  $P_2$ , и  $\zeta$  - расстояние между этими точками, с учетом (6.1) получаем

$$B(\zeta, \tau) = \langle E(P_1, t - t_1) E^*(P_2, t - t_2) \rangle = B_A(\zeta, \tau) \exp(-j \omega_0 \tau), \quad (6.4)$$

причем  $B_A(\zeta, \tau)$  - пространственно-временная корреляционная функция амплитуды  $A$ ,  $B_A(\zeta, \tau) = \langle A(\mathbf{r}, z, t) A^*(\mathbf{r} + \zeta, z, t + \tau) \rangle$ ,  $(\mathbf{r}, z)$  и  $(\mathbf{r} + \zeta, z)$  - координаты точек  $P_1$  и  $P_2$ , соответственно,  $\zeta$  - вектор смещения из  $P_1$  в  $P_2$ .

Подставим (6.4) в (6.3), а результат - в (6.2), получим

$$\langle I(P) \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2 (\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2} |\gamma_A(\zeta, \tau)| \cos [\alpha(\zeta, \tau) - \omega_0 \tau], \quad (6.5)$$

где степень когерентности амплитуды:  $|\gamma_A(\zeta, \tau)| = |B_A(\zeta, \tau)| / (\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2} = |\gamma(\zeta, \tau)|$ ,  $\alpha$  - фаза комплексной функции  $B_A(\zeta, \tau)$ ,  $B_A(\zeta, \tau) = |B_A(\zeta, \tau)| \exp(j \alpha)$ .

Колебания, приходящие в точку  $P$  из точек  $P_1$  в  $P_2$  когерентны, если  $\tau \ll \tau_k$ , где  $\tau_k$  - время корреляции поля  $E$ . С учетом (6.5) функция видности картины интерференции на экране  $Q_2$

$$v = (\langle I \rangle_{\max} - \langle I \rangle_{\min}) / (\langle I \rangle_{\max} + \langle I \rangle_{\min}) = 2 (\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2} / (\langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle) |\gamma_A(\zeta)|, \quad (6.6)$$

где  $\langle I \rangle_{\min}$  и  $\langle I \rangle_{\max}$  - минимальное и максимальное значение интенсивности  $\langle I(P) \rangle$  из (6.5),  $\langle I \rangle_{\max(\min)} = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle \pm 2 (\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2} |\gamma_A(\zeta)|$ ,  $|\gamma_A(\zeta)|$  - степень пространственной когерентности амплитуды,  $\gamma_A(\zeta) = \gamma_A(\zeta, \tau = 0)$ .

Если интенсивности интерферирующих пучков одинаковы:  $\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle$ , то, согласно (6.6),  $v = |\gamma_A(\zeta)|$ . Таким образом, интерферометр Юнга позволяет определить поперечную пространственную корреляционную функцию  $B(\zeta, \tau = 0)$  поля по измерениям средней интенсивности поля в картине интерференции.

Понятие временной когерентности прямо связано с интерференционным опытом Майкельсона. В интерферометре Майкельсона (см. рис. 6.2) волна падает на наклонную полупрозрачную пластинку  $\Pi$ , формирующую два пучка. Эти пучки отражаются от зеркал  $Z_1$  и  $Z_2$ . Затем один из них, пройдя через пластинку  $\Pi$ , а другой, отразившись от нее, поступают на экран  $Q$ , где интерферируют. Выражение для полного поля на экране  $Q$  подобно данному выше для схемы Юнга:  $E(\mathbf{r}, t) = E_1(\mathbf{r}, t - t_1) + E_2(\mathbf{r}, t - t_2)$ , где  $E_j$  - напряженность поля  $j$ -го интерферирующего пучка ( $j = 1, 2$ ),  $t_j = 2l_j / v_\phi$  и  $l_j$  - расстояние между зеркалом  $Z_j$  и пластинкой  $\Pi$ . Расчеты, подобные сделанным для схемы Юнга, дают выражение для средней интенсивности поля на экране  $Q$ , сходное с (6.5),

$$\langle I(\tau) \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2 (\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2} |\gamma_A(\tau)| \cos [\alpha(\tau) - \omega_0 \tau], \quad (6.7)$$

где  $\tau = t_2 - t_1$  и  $\gamma_A(\tau)$  - показатель временной когерентности амплитуды,  $\gamma_A(\tau) = \gamma_A(\zeta = 0, \tau)$  (см. (6.3)). Изменяя  $\langle I \rangle$  как функцию  $\tau$  (меняя удаление зеркал от пластинки), оценим степень временной когерентности амплитуды  $|\gamma_A(\tau)|$  и самого поля  $|\gamma(\tau)|$ . Временная корреляционная функция поля (см. (6.4)):  $V(\tau) = V(\zeta = 0, \tau) = \gamma(\tau) (\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle)^{1/2}$ .

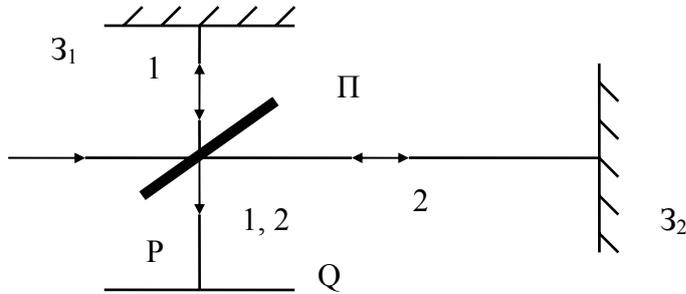


Рис. 6.2

Применяя преобразование Винера - Хинчина (1.21), выразим частотный спектр мощности  $G(\omega)$  ( $\langle I \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega$ ) стационарного поля через временную корреляционную функцию  $V(\tau)$  этого поля. Последняя находится по результатам измерения интерферограммы (6.7). Изложенная методика определения  $G(\omega)$  на основе измерения  $V(\tau)$  называется Фурье-спектроскопией. Фурье-спектрометр состоит из интерферометра с изменяемой временной задержкой  $\tau$  (например, - интерферометра Майкельсона) и интегрирующего устройства. В эксперименте время задержки  $\tau$  ограничено. Поэтому спектр  $G_{\text{изм}}(\omega)$  можно восстановить лишь приближенно

$$G(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-T}^T V(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (6.8)$$

где  $T$  - максимально реализуемое время задержки,  $T = \tau_{\text{max}}$  (при заданном значении  $T$  в Фурье- спектрометре можно различить спектральные линии, частоты которых различаются на  $\Delta\omega \geq \pi / T$  [5]).

Данные измерения пространственных корреляционных функций можно использовать для определения угловых спектров (угловой расходимости) случайных волн. Модель однородного стационарного волнового поля хорошо описывает излучение многих источников света. Пусть  $V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \zeta, z)$  - пространственная поперечная корреляционная функция такого поля. Тогда угловой спектр случайного поля выразим преобразованием Винера - Хинчина

$$G(\chi, z) = 1 / (4\pi^2) \int_{-\infty}^{\infty} V(\zeta, z) \exp(j\chi\zeta) d\zeta, \quad (6.9)$$

где  $\chi$  - поперечная компонента волнового вектора, имеющая координаты  $k_x$  и  $k_y$  (для квазиплоской волны ширина углового спектра мала:  $\Delta k_{x(y)}/k_0 \ll 1$ ).

Случайные поля световых пучков имеют ограниченный угловой спектр и часто существенно отличаются от модели однородного поля. Выразим угловой спектр неоднородного поля (6.1) через поперечную пространственную функцию корреляции (см. (6.4)). В выделенном сечении  $z = const$  пространственный Фурье - спектр амплитуды волны

$$A(\chi, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{r}, z, t) \exp(j \chi \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (6.10)$$

По преобразованию Винера - Хинчина, угловой спектр поля

$$G(\chi, z) = 1/(2\pi)^4 \iint_{-\infty}^{\infty} B(\zeta, \mathbf{R}; z) \exp(j \chi \zeta) d\zeta d\mathbf{R}, \quad (6.11)$$

где  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ , и, согласно (6.4), поперечная функция корреляции поля

$$B(\zeta, \mathbf{R}; z) = B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \langle A(\mathbf{r}_1, z, t) A^*(\mathbf{r}_2, z, t) \rangle. \quad (6.12)$$

Подставляя (6.12) в (6.11), переходя от переменных  $(\zeta, \mathbf{R})$  к переменным  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  и используя (6.10), получим:  $G(\chi, z) = \langle |A(\chi, z, t)|^2 \rangle$ . Вывод: угловой спектр  $G(\chi, z)$  волны (6.1) дает распределение мощности флуктуаций в волнах, образованных разложением (6.10). Взаимным наложением таких волн образована волна (6.1). Если в (6.1) пренебречь зависимостью амплитуды  $A$  от  $z$ , то (6.10) соответствует разложению волны (6.1) по плоским волнам. Выражение (6.11) обобщает (6.9) на случай неоднородного поля. При переходе от неоднородного к однородному полю в (6.11) следует положить:  $B(\zeta, \mathbf{R}; z) = 4\pi^2 B(\zeta, z) \cdot \delta(\mathbf{R})$ , где  $\delta(\mathbf{R})$  - дельта-функция. Тогда (6.11) превращается в (6.9). Заменим (6.11) эквивалентно системой, состоящей из выражения

$$B(\zeta, z) = 1/(2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} B(\zeta, \mathbf{R}; z) d\mathbf{R}, \quad (6.13)$$

и выражения (6.9); эта замена сводит расчет углового спектра неоднородного поля к расчету углового спектра однородного поля.

Угловые спектры реальных волновых пучков определяются не только радиусом поперечной корреляции  $s_k$ , но и геометрическими параметрами пучка.

Пример. Пусть радиус неоднородного волнового пучка задан:  $a = const$ . Поперечная корреляционная функция пучка задана

$$B(\zeta, \mathbf{R}; z) = I_0 \exp\{-2\mathbf{R}^2/a^2 - \zeta^2/r_{эфф}^2\}, \quad (6.14)$$

где  $r_{эфф}^{-2} = s_k^{-2} + a^2/2$  и  $s_k$  поперечный радиус корреляции пучка.

Для расчета углового спектра пучка можно использовать выражения (6.9) и (6.13). Его эффективная полуширина:  $\Delta\theta = 2/(k r_{эфф})$ , где  $k$  - волновое число,  $k = (k_0^2 + \chi^2)^{1/2}$  и  $\theta = \chi/k_0$  [5]. Уменьшение значения  $s_k$  приводит к сильному рас-

ширению углового спектра. При  $s_k \ll a$  имеем:  $\Delta\theta = 2/(k s_k)$ , то есть угловой спектр определяется только значением радиуса корреляции. Если  $s_k \gg a$ , то  $\Delta\theta = 2^{1/2}/(k a)$ .

### 6.3. Распространение случайных волн

Анализ распространения случайных волн в линейных средах основан на решении волновых уравнений электродинамики со случайными краевыми условиями. Запишем волновое уравнение для волны, распространяющейся в однородном диэлектрике [24]

$$c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 + \varepsilon_0^{-1} \partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2 = 0, \quad (6.15)$$

где  $c$  - скорость света в вакууме,  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость вакуума и  $\mathbf{P}$  - вектор поляризации среды, который в пренебрежении пространственной и учете лишь временной дисперсии среды равен

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, z, t) = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \chi(t') \mathbf{E}(t - t', \mathbf{r}, z) dt', \quad (6.16)$$

причем  $\chi(t)$  - электрическая восприимчивость среды и  $t > 0$ .

Метод медленно изменяющихся амплитуд - один из наиболее эффективных методов приближенного решения волновых уравнений [25]. Этот метод широко используется также в теории колебаний. В его основе лежит естественное для квазиплоских квазигармонических волн (6.1) предположение о медленности изменения комплексной амплитуды волны  $A$  в масштабах средней длины волны и среднего периода колебаний. Пусть волна (6.1) - плоская и чисто поперечная (вектор поляризации  $\mathbf{e}$  перпендикулярен оси  $z$  и амплитуда:  $A = A(z, t)$ ). Тогда  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Подставим (6.1) в (6.16). В полученном выражении разложим функцию  $A(z, t - t')$  в ряд по времени в окрестности момента  $t$ . Используя условие медленности изменения амплитуды, ограничимся  $N$  первыми членами разложения, где  $N$  определяет порядок приближения теории дисперсии. Получим

$$\mathbf{P}(z, t) = \varepsilon_0 \mathbf{e} \left[ \chi(\omega_0) A(z, t) + \sum_{n=1}^N (-j)^n / n! \partial^n \chi(\omega_0) / \partial \omega_0^n \partial^n A / \partial t^n \right] \exp [j(\omega_0 t - k_0 z)], \quad (6.17)$$

где  $\chi(\omega_0)$  - спектр электрической восприимчивости,  $\chi(\omega_0) = \int_0^{\infty} \chi(t') \exp(-j\omega_0 t') dt'$ .

В нулевом приближении теории дисперсии ( $N = 0$ ) вместо (6.17) имеем:  $\mathbf{P}(z, t) = \varepsilon_0 \mathbf{e} \chi(\omega_0) A$ , где  $A = \text{const}$ . В этом приближении волна (6.1) - плоская монохроматическая. Тогда, подставляя (6.1) (при  $A = \text{const}$ ) в (6.15), получим дисперсионное уравнение, связывающее частоту  $\omega_0$  с волновым числом  $k_0$ ,

$$\omega_0 n(\omega_0) = c k_0, \quad (6.18)$$

где  $n(\omega_0)$  - показатель преломления среды,  $n(\omega_0) = (1 + \chi(\omega_0))^{1/2}$ .

В первом приближении ( $N = 1$ ) пренебрегается всеми производными от  $A$  по  $z$  и  $t$  выше первого порядка. Подставляя (6.1) и (6.17) в (6.15) и учитывая (6.18), найдем укороченное волновое уравнение первого порядка теории дисперсии

$$\partial A / \partial z + (1 / u) \partial A / \partial t = 0, \quad (6.19)$$

где  $u$  - групповая скорость волны (6.1),  $u = \partial \omega_0 / \partial k_0$ .

Аналогично во втором приближении ( $N = 2$ ) вместо (6.19) получим параболическое уравнение

$$\partial A / \partial z + (1 / u) \partial A / \partial t - (j g / 2) \partial^2 A / \partial t^2 = 0, \quad (6.20)$$

где параметр  $g$  характеризует дисперсию групповой скорости,  $g = \partial u^{-1} / \partial \omega_0$ .

Учтем дополнительно потери энергии волны в среде за счет электропроводности среды  $\sigma(\omega_0)$ . Тогда вместо действительной  $\chi(\omega_0)$  следует рассматривать комплексную электрическую восприимчивость среды:  $\chi(\omega_0) - j \sigma(\omega_0) / \omega_0$ , и уравнения (6.18) - (6.20) можно обобщить. В частности, введя коэффициент потерь:  $\alpha = \sigma \omega_0 / (2 k_0)$ , в первом приближении теории дисперсии вместо (6.19) получим

$$\partial A / \partial z + (1 / u) \partial A / \partial t + \alpha A = 0. \quad (6.21)$$

Пусть теперь волна (6.1) гармоническая, но квазиплоская:  $A = A(\mathbf{r}, z)$ . Методика вывода укороченных уравнений для таких волн соответствует примененной выше для плоских квазигармонических волн. Рассмотрим два характерных случая: 1) комплексная амплитуда  $A$  имеет соизмеримые масштабы изменения вдоль всех трех координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ ; 2) волновой пучок с узким угловым спектром (изменение комплексной амплитуды  $A$  поперек оси  $z$  происходит намного быстрее, чем вдоль этой оси, так что  $|\Delta_{x,y} A| \gg |\partial^2 A / \partial z^2|$ ). Уравнение (6.18) нулевого приближения теории дисперсии останется справедливым в обоих случаях. В первом случае уравнение первого приближения упрощается по сравнению с (6.19), так как  $\partial A / \partial t = 0$ , и в векторной форме записывается как

$$(\mathbf{s} \nabla) A = 0, \quad (6.22)$$

где  $\mathbf{s}$  - лучевой вектор, указывающий направление распространения энергии волны,  $\mathbf{s} = \partial \mathbf{k}_0 / \partial \omega_0$ , и вдоль каждой траектории луча решение уравнения (6.22) имеет вид

$$A = A_0(\mathbf{r}'), \quad (6.23)$$

где  $\mathbf{r}'$  - радиус - вектор точки наблюдения на граничной поверхности,  $A_0$  - граничное значение амплитуды.

Решение (6.23) дает амплитуду волны, постоянную вдоль каждой лучевой траектории. Уравнение (6.22) и его решение (6.23) соответствуют приближению геометрической оптики. Во втором случае вместо (6.22) получим уравнение параболического типа

$$\partial A / \partial z + (j / (2 k_0)) \Delta_{x,y} A = 0. \quad (6.24)$$

Параболическое уравнение (6.24) учитывает дифракционные эффекты в так называемом квазиоптическом приближении. Пусть пространственно - временная функция корреляции волнового поля распадается на произведение пространственной и временной функции корреляции:  $V(\mathbf{r}_1, z_1, t_1; \mathbf{r}_2, z_2, t_2) = V_1(\mathbf{r}_1, z_1; \mathbf{r}_2, z_2) V_2(t_1, t_2)$ . Пусть масштабы проявления эффектов временной и пространственной когерентности сильно различаются. Тогда раздельное рассмотрение этих эффектов, проведенное выше, может быть оправдано. В общем случае надо изучать оба эффекта совместно. Во втором порядке теории дисперсии в квазиоптическом приближении это можно сделать с помощью уравнения, обобщающего (6.20) и (6.24),

$$(\mathbf{s}\nabla) A + (1/u) \partial A / \partial t - (j g / 2) \partial^2 A / \partial t^2 + (j / (2 k_0)) \Delta_{\perp} A = 0. \quad (6.25)$$

Используя уравнение (6.20), рассмотрим эволюцию корреляционной функции случайной волны при распространении в диспергирующей среде. Зададим граничное условие:  $A(t, z = 0) = A_0(t)$ , где  $A_0(t)$  - стационарный случайный процесс. Тогда решение уравнения (6.20)

$$A(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\theta) H(t - \theta, z) d\theta, \quad (6.26)$$

где  $H$  - функция Грина,

$$H(t - \theta, z) = (2 \pi j g z)^{-1/2} \exp \{j [t - z / u - \theta]^2 / (2 g z)\}. \quad (6.27)$$

Применим операцию комплексного сопряжения к уравнению (6.20) и полученное уравнение умножим на амплитуду  $A$ . Результирующее уравнение сложим с уравнением (6.20), умноженным на  $A^*$ . Получим

$$\{ \partial / \partial z + (1/u)(\partial / \partial t + \partial / \partial t_1) - (jg/2) (\partial^2 / \partial t^2 - \partial^2 / \partial t_1^2) \} A(t, z) A^*(t_1, z) = 0. \quad (6.28)$$

Усредним статистически (6.28). С учетом статистической стационарности волнового процесса  $A(t, z)$  вместо (6.28) получим уравнение:  $\partial V(\tau, z) / \partial z = 0$ , где  $V(\tau, z)$  - корреляционная функция процесса  $A(t, z)$  и  $\tau = t_1 - t$ . Решение последнего уравнения

$$V(\tau, z) = V(\tau, z = 0) = V_0(\tau), \quad (6.29)$$

где  $V_0(\tau)$  - корреляционная функция для процесса  $A_0(t)$  на границе  $z = 0$ .

Согласно (6.29), корреляционная функция стационарного волнового процесса остается неизменной при распространении случайной волны. Для нестационарного волнового процесса этот результат несправедлив. Полученный результат (6.29) можно понять, обратившись к спектру изучаемого процесса. При-

меним к уравнению (6.20) интегральный оператор:  $(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-j\omega t)$ . Получим

$$\partial A_{\omega}(z) / \partial z + (j \omega / u + j g \omega^2 / 2) A_{\omega}(z) = 0, \quad (6.30)$$

где  $A_\omega(z)$  - амплитудный спектр случайной функции  $A(t, z)$ .

Интегрируя (6.30), имеем

$$A_\omega(z) = A_\omega(0) \exp(-j \varphi(\omega, z)), \quad (6.31)$$

где  $\varphi(\omega, z) = (\omega / u + g \omega^2 / 2) z$ .

Из (6.31) следует, что при распространении изучаемой волны у спектра  $A_\omega(z)$  изменяется только фаза  $\varphi(\omega, z)$ . Для стационарного процесса, согласно (1.23), имеем:  $\langle A_\omega(0) A_{\omega'}^*(0) \rangle = G_0(\omega) \delta(\omega - \omega')$ , где  $G_0(\omega)$  - спектр мощности флуктуаций для функции  $A_0(t)$ . Спектральная плотность мощности  $G(\omega, z)$  функции  $A(t, z)$  не зависит от фазового набеге, поэтому  $G(\omega, z) = G_0(\omega)$ .

Сопоставим поведение временной корреляционной функции  $B(\tau)$  и продольной корреляционной функции:  $B_{||}(s = |z_2 - z_1|) = B(\mathbf{r}, z_1, t; \mathbf{r}, z_2, t)$  стационарного случайного волнового процесса. Используя (1.23) и (6.31), выразим:  $\langle A_\omega(z) A_{\omega'}^*(z + s) \rangle = G_0(\omega) \delta(\omega - \omega') \exp[j(\varphi(\omega', z + s) - \varphi(\omega, z))]$ . К последнему уравнению применим оператор:  $\iint_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \exp[j(\omega - \omega') t]$ . Получим

$$B_{||}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) \exp[j(\omega / u + g \omega^2 / 2) s] d\omega. \quad (6.32)$$

В частности, в первом приближении теории дисперсии ( $g = 0$ ), применяя преобразование Винера - Хинчина, вместо (6.32) имеем

$$B_{||}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) \exp(j \omega \tau) d\omega = B(\tau), \quad (6.33)$$

где  $\tau$  играет роль времени,  $\tau = s / u$ .

#### 6.4. Дифракция случайных волн

Изучим дифракционное изменение радиуса корреляции при распространении случайной волны (6.1). Используем волновое уравнение (6.24), чтобы вывести уравнение для поперечной корреляционной функции:  $B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \langle A(\mathbf{r}_1, z) A^*(\mathbf{r}_2, z) \rangle$ . Методика вывода аналогична примененной для получения (6.28). В результате преобразований следует искомое уравнение

$$\{\partial / \partial z + (j / k_0) \partial^2 / (\partial \zeta \partial \mathbf{R})\} B(\zeta, \mathbf{R}, z) = 0, \quad (6.34)$$

где  $\zeta = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) / 2$ .

Для статистически однородного поля корреляционная функция  $B$  не зависит от  $\mathbf{R}$ . Тогда вместо (6.34) получим:  $\partial B / \partial z = 0$ , то есть функция  $B$  также не зависит от  $z$ . Для решения уравнения (6.34) в общем виде используем спектральный метод. Применим оператор:  $\Pi = (1/(2\pi))^4 \iint d\zeta d\mathbf{R} \exp[j(\alpha\zeta + \beta\mathbf{R})]$ , к этому

уравнению. Получим

$$(\partial / \partial z - (j / k_0) \alpha \beta) V(\alpha, \beta, z) = 0, \quad (6.35)$$

где  $V(\alpha, \beta, z)$  - Фурье - образ функции  $V(\zeta, \mathbf{R}, z)$ ,  $V(\alpha, \beta, z) = \Pi V(\zeta, \mathbf{R}, z)$ .

Интегрируя (6.35), находим:  $V(\alpha, \beta, z) = V(\alpha, \beta, z = 0) \exp (j \alpha \beta z / k_0)$ . К последнему равенству применим обратное Фурье - преобразование. В полученное уравнение подставим выражение для граничного спектра:  $V(\alpha, \beta, z = 0) = \Pi V(\zeta, \mathbf{R}, z = 0)$ . В результате найдем связь значений поперечной корреляционной функции в произвольном сечении  $z > 0$  со значениями той же функции на границе:  $z = 0$ , в квазиоптическом приближении

$$V(\zeta, \mathbf{R}, z) = C'(z) \iint_{-\infty}^{\infty} V(\zeta', \mathbf{R}', z = 0) \exp [-j (k_0 / z) (\zeta - \zeta') (\mathbf{R} - \mathbf{R}')] d\zeta' d\mathbf{R}', \quad (6.36)$$

где  $C'(z) = (k_0 / (2 \pi z))^2$ .

Пусть поле создается  $\delta$  - коррелированным источником

$$V(\zeta', \mathbf{R}', z = 0) = h^2 I(\mathbf{R}') \delta(\zeta'), \quad (6.37)$$

где функция  $I(\mathbf{R}')$  характеризует распределение средней интенсивности поля в сечении  $z = 0$  и коэффициент  $h$  определяется условием:  $\int_{-\infty}^{\infty} V(\zeta, \mathbf{R}, z=0) d\zeta = h^2 I(\mathbf{R})$ .

Подставляя (6.37) в (6.36), получим

$$V(\zeta, \mathbf{R}, z) = C(z) \exp [-j (k_0 / z) \zeta \mathbf{R}] \iint_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{R}') \exp [j (k_0 / z) \zeta \mathbf{R}'] d\mathbf{R}', \quad (6.38)$$

где  $C(z) = C'(z) h^2$ .

Формула (6.38) выражает теорему Циттерта - Цернике о связи поперечной корреляционной функции поля с начальным распределением его интенсивности посредством преобразования Фурье. Сделаем предельный переход:  $k_0/z \rightarrow \infty$ , в выражении (6.38). Пренебрегая дифракционными эффектами, в приближении геометрической оптики найдем, что по мере распространения волны (6.1) функция корреляции  $V(\zeta, \mathbf{R}, z)$  не изменяется. Дифракция приводит к изменению корреляционной функции  $V(\zeta, \mathbf{R}, z)$  по мере распространения волны вдоль оси  $z$ .

Пример. Пусть в поперечном сечении:  $z = const$ , интенсивность волны существенно уменьшается на масштабе порядка  $a$  ( $a$  - радиус пучка). Тогда, согласно (6.38), радиус поперечной корреляции:  $s_k \sim z / (k_0 a)$ , - линейно возрастает с пройденным расстоянием  $z$ . Чем больше длина волны  $\lambda$ , тем сильнее выражен дифракционный эффект увеличения  $s_k$  с ростом  $z$ . Можно дать следующее объяснение полученному результату. Используя принцип Кирхгофа [23], представим поле пучка наложением элементарных сферических волн вторичных источ-

ников. По мере распространения фазовые фронты элементарных волн совпадают между собой на все возрастающей с ростом  $z$  площади.

Полученные выше результаты можно использовать для изучения дифракции частично когерентной волны на регулярном препятствии. В общем случае для этого задачи следует использовать формулу (6.36).

Задача. Исследовать дифракцию полностью некогерентной волны на круглом отверстии радиуса  $a$  в плоском непрозрачном экране. Экран перпендикулярен оси  $z$  - направлению распространения случайной волны. Распределение интенсивности  $\delta$  - коррелированной волны на отверстии с центром в начале системы координат принять равномерным.

Решение. В частном случае, когда на экран падает полностью некогерентная волна, можно использовать формулу (6.38). По условию задачи,  $I(\mathbf{R}') = I_0$  при  $R' \leq a$  и  $I(\mathbf{R}') = 0$  при  $R' > a$ . Подставим последние выражения в (6.38) и проведем интегрирование в полярных координатах  $\{R', \varphi\}$  ( $d\mathbf{R}' = R' dR' d\varphi$ ). Здесь, по смыслу задачи,  $R'$  - расстояние от начала системы координат до выбранной точки в плоскости экрана. При  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{s} \neq 0$  и  $\mathbf{r}_2 = 0$  получим

$$B(s, z) = (h k_0 a I_0 / (2 \pi z s)) \exp[-j k_0 s^2 / (2 z)] J_1(k_0 a s / z), \quad (6.39)$$

где  $J_1$  - функция Бесселя первого порядка (при выводе использовано рекуррентное соотношение для функций Бесселя:  $d(x^n J_n(v x)) / dx = v x^n J_{n-1}(v x)$  при  $n = 1$ ).

С помощью (6.39) выразим степень поперечной когерентности дифракционного пучка

$$|\gamma(s)| = |B(s, z) / B(0, z)| = 2 |J_1(k_0 a s / z) / (k_0 a s / z)|. \quad (6.40)$$

Радиус  $s_k$ , значение которого удовлетворяет условию:  $|\gamma(s_k)| = 0,88$ , прием за радиус корреляции. Из (6.40) следует

$$s_k = 0,16 \lambda / \theta_0, \quad (6.41)$$

где  $\theta_0$  - угловой радиус источника излучения,  $\theta_0 = a / z$ . Видно, что радиус корреляции прямо пропорционален расстоянию  $z$  от источника и обратно пропорционален размеру источника. При  $a \rightarrow \infty$  излучение остается  $\delta$  - коррелированным и после дифракции волны на отверстии в экране.

Изученная модель источника  $\delta$  - коррелированного в пространстве излучения, ограниченного круглой диафрагмой, широко используется в астрофизике для описания собственного излучения звезд. Измерение радиуса корреляции излучения, приходящего от звезд, согласно (6.41), может быть использовано для определения угловых размеров звезд (или даже диаметров звезд, если известны расстояния до них) [5]. Выражение (6.39) по функциональной структуре сходно с выражением для амплитуды поля, полученного дифракцией плоской монохроматической волны на круглом отверстии в экране [23]. Радиус дифрагированного когерентного пучка выражается формулой, подобной (6.41):  $a(z) = \lambda z / a$ .

В реальных условиях всегда радиус корреляции  $s_k$  случайного поля  $s_k > 0$  и конечен по величине. В квазиоптическом приближении корреляционные функции поля можно получить, интегрируя уравнение (6.34). Для гауссовского пучка поперечная корреляционная функция, по определению, имеет вид

$$B(\zeta, \mathbf{R}, z) = I_0 f(z) \exp [-g(z) 2 (\mathbf{R} / a)^2 - h(z) (\zeta / \zeta_{\text{эфф}})^2 - j \alpha(z) \zeta \mathbf{R}], \quad (6.42)$$

где  $\zeta_{\text{эфф}}^{-2} = s_k^{-2} + a^{-2} / 2$ ,  $s_k$  - начальные радиус корреляции и геометрический радиус пучка при  $z = 0$ .

Функция (6.42) является частным решением уравнения (6.34) при определенном выборе функций  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , и  $\alpha$ . Подстановка (6.42) в (6.34) позволяет найти искомые функции [5]:  $\alpha(z) = (k_0 / (2u^2)) du^2 / dz$ ,  $u^2(z) = [(\alpha_0 / k_0)^2 + v_g^{-2}] z^2 + 2 (\alpha_0 / k_0) z + 1$ ,  $v_g$  - дифракционная длина,  $v_g = ak_0 \zeta_{\text{эфф}} / (2^{3/2})$ ,  $\alpha_0 = \alpha(z=0)$ ,  $f(z) = g(z) = h(z) = u^{-2}(z)$ . С учетом (6.42) интенсивность гауссовского пучка:  $I(\mathbf{R}, z) = B(0, \mathbf{R}, z) = I(\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2, z) = I_0 u^{-2} \exp [-2 (\mathbf{R} / a(z))^2]$ , где  $a(z)$  - радиус пучка в сечении  $z$  и  $a(z) = a u(z)$ . Найдем степень поперечной пространственной когерентности пучка (6.42)

$$|\gamma(s, z)| = |B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z)| / (I(\mathbf{r}_1, z) I(\mathbf{r}_2, z))^{1/2} = \exp (-s^2 / s_k^2(z)), \quad (6.43)$$

где  $s = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ ,  $s_k(z)$  - радиус корреляции пучка в сечении  $z$ ,  $s_k(z) = u(z) s_k$  (то есть радиус корреляции изменяется в зависимости от  $z$  по тому же закону, что и радиус пучка  $a(z)$ ; коэффициент когерентности пучка:  $s_k(z) / a(z) = s_k / a$ , остается постоянным при распространении гауссовского пучка).

По смыслу решения задачи, при  $\alpha_0 > 0$  пучок расходится при  $z \geq 0$ . Тогда радиус корреляции пучка  $s_k(z)$  монотонно увеличивается с ростом  $z$ . При  $\alpha_0 < 0$  пучок сходящийся при  $z=0$ . При  $z > 0$  степень сходимости распространяющегося пучка постепенно уменьшается, и затем пучок превращается в расходящийся. Там, где пучок сходящийся, радиус корреляции  $s_k(z)$  уменьшается с ростом  $z$ . Затем, когда пучок становится расходящимся,  $s_k(z)$  увеличивается с ростом  $z$ . При смещении вдоль оси  $z$  от  $z=0$  на расстояние  $v_g$  - дифракционной длины, радиус расходящегося гауссовского пучка  $a$  и его радиус корреляции  $s_k(z)$  увеличиваются в  $2^{1/2}$  раз. Для полностью некогерентного пучка имеем:  $s_k = \zeta_{\text{эфф}} = 0$  и  $v_g = 0$ . Для полностью когерентного пучка имеем:  $s_k(z) \rightarrow \infty$ ,  $\zeta_{\text{эфф}} = 2^{1/2} a$  и  $v_g = a^2 k_0 / 2$ . При рассмотрении картины дифракции ближней зоне соответствует условие:  $0 < z < v_g$ , а дальней -  $z > v_g$ . Другой характерный масштаб изменения параметров дифрагированного пучка - длина продольной когерентности  $s_{||}$ . Корреляцией значений поля, взятых в двух выделенных поперечных сечениях пучка, можно пренебречь, если только расстояние между этими сечениями больше  $s_{||}$ . Для гауссовского пучка с корреляционной функцией (6.42) можно принять:  $s_{||} = k_0 s_k^2 / 2$ .

Выше изучалась дифракция случайных волн на экране с регулярными геометрическими и физическими параметрами. Проанализируем задачу о дифракции когерентного волнового пучка на плоском экране со случайным коэффициентом пропускания:  $M(\mathbf{r}) = m(\mathbf{r}) \exp (j \Phi(\mathbf{r}))$ , где  $m(\mathbf{r})$  и  $\Phi(\mathbf{r})$  - случайные

амплитуда и фаза данного коэффициента, радиус - вектор  $\mathbf{r}$  описывает положение точки наблюдения на экране, перпендикулярном направлению распространения пучка (оси  $z$ ). Случайное изменение амплитуды волны в  $m(\mathbf{r})$  раз при прохождении экрана обусловлено случайным же изменением прозрачности экрана при переходе от одной точки к другой. Случайное изменение фазы волны на величину  $\Phi(\mathbf{r})$  обусловлено случайным изменением толщины или показателя преломления экрана от точки к точке. Эта задача характерна для статистической оптики, статистической теории антенн, для изучения распространения волн в неоднородной ионосфере, межзвездной плазме и в турбулентной среде.

Для решения задачи используем метод Рэлея. Дифрагированное на случайном экране поле разложим на плоские волны

$$E(\mathbf{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{k}} E(\omega, \mathbf{k}) \exp [j (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})] d\omega d\mathbf{k}, \quad (6.44)$$

где  $E(\omega, \mathbf{k})$  - спектральная амплитуда волны  $E(\mathbf{R}, t)$ ,  $\mathbf{k}$  - волновой вектор,  $\omega$  - частота и  $\mathbf{R}$  - радиус - вектор точки наблюдения за экраном.

Для гармонических полей имеем:  $E(\omega, \mathbf{k}) = E(\mathbf{k})\delta(\omega - \omega_0)\delta(\mathbf{k} - \omega/c)$ , где наличие функции  $\delta(\mathbf{k} - \omega/c)$  обусловлено дисперсионным соотношением:  $k = \omega/c$ ,  $c$  - фазовая скорость волны. Амплитуды волн, не удовлетворяющих заданному выражению для  $E(\omega, \mathbf{k})$ , равны нулю. Подставляя это выражение в (6.44) и интегрируя по  $k_z$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , получим

$$E(\mathbf{R}, t) = E(\mathbf{R}) \exp (j \omega_0 t), \quad (6.45)$$

где

$$E(\mathbf{R}) = \int_{\chi} E(\chi) \exp [-j (\chi \mathbf{r} + (k^2 - \chi^2)^{1/2} z)] d\chi, \quad (6.46)$$

причем  $\chi$  и  $\mathbf{r}$  - компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$  и радиус - вектора  $\mathbf{R}$ , перпендикулярные оси  $z$ , соответственно.

Разложение (6.46) состоит из волн двух типов: значениям:  $k^2 > \chi^2$ , соответствуют плоские бегущие волны, а значениям:  $k^2 < \chi^2$ , - неоднородные волны, затухающие вдоль оси  $z$ . Пусть комплексная амплитуда поля  $E(\mathbf{R})$  непосредственно перед экраном задана:  $E(\mathbf{r}, z=0) = A_0(\mathbf{r})$ . Сразу за экраном пренебрежимо малой толщины амплитуда поля:  $A_0(\mathbf{r}) = M(\mathbf{r})A_0'(\mathbf{r})$ . Тогда спектральная амплитуда  $E(\chi)$  выражается преобразованием Фурье:  $E(\chi) = 1/(4\pi^2) \int_{\mathbf{r}_1} A_0(\mathbf{r}_1) \exp (j \chi \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1$ .

Подставляя последнее выражение в (6.46), найдем

$$E(\mathbf{R}) = 1/(4\pi^2) \int_{\chi} \int_{\mathbf{r}_1} A_0(\mathbf{r}_1) \exp [-j (\chi (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + (k^2 - \chi^2)^{1/2} z)] d\chi d\mathbf{r}_1. \quad (6.47)$$

Пусть  $s_0$  - характерный размер неоднородностей экрана. Тогда начальный радиус корреляции пучка, дифрагированного на экране:  $s_k = s_0$ . При  $s_k \ll a$  ( $a$  - радиус пучка в плоскости экрана) полуширина углового спектра узкого пучка:  $\Delta\theta = \Delta\chi/k = 2/(ks_k) \ll 1$  (см. пример в конце п. 6.2). Последнее одновременно означает, что неоднородности экрана крупномасштабные ( $ks_k \gg 1$ ). Для узкого пучка

заведомо выполняется условие:  $k^2 > \chi^2$ . Тогда разложение (6.46) образовано только бегущими волнами, и в приближении:  $(k^2 - \chi^2)^{1/2} \approx k - \chi^2/(2k)$ , вместо (6.47) получим

$$E(\mathbf{R}) = j k / (2 \pi z) \exp(-j k z) \int_{\mathbf{r}_1} A_0(\mathbf{r}_1) \exp[-j k (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2 / (2 z)] d\mathbf{r}_1. \quad (6.48)$$

Задача о дифракции монохроматической волны на экране со случайным пропусканием аналогична задаче о дифракции шумовой волны на регулярном экране. Случайный экран модулирует проходящую через него волну по амплитуде и фазе. Распространение дифрагированных волн за экраном в обоих случаях описывается параболическим уравнением (6.20). Соответственно, выражение (6.48) может быть получено как решение уравнения (6.20).

### 6.5. Рассеяние волн в случайно неоднородных средах

Случайные неоднородности среды влияют на статистические характеристики волн, распространяющихся в ней. Возникающие при этом явления многообразны. Например, - мерцание звезд и флуктуации радиоизлучения от внеземных источников, замирания (фединги) радиоволн и молекулярное рассеяние света, уширение лазерных пучков в тропосфере и рассеяние звука в море. Исследованием такого рода явлений занимается статистическая теория распространения и рассеяния волн. Задачи о распространении волн в средах с флуктуирующими неоднородностями решаются в основном приближенными методами [25].

Если относительные флуктуации параметров среды достаточно слабы, а рассеянное поле мало по сравнению с полем первичной волны, то применяют метод малых возмущений. Анализ полей, рассчитанных в первом порядке теории возмущений, составляет содержание теории однократного рассеяния волн. Однократно рассеянное поле линейно относительно возмущений параметров среды и порождено непосредственно первичным полем. Пусть условия применимости теории однократного рассеяния нарушены (флуктуации в среде достаточно слабы, но рассеянное поле не мало). Тогда учитывают двух-, трех- и т. д. кратное рассеяние поля и используют теорию многократного рассеяния волн.

В случае слабых, но крупных (по сравнению с длиной волны) неоднородностей многократно рассеянные волны лишь незначительно уклоняются от направления распространения первичной волны. Многократное рассеяние эффективно описывается методом геометрической оптики и примыкающими к нему более общими коротковолновыми асимптотическими методами теории дифракции - методом плавных возмущений и методом параболического уравнения. Другая возможность учета многократного рассеяния волн основана на приближенном суммировании рядов теории возмущений. Тогда удается учесть не только слабые, но и сильные флуктуации среды. Но при этом необходимо, чтобы неоднородности были мелкомасштабными по сравнению с длиной волны.

Ограничимся рассмотрением неоднородной стационарной изотропной линейной среды без дисперсии. Без учета деполяризации рассеянной волны рас-

пространение электромагнитной волны в такой среде можно описать скалярным волновым уравнением

$$c^2 \Delta E = \partial^2 E / \partial t^2 + \varepsilon_0^{-1} \partial^2 P / \partial t^2 = 0, \quad (6.49)$$

где линейная поляризация среды:  $P = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E$ ,  $\varepsilon$  - относительная диэлектрическая проницаемость среды, равная сумме регулярной и случайной компонент:  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ .

Предполагая рассеяние слабым, используем теорию однократного рассеяния волн. Поле в случайно неоднородной среде представим суммой:  $E(\mathbf{r}, t) = E_1(\mathbf{r}, t) + E_2(\mathbf{r}, t)$ , полей падающей волны, которую считаем плоской и монохроматической:  $E_1(\mathbf{r}, t) = A_1 \exp [j (\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})]$ , и рассеянной волны. Подставляя последние выражения для  $E(\mathbf{r}, t)$  и  $E_1(\mathbf{r}, t)$  в (6.49), получим волновое уравнение для рассеянного поля

$$\Delta E_2 - (1/v^2) \partial^2 E_2 / \partial t^2 = (\varepsilon_2(\mathbf{r}) / c^2) \omega^2 A_1 \exp [j (\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})], \quad (6.50)$$

где  $v$  - фазовая скорость волны в среде,  $v = c / \varepsilon_1^{1/2}$ .

Решением уравнения (6.50), удовлетворяющим условию излучения, является

$$E_2(\mathbf{r}, t) = - (\omega / c)^2 \int_{\mathbf{r}'} \varepsilon_2(\mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \exp [-j \mathbf{k}_1 \mathbf{r}' + j \omega (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / v)] d\mathbf{r}', \quad (6.51)$$

где интегрирование проведено по рассеивающему объему.

Пусть точка наблюдения  $\mathbf{r}$  находится в дальней (фраунгоферовой) зоне рассеивающего объема. Из геометрических соображений примем приближенно:  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' / r$ , и, следовательно,  $\omega |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / v \approx k_1 r - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}'$ , где  $\mathbf{k}_2$  - волновой вектор рассеянного поля,  $\mathbf{k}_2 = k_1 \mathbf{r} / r$  и  $v = \omega / k_1$ . Из-за предполагаемой стационарности статистических свойств неоднородной среды оказалось:  $k_1 = k_2 = k$ . При выполнении условий:  $r \gg r_1$  и  $r \gg k r_1^2$ , выражение (6.51) приближенно преобразуется как

$$E_2(\mathbf{r}, t) = - (k_1^2 / (r \varepsilon_1)) A_1 \exp [j (\omega t - k_1 r)] \int \varepsilon_2(\mathbf{r}') \exp (-j \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (6.52)$$

где волновой вектор:  $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ , так что  $K = 2 k_1 \sin (\theta / 2)$  и  $\theta$  - угол между направлениями распространения падающей и рассеянной волн,  $\theta = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2$ .

Используя (6.51), найдем пространственный спектр мощности рассеянной волны

$$I_2(\mathbf{K}) = \langle |E_2|^2 \rangle = (k_1^4 / (r \varepsilon_1)^2) I_1 \int \int_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2'} V_{\text{фл}}(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') \exp [j \mathbf{K}(\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1')] d\mathbf{r}_1' d\mathbf{r}_2', \quad (6.53)$$

где корреляционная функция поля флуктуаций диэлектрической проницаемости среды:  $V_{\text{фл}}(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') = \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}_1') \varepsilon_2(\mathbf{r}_2') \rangle$ ,  $I_1$  - интенсивность падающей волны,  $I_1 = |A_1|^2$ .

Для статистически однородного поля  $\varepsilon_2(\mathbf{r}')$  флуктуаций:  $V_{\text{фл}}(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') = V_{\text{фл}}(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2')$ . Тогда, делая замену переменных:  $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1'$  и  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1' + \mathbf{r}_2') / 2$ , вместо (6.53) получим

$$I_2(\mathbf{K}) = (k_1^4 / (r \varepsilon_1)^2) I_1 V G_{\text{фл}}(\mathbf{K}), \quad (6.54)$$

где  $V$  - рассеивающий объем и  $G_{\text{фл}}(\mathbf{K})$  - пространственный спектр мощности флуктуаций диэлектрической проницаемости,

$$G_{\text{фл}}(\mathbf{K}) = \iint_{\mathbf{r}''} B_{\text{фл}}(\mathbf{r}'') \exp(j \mathbf{K} \mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' \quad (6.55)$$

Используя преобразование Винера - Хинчина, (6.54), а также - (6.55), выразим пространственную корреляционную функцию рассеянной волны через аналогичную функцию флуктуаций диэлектрической проницаемости.

$$B(\mathbf{s}) = \int_{\mathbf{K}} I_2(\mathbf{K}) \exp(-j \mathbf{K} \mathbf{s}) d\mathbf{K} = (k_1^4 / (\epsilon \epsilon_1)^2) I_1 V \iint_{\mathbf{r}''} B_{\text{фл}}(\mathbf{r}'') \exp[j \mathbf{K} (\mathbf{r}'' - \mathbf{s})] d\mathbf{r}'' d\mathbf{K} \quad (6.56)$$

### 6.6. Статистика теплового излучения

В оптическом и СВЧ и диапазонах тепловое излучение служит причиной внутренних шумов поглощающей среды. Источник теплового излучения, как и теплового шума в радиопежах, - хаотическое движение заряженных микрочастиц - электронов и ионов. Тепловой шум описывается в терминах случайных токов и напряжений. Тепловое излучение - в терминах случайных электромагнитных полей, генерируемых распределенными в среде источниками. Законы теплового излучения известны из курса оптики [23]. Статистические свойства последнего изучим на примере излучения абсолютно черного тела. Пусть тело находится в состоянии теплового равновесия с окружающей однородной средой и своим излучением при температуре  $T$ . Случайное стационарное поле  $\mathbf{E}$  теплового излучения черного тела однородно и полностью неполяризовано. Декартову компоненту с номером  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) поля  $\mathbf{E}$  разложим по плоским поперечным волнам

$$E_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^2 \int_{\mathbf{k}} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}m})_i A_{\mathbf{k}m} \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})] d\mathbf{k}, \quad (6.57)$$

где индекс  $m$  обозначает поляризацию плоской волны,  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}m}$  - единичный вектор поляризации волны,  $A_{\mathbf{k}m}$  - спектральная амплитуда разложения,  $\mathbf{k}$  - волновой вектор, частота  $\omega$  связана с волновым числом посредством дисперсионного соотношения:  $\omega = k c$ ,  $c$  - скорость света,  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \perp \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} \perp \mathbf{k}$ .

По аналогии с (1.23) находим связь между амплитудным спектром и спектром мощности изучаемого стационарного поля:  $\langle A_{\mathbf{k}m} A_{\mathbf{k}'n} \rangle = G_{\mathbf{k}m} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{mn}$ , где  $\delta$  - символ Кронекера. В силу неполяризованности поля излучения имеем:  $G_{\mathbf{k}1} = G_{\mathbf{k}2} = G_{\mathbf{k}}$ . Декартовы проекции взаимно перпендикулярных векторов поляризации  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}$  и  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$  связаны геометрически:  $(\mathbf{e}_{\mathbf{k}1})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}1})_m + (\mathbf{e}_{\mathbf{k}2})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}2})_m + k_i k_m / k^2 = \delta_{im}$ , где  $i, m = 1, 2, 3$ . Вклады в среднюю энергию поля изучаемого поля излучения от электрической и магнитной составляющих поля одинаковы. Тогда пространственно - временная корреляционная функция поля теплового излучения черного тела

$$B_{im}(\mathbf{s}, \tau) = \langle E_i(\mathbf{r}, t) E_m^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t + \tau) \rangle = \int_{\mathbf{k}} (\delta_{im} - k_i k_m / k^2) G_{\mathbf{k}} \exp [j (\omega t - \mathbf{k} \mathbf{s})] d\mathbf{k} \quad (6.58)$$

и средняя плотность энергии того же поля

$$\langle w \rangle = (\varepsilon_0 / 2) \langle E E^* \rangle = \varepsilon_0 \int_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} G_{\omega} d\omega, \quad (6.59)$$

где  $G_{\omega}$  - частотный спектр мощности поля,  $G_{\omega} = (4 \pi k^2 / c) G_{\mathbf{k}}$ , так как  $k = \omega / c$ .

Спектральная плотность энергии поля излучения:  $\langle w_{\omega} \rangle = \varepsilon_0 G_{\omega}$ , для черного тела дается формулой Планка [23]:  $\langle w_{\omega} \rangle = (\omega^2 / (\pi^2 c^3)) h' \omega / (\exp (h' \omega / (kT)) - 1)$ , где  $h'$  - постоянная Планка ( $h' = h / (2\pi)$ ) и  $k$  - постоянная Больцмана. Отсюда выразим:  $G_{\mathbf{k}} = (c h' / (4 \pi^3 \varepsilon_0)) k / (\exp (\alpha k) - 1)$ , где  $\alpha = c h' / (kT)$ . Подставим полученное выражение в (6.58) и перейдем к сферическим координатам  $\{k, \theta, \varphi\}$  с полярной осью, направленной вдоль вектора смещения  $\mathbf{s}$ . Интегрируя по переменным  $\theta$  - в пределах от 0 до  $\pi$ , и  $\varphi$  - в пределах от 0 до  $2\pi$ , найдем

$$B_{im}(\mathbf{s}, \tau) = (c h' / (\pi^2 \varepsilon_0)) L_{im} \int_0^{\infty} \sin (\mathbf{k} \mathbf{s}) \exp (-j k c \tau) / (s (\exp (\alpha k) - 1)) dk, \quad (6.60)$$

где  $L_{im} = \partial / \partial s_i \partial / \partial s_m - \delta_{im} \Delta$ ,  $\Delta$  - трехмерный оператор Лапласа.

В подинтегральном выражении в (6.60) разложим функцию:  $(\exp(\alpha k) - 1)^{-1}$ , в ряд по биному Ньютона [21]. Почленное интегрирования по  $k$  в полученном выражении даст:  $B_{im}(\mathbf{s}, \tau) = (c h' / (\pi^2 \varepsilon_0)) L_{im} \sum_{n=1}^{\infty} f(n, \mathbf{s}, \tau)$ , где  $f(n, \mathbf{s}, \tau) = [(\alpha n - j c \tau)^2 + s^2]^{-1}$ .

Проводя дифференцирование, определяемое оператором  $L_{im}$ , найдем

$$B_{im}(\mathbf{s}, \tau) = (4 c h' / (\pi^2 \varepsilon_0)) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \delta_{im} f^2 (n, \mathbf{s}, \tau) + 2 (s_i s_m - s^2 \delta_{im}) f^3 (n, \mathbf{s}, \tau) \}. \quad (6.61)$$

Средняя интенсивность теплового излучения  $i$ -ой компоненты поля

$$B_{ii}(0, 0) = (4 c h' / (\pi^2 \varepsilon_0)) \alpha^{-4} \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)^{-4} = (2 c h' / (45 \varepsilon_0)) \pi^2 / \alpha^4, \quad (6.62)$$

где учтено, что  $\zeta(4, 1) = \pi^4 / 90$ ,  $\zeta$  - функция Римана [21],  $\zeta(x, q) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + q)^{-x}$ .

Показатель пространственно - временной когерентности поля теплового излучения черного тела ( $\gamma_{im}(\mathbf{s}, \tau) = B_{im}(\mathbf{s}, \tau) / (B_{ii}(0, 0) B_{mm}(0, 0))^{1/2}$ ) с учетом (6.61) и (6.62) выражается как

$$\gamma_{im}(\mathbf{s}, \tau) = 90 (\alpha / \pi)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \{ \delta_{im} f^2 (n, \mathbf{s}, \tau) + 2 (s_i s_m - s^2 \delta_{im}) f^3 (n, \mathbf{s}, \tau) \}. \quad (6.63)$$

Проанализируем когерентные свойства поля теплового излучения черного тела. Из (6.63) выражаем комплексный показатель временной когерентности поля

$$\gamma_{im}(0, \tau) = (90 / \pi^4) \zeta(4, 1 - j c \tau / \alpha) \delta_{im}. \quad (6.64)$$

То есть, колебания разных компонент поля полностью некогерентны между собой:  $\gamma_{im}(0, \tau) = 0$  при  $i \neq m$ . Колебания каждой выделенной компоненты поля частично когерентны, причем:  $\gamma_{11}(0, \tau) = \gamma_{22}(0, \tau) = \gamma_{33}(0, \tau)$ . Из анализа (6.64) следует, что время когерентности для каждой из трех компонент поля:  $\tau_k = \hbar' / (kT)$ , оказывается порядка среднего периода колебаний поля излучения. Показатель пространственной когерентности поля определяется из (6.63) как

$$\gamma_{im}(s, 0) = (90 / \pi^4) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \delta_{im} [n^2 + (s/\alpha)^2]^{-2} + 2\alpha^{-2} (s_i s_m - s^2 \delta_{im}) [n^2 + (s/\alpha)^2]^{-3} \}. \quad (6.65)$$

Функция (6.65) является вещественной, что согласуется с предположением об однородности и изотропности поля излучения черного тела. Анализ (6.65) дает оценку радиусов продольной  $(s_k)_{||}$  и поперечной  $(s_k)_{\perp}$  корреляции поля (по отношению к выделенному направлению в пространстве):  $(s_k)_{||} = (s_k)_{\perp} = 2\hbar' c / (kT)$ . Как и для случая временной когерентности, из (6.65) имеем:  $\gamma_{im}(s, 0) = 0$  при  $i \neq m$  и  $\gamma_{11}(s, 0) = \gamma_{22}(s, 0) = \gamma_{33}(s, 0)$ . Заключаем, что поле теплового излучения черного тела - совокупность неограниченного числа (в неограниченной среде) случайных плоских волн (6.57), статистически не связанных друг с другом. Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, такой суперпозиции соответствует гауссовская статистика. Функция же распределения интенсивности теплового излучения черного тела - экспоненциальная.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1976, ч. 1. Случайные процессы.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
3. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
5. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Советское радио, 1971.
7. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
8. Левин Б.В. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
9. Шумы в электронных приборах / Под ред. Л. Смуллина и Г. Хауса. Л.: Энергия, 1964.
10. Черенкова Е.Л., Чернышев О.В. Распространение радиоволн. М.: Радио и связь, 1984.
11. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. М.: Мир, 1989.
12. Радиотехнические системы передачи информации / Под ред. В.В. Калмыкова. М.: Радио и связь, 1990.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие в 10 т. Т. 4 / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
14. Клышко Д.Н. Фотоны и нелинейная оптика. М.: Наука, 1980.
15. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
16. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974.
17. Горбачев Г.Н., Чаплыгин Е.Е. Промышленная электроника / Под ред. В.А. Лабунцова. М.: Энергоатомиздат, 1988.
18. Тарасенко Ф.П. Введение в курс теории информации. Изд-во Томского ГУ, Томск, 1963.
19. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов. М.: Советское радио, 1979.
20. Лоудон Р. Квантовая теория света / Под ред. Г.В. Скороцкого. М.: Мир, 1976.
21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973.
22. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970.
23. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976.
24. Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Советское радио, 1979.
25. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978, ч. 2. Случайные поля.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	3
1. Измерение и анализ характеристик случайных процессов . . . . .	6
1.1. Обнаружение сигнала на фоне шума . . . . .	6
1.2. Измерение случайных процессов . . . . .	7
1.3. Цифровая обработка случайных процессов . . . . .	11
2. Модели случайных импульсных процессов . . . . .	13
2.1. Случайный одиночный импульс . . . . .	13
2.2. Квазипериодические импульсные процессы . . . . .	14
2.3. Случайные импульсные последовательности . . . . .	15
2.4. Дробовой шум . . . . .	17
2.5. Фотоотсчеты в случайном световом поле . . . . .	18
3. Модели случайных непрерывных процессов . . . . .	21
3.1. Случайные узкополосные процессы . . . . .	21
3.2. Случайные диффузионные процессы . . . . .	24
3.3. Колебания, модулированные шумом . . . . .	27
4. Случайные процессы в линейных радиосистемах . . . . .	32
4.1. Статистика случайных процессов . . . . .	32
4.2. Фильтрация шума избирательными системами . . . . .	33
4.3. Установление шумовых колебаний . . . . .	34
4.4. Распределение вероятностей на выходе системы . . . . .	35
4.5. Тепловые шумы . . . . .	37
4.6. Выделение сигнала из шума . . . . .	40
5. Случайные процессы в нелинейных и параметрических радиосистемах . . . . .	46
5.1. Нелинейное преобразование сигналов . . . . .	46
5.2. Амплитудное детектирование шума . . . . .	48
5.3. Измерение слабых шумов . . . . .	50
5.4. Параметрическое усиление и преобразование частоты . . . . .	51
5.5. Флуктуации и шумы в автоколебательных системах . . . . .	55
6. Случайные волны . . . . .	63
6.1. Случайные поля в физике и технике . . . . .	63
6.2. Интерференция случайных волн . . . . .	63
6.3. Распространение случайных волн . . . . .	68
6.4. Дифракция случайных волн . . . . .	71
6.5. Рассеяние волн в случайно неоднородных средах . . . . .	76
6.6. Статистика теплового излучения . . . . .	78
Список рекомендуемой литературы . . . . .	
81	