

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.В.ШИХОВЦЕВ

В.П.ЯКУБОВ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА

Новосибирск
2011

УДК 537.86:519.2(075)
ББК 3-841я73-2
Ш 653

Шиховцев И.В., Якубов В.П.

Статистическая радиофизика. Курс лекций / Новосиб. гос. ун-т.
Новосибирск, 2011. 157 с.

Данный курс лекций читается студентам физического факультета НГУ на кафедре радиофизики.

В учебном пособии изложены основные сведения из теории случайных процессов, представлены примеры, позволяющие лучше понять предмет статистической радиофизики. На основе данного пособия читаются лекции студентам физического факультета НГУ на кафедре радиофизики.

Учебное пособие может быть использовано для подготовки радиофизиков – студентов и аспирантов, может быть полезно преподавателям, научным сотрудникам и инженерам других направлений.

Авторы:

кандидат физ.-мат. наук Шиховцев Игорь Владимирович
доктор физ.-мат. наук Якубов Владимир Петрович

Издание подготовлено в рамках реализации *Программы развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет»* на 2009–2018 годы.

© Новосибирский государственный
университет, 2011

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ВВЕДЕНИЕ: ПРЕДМЕТ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОФИЗИКИ.....	7
ГЛАВА 1. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И МЕТОДЫ ИХ ОПИСАНИЯ....	10
1.1. Понятие случайного процесса	10
1.2. Функция и плотность распределения	12
1.3. Средние значения и моменты случайных величин.....	14
1.4. Корреляционная функция	17
1.5. Стационарные случайные процессы.....	19
1.6. Характеристическая функция	23
1.7. Разложение характеристической функции	24
1.8. Спектральная плотность. Формулы Винера – Хинчина	26
1.9. Белый шум.....	28
1.10. Эргодическое свойство случайных процессов	30
1.11. Дисперсия временного среднего. Выбор времени усреднения	31
ГЛАВА 2. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	36
2.1. Нормальные процессы	36
2.1.1. Характеристическая функция и плотность распределения.....	36
2.1.2. Центральная предельная теорема.....	39
2.1.3. Свойства нормального случайного процесса	41
2.1.4. Условная плотность нормального распределения. Предсказание случайных процессов	42
2.1.5. Распределение Релея.....	45
2.2. Марковские случайные процессы.....	47
2.2.1. Уравнение Смолуховского	48
2.2.2. Нормальные марковские случайные процессы	49
2.2.3. Диффузионные процессы. Уравнения Колмогорова.....	51
2.2.4. Процессы с независимыми приращениями.....	60
2.2.5. Белый шум и винеровский процесс	61
2.3. Дробовой шум	63
2.3.1. Распределение Пуассона.....	63
2.3.2. Пуассоновский поток дельта-импульсов.....	66
2.3.3. Модель дробового шума	67
2.3.4. Среднее значение и функция корреляции дробового шума.....	69
2.3.5. Энергетический спектр дробового шума. Формула Шоттки ...	69
2.4. Тепловой шум	72
2.5. Шумы приемных антенн.....	76
2.6. Фликер-шум	78

ГЛАВА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ.....	80
3.1. Основные соотношения из теории цепей.....	80
3.2. Линейная фильтрация.....	83
3.3. Интегральные характеристики линейного фильтра.....	84
3.4. Преобразование белого шума линейным фильтром.....	84
3.5. Нормализация случайного процесса.....	86
3.6. Корреляция шумов на выходе линейных систем.....	87
3.7. Вероятностная сходимостъ случайной функции.....	91
3.8. Условие непрерывности случайных процессов.....	93
3.9. Условия дифференцируемости случайных процессов.....	94
3.10. Свойства производной случайного процесса.....	95
ГЛАВА 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ.....	100
4.1. Корреляционная функция на выходе плавных нелинейностей. Двусторонний квадратичный детектор.....	100
4.2. Корреляционная функция на выходе кусочно-ломаных нелинейностей.....	102
4.3. Корреляционная функция на выходе предельного ограничителя.....	105
4.4. Корреляционная функция на выходе одностороннего линейного детектора.....	106
4.5. Корреляционная функция на выходе двустороннего линейного детектора.....	107
4.6. Энергетический спектр на выходе нелинейного элемента.....	108
4.7. Вероятность распределения на выходе нелинейного элемента....	110
4.7.1. Взаимооднозначное преобразование.....	110
4.7.2. Двусторонний квадратичный детектор.....	112
4.7.3. Односторонний квадратичный детектор.....	113
4.8. Анализ работы автогенератора при наличии шума.....	114
4.8.1. Уравнение генератора.....	114
4.8.2. Решение уравнения методом линеаризации.....	117
4.8.3. Характеристики фазы и амплитуды.....	118
4.8.4. Спектральная плотность колебания.....	119
ГЛАВА 5. УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ.....	122
5.1. Функция корреляции узкополосного случайного процесса.....	122
5.2. Аналитический сигнал.....	124
5.3. Корреляционная функция сопряженного процесса.....	126
5.4. Взаимная корреляция сопряженных процессов.....	126
5.5. Корреляционные свойства квадратурных составляющих.....	127

5.6. Распределение огибающей и фазы нормального узкополосного шума	128
5.7. Распределение огибающей смеси сигнала и узкополосного нормального шума	131
5.8. Распределение фазы смеси сигнала с шумом	133
5.9. Теорема Котельникова	134
ГЛАВА 6. ПРИЕМ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ ШУМОВ	137
6.1. Оптимальный фильтр.....	137
6.2. Согласованный фильтр	140
6.3. Корреляционный прием	142
6.4. Отношение правдоподобия и обнаружение сигнала	145
6.5. Критерии обнаружения	146
6.5.1. Критерии максимального правдоподобия и идеального наблюдателя	146
6.5.2. Критерий Неймана – Пирсона	149
ГЛАВА 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ	151
7.1. Количественное определение информации.....	151
7.2. Средняя собственная и взаимная информация.....	153
7.3. Свойства средней собственной и взаимной информации.	154
7.4. Пропускная способность канала. Теорема Шеннона о помехоустойчивом кодировании.	155

Предисловие

На основе данного учебного пособия читаются лекции студентам физического факультета Новосибирского государственного университета на кафедре радиофизики.

Основой настоящей книги послужило учебное пособие для студентов высших учебных заведений «Статистическая радиофизика», написанное В.П.Якубовым, профессором, доктором физико-математических наук, зав. кафедрой радиофизики Томского государственного университета. Многолетний опыт преподавания курса статистической радиофизики позволил великолепно отразить материал с точки зрения курса лекций для студентов. В результате частичной переработки, дополнения материала и введения в курс решений задач возникла эта книга. Последнее наиболее важно, поскольку с рассмотрением решения практических задач усвоение студентами материала наиболее эффективно. На протяжении всего курса по всем рассматриваемым вопросам даются ссылки на использованную литературу.

Во введении кратко рассмотрен вопрос предмета статистической радиофизики. В первой части курса рассмотрены основы теории случайных процессов, во второй приведены модели случайных процессов, в третьей и четвертой рассмотрены вопросы преобразования случайных процессов в линейных и нелинейных системах, в пятой – узкополосные случайные процессы, в шестой – прием сигналов в условиях шумов, в последней представлены элементы теории информации.

Шиховцев И.В.

Введение: Предмет статистической радиофизики

Предметом изучения статистической радиофизики является описание флуктуационных явлений в радиофизике.

Как известно, *флуктуациями* называются случайные отклонения макроскопических величин от их средних (в частности, термодинамически равновесных) значений [3]. Существование таких отклонений связано с наличием у всякой макроскопической системы огромного числа степеней свободы, если не *макроскопических* (как, например, у распределенных систем), то уж во всяком случае *микроскопических*, обусловленных в конечном счете атомизмом вещества и электричества. Эта общая основа флуктуационных явлений допускает самые разнообразные механизмы их возникновения.

Флуктуации, связанные с атомизмом, могут быть обусловлены, например,

1) Тепловым движением микрочастиц (в том числе микрочастиц, т.е. электронов, ионов и т.п.). Сюда относятся *тепловые флуктуации* самых различных макровеличин, таких, как плотность, давление, температура, ток, напряжение, напряженности макроскопических электромагнитных полей и т.д. С тепловыми флуктуациями связаны броуновское движение, молекулярное рассеяние света в среде, тепловые шумы в радиотехнике и радиофизике, тепловое излучение тел и многие другие явления.

2) Случайными вариациями числа частиц в электронных потоках при термо- и фотоэмиссии – так называемый *дробовой эффект*, непосредственно обусловленный дискретностью микроскопических носителей заряда.

3) Неравномерностью процессов генерации и рекомбинации носителей тока в полупроводниковых приборах.

4) Случайными локальными вариациями эмиссионных свойств поверхности катодов (*эффект мерцания*).

5) Хаотичностью в процессе перемагничивания доменов в ферромагнитных сердечниках, находящихся в изменяющемся магнитном поле (*магнитные шумы*, эффект Баркгаузена).

К флуктуационным явлениям, которые связаны с наличием множества макроскопических степеней свободы, относятся такие процессы, как турбулентность среды – земной тропосферы и ионосферы, солнечной короны, межпланетной и межзвездной среды.

Попытаемся очертить область, которая относится к области радиофизики.

Радиофизика – раздел физики, включающий в себя изучение и применение электромагнитных колебаний практически всех частот. Основной

предмет исследования радиофизики – это радиоволны, а именно их взаимодействия со средой и объектами, движение радиоволн в неравновесных средах и системах. Радиофизика охватывает всю проблематику, касающуюся излучения и регистрации радиоволн, их распространения и взаимодействия в неравновесных средах и системах, обратные волновые задачи дистанционной диагностики. Радиофизика, как наука, предлагает радиотехнике знания и методы, используемые для разработки таких устройств как приёмные и передающие антенны, генераторы электромагнитных волн и приёмники, усилители и фильтры, модуляторы и демодуляторы, радиоволноводы, радиолокаторы, квантовые устройства и т.д.

Частоты, с которыми оперирует радиофизика, лежат в диапазоне от десятков герц до десятков терагерц. В последнее время задачи радиофизики вмещают в себя задачи смежных наук, таких как оптика или акустика, включая в себя тем самым весь спектр колебательных частот до ультрафиолета включительно.

Обычно к радиофизике относят радиоастрономию, радиоспектроскопию, электронику и электродинамику СВЧ, а также исследование электромагнитных свойств вещества, в особенности полупроводников, ферритов, плазмы и т.д. Но уже из этого перечня видно, что определение предмета радиофизики путем перечисления ее составных частей представляет собой довольно сложное дело.

Можно выделить основные два направления, которые позволяют уточнить предмет радиофизики на каждом этапе ее развития:

1) *Изучение физических явлений, существенных для радиосвязи* – генерации электромагнитных сигналов, излучения и распространения электромагнитных волн, приема радиосигналов.

2) *Изучение методами и средствами радиотехники* самых разнообразных физических объектов – атомных ядер, молекул, живых организмов, атмосферы, небесных тел и т.д.

Из такого понимания радиофизики естественным образом обрисовывается область *статистической радиофизики*.

К статистическим явлениям при генерации электромагнитных сигналов относятся в первую очередь флуктуации в автоколебательных системах и связанные с ними вопросы о немонохроматичности автоколебаний, о стабильности частоты и точности ее измерения (а значит, и точности измерения времени).

При распространении радиоволн нас интересуют случайные тепловые и турбулентные неоднородности среды, поскольку они вызывают рассеяние радиоволн, случайные пульсации рефракции, колебания интенсивности и фазы волны в месте приема. Сюда же относится и вопрос о влиянии случайных неоднородностей в фидерах, если волны распространяются не свободно, а по направляющим линиям. Одной из важных статистических за-

дач, относящихся к излучению радиоволн, является вопрос о роли случайных неоднородностей в сложных антенных системах.

Наконец, при приеме любого вида радиосигналов чрезвычайно существенны шумы в приемных и измерительных устройствах, трансформация внешних и внутренних шумов при разного рода преобразованиях сигнала в аппаратуре, вопрос о помехоустойчивости приемных систем и т.д.

В связи со всем вышесказанным возникает ряд вопросов: как описываются случайные процессы в радиоустройствах, как преобразуются случайные процессы различными линейными и нелинейными цепями, какова физическая природа и статистические характеристики шумов в радиоаппаратуре, как влияют шумы на работу автоколебательных систем?

Вместе с базовым минимумом теоретических знаний некоторые из этих радиофизических вопросов рассмотрены в данном курсе.

Глава 1. Случайные процессы и методы их описания

1.1. Понятие случайного процесса

В отличие от детерминированных процессов, течение которых определено однозначно, *случайный процесс* (СП) представляет изменения во времени физической системы, которые заранее предсказать невозможно [6]. Течение случайного процесса может быть различным в зависимости от случая и определена вероятность того или иного его течения.

Наиболее известным примером случайного процесса (СП) являются флуктуационные (дробовые и тепловые) шумы в радиотехнических устройствах. При наблюдении шумового напряжения на выходах идентичных приборов обнаруживается, что функции, описывающие во времени эти напряжения, различны. Задача теории случайных процессов заключается в отыскании вероятностных закономерностей, которые связывают эти различные функции, описывающие одно и то же физическое явление (например, флуктуационный шум).

Количественно случайный процесс описывается *случайной функцией* времени $\xi(t)$, которая в любой момент времени t может принимать различные значения с заданным распределением вероятностей. Таким образом, для любого $t = t_i$ и значение $\xi_i = \xi(t_i)$ является случайной величиной. Случайный процесс (случайная функция времени) определяется совокупностью функций времени и законами, характеризующими свойства совокупности.

Каждая из функций этой совокупности называется *реализацией случайного процесса*. Реализация случайной функции $\xi(t)$ обозначается через $\xi_i(t)$, где параметр i может быть любым действительным числом. Детерминированный процесс имеет одну единственную реализацию, описываемую данной функцией времени.

Таким образом, случайный процесс – это не одна функция (в классическом понимании), а, в общем случае, бесконечное множество реализаций (*ансамбль реализаций*). В этом смысле случайная функция есть некая обобщенная функция. Нельзя изобразить случайный процесс одной кривой, пусть даже очень замысловатой. Можно изобразить лишь отдельные его реализации. На рис.1 в качестве примера изображены реализации случайного процесса и сечение.

В зависимости от того, принадлежат ли возможные значения времени t и реализации $\xi(t)$ дискретному множеству чисел или отрезку (а может быть и всей) действительной оси, различают четыре типа случайных процессов:

1) *случайный процесс общего типа*: t и $\xi(t)$ могут принимать любые значения на отрезке (или, быть может, на всей) действительной оси;

2) *дискретный случайный процесс*: t непрерывно, а величины $\xi(t)$ дискретны;

3) *случайная последовательность общего типа*: t дискретно, а $\xi(t)$ может принимать любые значения на отрезке (или на всей) действительной оси;

4) *дискретная случайная последовательность*: t и $\xi(t)$ оба дискретны.

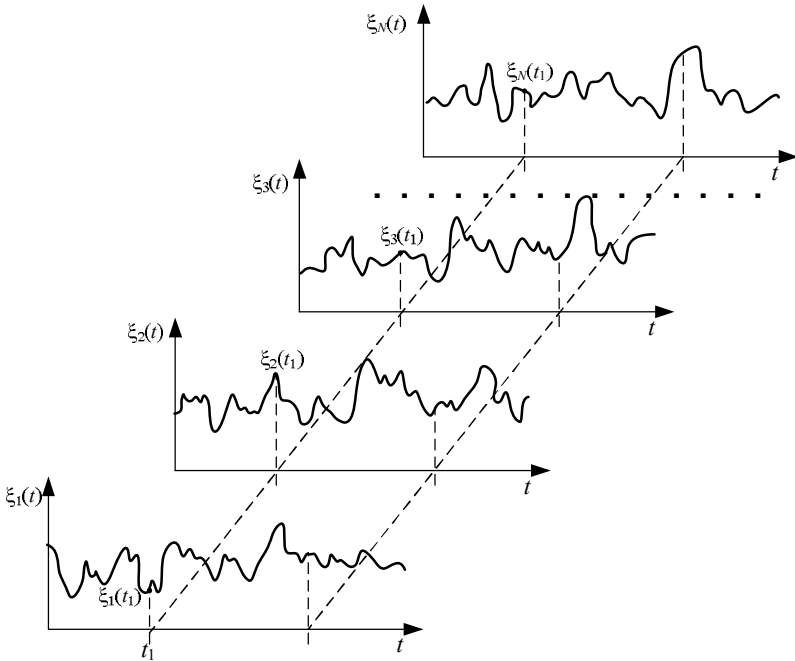


Рис. 1. Ансамбль реализаций и сечение случайного процесса [10]

Итак, как можно описать бесконечное множество функций – реализаций случайного процесса? В основе такого описания лежит теория распределений, или теория вероятностей. Начнем с определения понятия о сечении случайного процесса.

Сечением СП в момент времени $t = t_1$ называется множество его значений во всех реализациях $\xi(t_1) = \{\xi_n(t_1)\}$. По сути дела, это и есть однопараметрическое семейство случайных величин в разные моменты времени. Множество всевозможных сечений случайного процесса и есть сам этот процесс [1].

Договоримся случайные величины обозначать буквами греческого алфавита, а их конкретные реализации – буквами латинского алфавита.

1.2. Функция и плотность распределения

Статистической характеристикой случайной величины служит интегральный закон ее распределения

$$F(x; t) = P(\xi(t) \leq x),$$

определяющий вероятность того, что случайная величина ξ не превзойдет значение x . $F(x; t)$ называется *функцией распределения вероятностей* СП.

Свойства функции распределения:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, при $-\infty < x < \infty$.
2. $F(x = \infty) = 1$, $F(x = -\infty) = 0$ – условия нормировки.
3. $F(x)$ – неубывающая функция.

Пусть $x_2 > x_1$. Тогда

$$P(\xi \leq x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 < \xi \leq x_2).$$

Так как вероятность не может быть отрицательной величиной, то

$$F(x_2) \geq F(x_1)$$

4. $P(x_1 < \xi \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Введенная таким образом функция распределения $F(x)$ является вещественной функцией, которая всегда положительная и неубывающая. Кроме того, для реальных процессов эта функция непрерывна и дифференцируема.

В качестве вероятностной характеристики случайной величины удобно использовать дифференциальный закон распределения или закон распределения плотности вероятности:

$$f(x; t) = \frac{\partial}{\partial x} F(x; t).$$

Величина

$$f(x)\Delta x \approx F(x + \Delta x) - F(x) = P\{x \leq \xi \leq x + \Delta x\}$$

представляет собой вероятность того, что случайная величина лежит в диапазоне возможных значений между x и $x + \Delta x$; $f(x, t)$ имеет смысл вероятности попадания значений процесса в единичный интервал вблизи заданного значения x .

Основные свойства плотности распределения вероятностей:

- 1) $0 \leq f(x) \leq \infty$
- 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, f(x = \pm\infty) = 0$
- 3) $F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx$
- 4) $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = P(x_1 \leq \xi \leq x_2)$

Сказанное иллюстрирует рис.2. Примеры функций распределения и плотностей распределения представлены на рис.3.

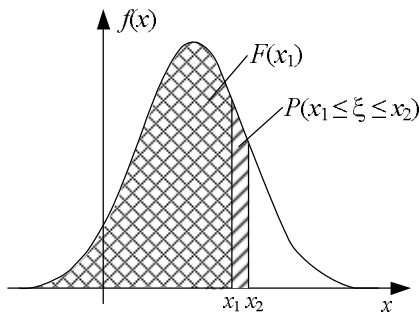


Рис.2. Функция распределения и плотность распределения

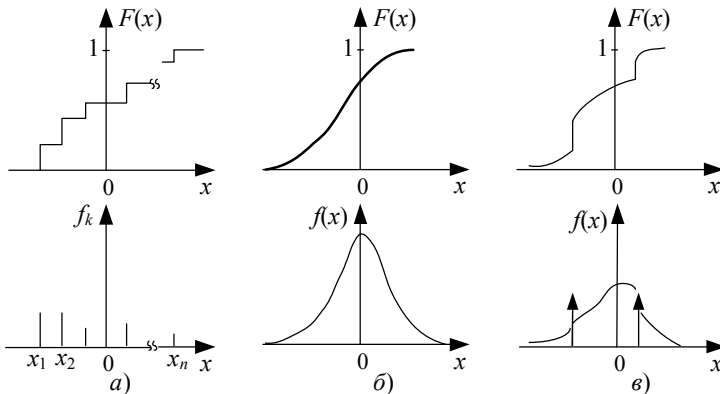


Рис.3. Примеры функций распределения и плотностей распределения вероятностей дискретной (а), непрерывной (б) и смешанной (в) случайной величины [9]

Стоит обратить внимание, что плотность распределения вероятностей для дискретной случайной величины представляет собой совокупность δ -функций, площадь каждой из которых равняется соответствующему скачкообразному приращению функции распределения вероятностей.

В случае использования двух и более сечений СП используются многомерные функция и плотность распределения:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n),$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Для краткости будут использоваться векторные обозначения:

$$f(\underline{x}; \underline{t}) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n).$$

1.3. Средние значения и моменты случайных величин

Среднее значение функции времени определяется ее интегрированием на некотором интервале времени, а затем делением полученной величины на продолжительность этого интервала. Средние по времени значения важны при рассмотрении случайных функций времени, но говорить о среднем одиночного значения случайной величины не имеет смысла, поскольку оно определяется как мгновенное значение.

Для определения среднего значения случайной величины нужно интегрирование по времени заменить интегрированием по диапазону возможных значений, которые она может принимать. Такая операция называется *усреднением по ансамблю*:

$$\langle \xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; t) dx. \quad (1.1)$$

Здесь и далее угловые скобки обозначают операцию статистического усреднения, т.е. операцию усреднения по ансамблю.

Величины средних по ансамблю реализаций для любых степеней СП называются *начальными моментами* n -го порядка:

$$m_n(t) \equiv \langle \xi^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x; t) dx$$

Центральные моменты n -го порядка определяются как

$$M_n(t) \equiv \langle \delta \xi^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle \xi(t) \rangle)^n f(x; t) dx$$

и представляют собой моменты для центрированного процесса

$$\delta \xi(t) \equiv \xi(t) - \langle \xi(t) \rangle$$

Самыми важными являются следующие моменты.

Начальный момент 1-го порядка, равный среднему значению. Из формулы (1.1) следует, что если интерпретировать $f(x)$ как плотность массы, распределенной вдоль оси x , то m_1 – абсцисса центра тяжести этой массы. Также эта величина называется *математическим ожиданием*.

Во многих практических случаях математическое ожидание случайной величины равно среднему по времени значению любой из выборочных

функций, относящихся к случайному процессу, к которому принадлежит рассматриваемая случайная величина. В таких ситуациях нахождение математического ожидания изменяющихся случайным образом напряжения или тока эквивалентно определению их постоянных составляющих.

Начальный момент 2-го порядка, равный среднему квадрату случайной величины:

$$m_2(t) \equiv \langle \xi^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x;t) dx$$

Средний квадрат интерпретируется как усредненный по времени квадрат случайного напряжения или тока.

Средний квадрат пропорционален средней мощности, выделяющейся на активном сопротивлении. $\sqrt{\langle \xi^2(t) \rangle}$ – эффективное значение напряжения или тока.

Первый центральный момент всегда равен нулю

$$M_1(t) = 0.$$

Второй центральный момент называется *дисперсией*

$$\sigma^2(t) = M_2(t),$$

которая характеризует интенсивность флуктуаций СП. $\sigma(t)$ – называется *стандартным* или *среднеквадратическим отклонением*.

Также дисперсию можно определить и по-другому

$$\sigma^2 = M_2 = \langle \delta \xi^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2.$$

В электрических схемах дисперсия, как правило, соотносится со средней мощностью, выделяемой на активном сопротивлении переменной составляющей приложенного к нему напряжения или протекающего в нем тока. Корень квадратный из дисперсии в этом случае будет соответствовать показаниям вольтметра или амперметра, стрелки которых отклоняются на угол, пропорциональный эффективному значению переменной составляющей тока или напряжения, и которые не реагируют на постоянную составляющую (например, вследствие того, что на входе прибора установлен разделительный конденсатор).

Третий центральный момент может служить критерием оценки для асимметрии закона распределения относительно оси, параллельной оси ординат и проходящей через среднее значение случайной величины. Часто пользуются понятием *коэффициента асимметрии*

$$\gamma_1 = \frac{M_3}{\sqrt{M_2^3}} = \frac{M_3}{\sigma^3}.$$

На рис.4 приведены две кривые плотности вероятности. Первая из них имеет более пологий спад справа от среднего значения и в выражении M_3 кубы положительных отклонений превышают кубы отрицательных, так что коэффициент γ_1 будет положительный. В таких случаях говорят, что плотность вероятности обладает положительной асимметрией. Если коэффициент γ_1 отрицателен, то говорят об отрицательной асимметрии. В этом случае длинная часть кривой расположена слева от среднего значения.

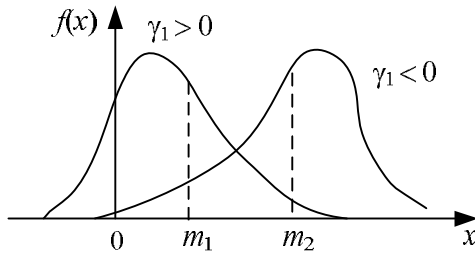


Рис.4. Две асимметричные плотности вероятности [2]

Четвертый центральный момент. Иногда используют численную характеристику «сглаженности» кривой распределения около *моды* (максимального значения) – *коэффициент эксцесса*:

$$\gamma_2 = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3.$$

Этот коэффициент дает возможность сравнивать «характер вершины» данной кривой распределения с аналогичной особенностью нормального (гауссовского) распределения (рис.5).

$\gamma_2 = 0$ у нормального закона распределения.

$\gamma_2 > 0$ кривая плотности вероятности в окрестности максимума имеет более высокую и более острую вершину, чем нормальная плотность вероятности.

$\gamma_2 < 0$ указывает на более низкий и более плоский характер вершины по сравнению с нормальной кривой.

В первом случае говорят о положительном, а во втором – об отрицательном эксцессе.

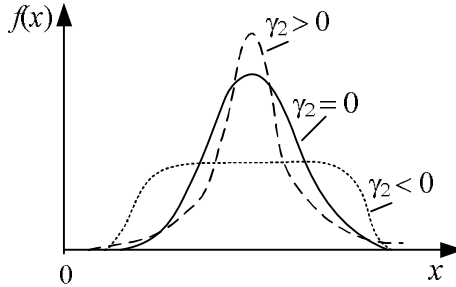


Рис. 5. Плотности вероятности с различными значениями эксцесса [2]

Значения γ_1, γ_2 часто используются, чтобы характеризовать степень отличия данного распределения от нормального.

При использовании двух сечений в моменты времени t_1 и t_2 используют понятия *смешанных начальных и центральных* моментов [1]:

$$m_{n,m}(t_1, t_2) \equiv \langle \xi^n(t_1) \xi^m(t_2) \rangle,$$

$$M_{n,m}(t_1, t_2) \equiv \langle \delta \xi^n(t_1) \delta \xi^m(t_2) \rangle.$$

Порядок момента определяется суммой $n + m$.

Мерность моментов определяется числом используемых сечений.

1.4. Корреляционная функция

Задание одномерной плотности распределения вероятности не дает возможность определить характер изменения случайного процесса во времени и не характеризует взаимосвязь случайного процесса в различные моменты времени. Для этого вводят понятие двумерной плотности распределения вероятности $f(x_1, x_2; t_1, t_2)$, описывающей связь двух значений $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ в произвольные моменты времени t_1 и t_2 . С помощью двумерной плотности распределения вероятности можно определить *корреляционную функцию* (КФ), которая является вторым смешанным центральным моментом [1]:

$$K(t_1, t_2) \equiv M_{1,1}(t_1, t_2) = \langle \delta \xi(t_1) \delta \xi(t_2) \rangle =$$

$$= \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle - \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle = m_{1,1}(t_1, t_2) - m_1(t_1) m_1(t_2) \quad (1.2)$$

Для количественной характеристики зависимости случайных функций вводится нормированная корреляционная функция, которая называется коэффициентом корреляции

$$R(t_1, t_2) \equiv \frac{K(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}.$$

Если случайные функции связаны детерминированной линейной зависимостью, то коэффициент корреляции между ними в любой момент времени равен ± 1 . Если независимы – равен нулю. Пример будет представлен в следующем параграфе.

В большинстве радиотехнических задач встречаются коэффициенты корреляции в виде монотонно убывающих функций или в виде осциллирующих затухающих функций [2]. Время затухания или время корреляции определяется как

$$\tau_0(t_1) = \int_0^{\infty} R(t_1, t_2) dt_2.$$

Геометрически время корреляции равно основанию прямоугольника с высотой $R(t_1 = t_2) = 1$, имеющему ту же площадь, что и площадь, заключенная между кривой $R(t_1, t_2)$ при $t > 0$ и осью абсцисс (рис.6). Величина τ_0 дает ориентировочное представление о том, на каком интервале времени в среднем имеет место коррелированность между значениями случайного процесса.

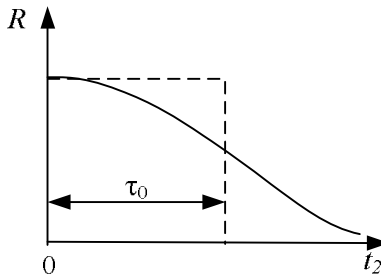


Рис.6. Определение времени корреляции

Основные свойства КФ [1]:

1. Равенство нулю для статистически независимых значений случайного процесса. Это следует из того, что

$$m_{1,1}(t_1, t_2) = m_1(t_1)m_1(t_2)$$

2. Симметричность КФ относительно своих аргументов:

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1)$$

3. Ограниченность КФ:

$$|R(t_1, t_2)| \leq 1.$$

Для доказательства достаточно рассмотреть следующую заведомо положительную величину:

$$\left\langle \left[\frac{\delta \xi(t_1)}{\sigma(t_1)} \pm \frac{\delta \xi(t_2)}{\sigma(t_2)} \right]^2 \right\rangle = 2(1 \pm R(t_1, t_2)) \geq 0.$$

4. Положительная определенность. Для КФ она заключается в том, что для любой детерминированной вещественной функции $g(t)$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1)g(t_2)K(t_1, t_2)dt_1dt_2 \geq 0.$$

Это неравенство является прямым следствием усреднения следующей заведомо положительной величины:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \left[\int_{-T}^T g(t)\delta \xi(t)dt \right]^2 \right\rangle \geq 0.$$

1.5. Стационарные случайные процессы

Случайный процесс называется стационарным, если одномерная плотность распределения вероятности и, следовательно, среднее значение и дисперсия случайного процесса не зависят от времени, а двумерная плотность распределения вероятности и корреляционная функция зависят только от разности временных аргументов.

Если многомерный закон распределения вероятностей распределения мгновенных значений, взятых в разные моменты времени, не зависят от принятого начала отсчёта, а зависят только от интервалов между выбранными моментами

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau),$$

то такой процесс стационарен в узком смысле.

Если независимость от начала отсчёта выполняется только до второго (корреляционного) момента (включая первый), то такой процесс называют стационарным в широком смысле. Его среднее значение не зависит от времени, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

Все строго стационарные процессы – стационарны и в широком смысле, но не все процессы, стационарные в широком смысле, строго стационарны.

Свойства стационарных СП [1]:

1. Характеристики стационарного СП зависят только от интервалов между временными сечениями:

$$\tau_1 = t_1 - t_2, \quad \tau_2 = t_3 - t_2, \quad \dots, \quad \tau_{n-1} = t_n - t_{n-1}.$$

Для стационарного в широком смысле СП имеет место зависимость только от разности времен $\tau = t_2 - t_1$.

$$K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(\tau)$$

2. Одномерные характеристики СП не зависят от времени:

$$\langle \xi(t) \rangle = \text{const}, \quad \sigma^2(t) = \text{const}, \quad \tau_0 = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \text{const}.$$

3. Корреляционная функция является четной:

$$K(\tau) = K(-\tau).$$

4. Максимальное значение КФ имеет при $\tau = 0$.

$$K(0) = \sigma^2.$$

5. Для многих стационарных случайных процессов выполняется равенство:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0$$

Физически этот результат объясняется тем, что устойчиво работающие системы обычно имеют конечное время затухания (конечное время «памяти»). Поэтому для СП, наблюдаемых в стационарно и устойчиво работающих системах, последующее значение процесса оказывается практически независимым и некоррелированным с предыдущим значением, если они разделены достаточно большим интервалом времени.

Функция корреляции между значениями одного случайного процесса в два разных момента времени называется *автокорреляционной функцией*. Общее определение автокорреляционной функции дается соотношением (1.2), а применительно к стационарным процессам – формулой:

$$K(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle - m_1^2$$

Если имеется два стационарных случайных процесса $\xi(t_1)$ и $\eta(t_2)$ и функция корреляции зависит лишь от разности $\tau = t_2 - t_1$, то процессы называются *стационарно связанными*.

Функция корреляции между значениями разных процессов называется *взаимной корреляционной функцией*.

Для выяснения физического смысла корреляционной функции рассмотрим два частных случая, когда две стационарные случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ независимы или, наоборот, «жестко» связаны [2].

Взаимная функция корреляции:

$$K_{\xi, \eta}(t_1, t_2) = \langle \delta\xi(t_1)\delta\eta(t_2) \rangle = \iint \delta\xi(t_1)\delta\eta(t_2)f(\xi, \eta, t_1, t_2)d\xi d\eta$$

Если случайные функции независимы, то двумерная плотность вероятности равна произведению одномерных:

$$f(\xi, \eta, t_1, t_2) = f(\xi, t_1)f(\eta, t_2)$$

Тогда интеграл распадается на два независимых:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\xi(t_1)f(\xi, t_1)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \delta\eta(t_2)f(\eta, t_2)d\eta = 0.$$

Интегралы равны нулю, так как они представляют собой первые центральные моменты, которые всегда равны нулю.

Пусть случайные функции связаны детерминированной линейной зависимостью $\xi(t) = \pm a\eta(t) + b$, где a и b – постоянные величины. В данном случае центрированный процесс $\xi(t)$ и его дисперсия равны:

$$\begin{aligned} \delta\xi(t) &= \xi(t) - \langle \xi(t) \rangle = \pm a\delta\eta, \\ \sigma_{\xi}^2 &= \langle (\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle)^2 \rangle = a^2\sigma_{\eta}^2. \end{aligned}$$

Тогда для функции взаимной корреляции получим

$$K_{\xi, \eta}(t, t) = \langle \delta\xi(t)\delta\eta(t) \rangle = \pm a\sigma_{\eta}^2 = \pm\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}.$$

Таким образом, если стационарные случайные функции независимы, то функция корреляции между ними равна нулю. Функция взаимной корреляции для линейно связанных случайных функций равна произведению их среднеквадратичных значений, взятому с соответствующим знаком. Поэтому можно сказать, что корреляционная функция дает качественное представление о линейной зависимости между значениями одной или двух случайных функций в выбранные моменты времени.

Пример 1. Найдем среднее значение, корреляционную функцию, дисперсию

$$\xi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A_0 , ω_0 – константы, φ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$.

Плотность вероятности процесса

$$f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq \varphi \leq \pi \\ 0, & \varphi > |\pi| \end{cases}$$

Среднее значение:

$$m_1 = \langle \xi(\varphi, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\varphi, t) f(\varphi) d\varphi = A_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = 0.$$

Корреляционная функция:

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= m_{1,1}(t_1, t_2) - m_1(t_1) \cdot m_2(t_2) = \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle - \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle = \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = \\ &= A_0^2 \langle \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \cos(\omega_0 t_2 + \varphi) \rangle = \frac{A_0^2}{2} \langle \cos(\omega_0(t_1 - t_2)) + \cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi) \rangle = \\ &= \frac{A_0^2}{2} \frac{1}{2\pi} \left[\cos(\omega_0(t_1 - t_2)) \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi) d\varphi \right] = \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega_0(t_1 - t_2)) = \\ &= \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega_0(t_2 - t_1)) = \frac{A_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau, \end{aligned}$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

Дисперсия:

$$\sigma^2(t) = \langle \xi^2(t) \rangle - \langle \xi(t) \rangle^2 = K(t, t) = \frac{A_0^2}{2}.$$

Пример 2. Определить, является ли процесс

$$\xi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

стационарным в широком смысле, если $\omega_0 = \text{const}$, $A_0 \neq \infty$, φ – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$.

Среднее значение, корреляционная функция и дисперсия такого процесса:

$$\langle \xi(\varphi, t) \rangle = \text{const} = 0,$$

$$K(t_1, t_2) = \frac{A_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau,$$

$$\sigma^2 = \frac{A_0^2}{2} < \infty.$$

Таким образом, выполнены все условия стационарности в широком смысле (конечная дисперсия, среднее значение не зависит от времени, корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$).

1.6. Характеристическая функция

Характеристической функцией (ХФ) называют функцию вида

$$\varphi(u; t) = \langle \exp(iu\xi(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f(x; t) dx,$$

где u – произвольный, вещественный параметр.

По своей форме ХФ напоминает преобразование Фурье от плотности распределения вероятностей $f(x; t)$, отличаясь от него отсутствием знака минус перед показателем экспоненты. Это обусловлено математической традицией, а не фундаментальными соображениями, и не приводит к существенным различиям в приложении или свойствах этого преобразования в сравнении с преобразованием Фурье. Записав по аналогии с обратным преобразованием Фурье обратное преобразование от $\varphi(u; t)$, получим выражение для плотности распределения вероятностей:

$$f(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) \varphi(u; t) du. \quad (1.3)$$

Однозначная связь ХФ и плотности распределения означает, что ХФ даёт полное описание СП так же, как и функция распределения.

Например, характеристическая функция гауссовой случайной величины имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \exp\left\{iua - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что характеристическая функция гауссовой случайной величины ξ при $\langle \xi \rangle = a = 0$ является вещественной и четной функцией.

Свойства характеристической функции:

1. Нормировка: $\varphi(u = 0; t) = 1$.
2. Модуль характеристической функции равен или меньше единицы: $|\varphi(u; t)| \leq 1$. Это следует из неравенства

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f(x; t) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x; t) dx = 1.$$

3. $\varphi^*(u; t) = \varphi(-u; t)$, где $\varphi^*(u; t)$ – функция, комплексно сопряженная характеристической функции.
4. Согласованность: $\varphi(u_1, u_2 = 0; t_1, t_2) = \varphi(u_1, t_1)$.

5. Факторизация для независимых значений СП:

$$\varphi(\underline{u}; t) = \prod_i \varphi(u_i; t_i).$$

1.7. Разложение характеристической функции

Одним из видов полезного применения характеристической функции является упрощение вычислений моментов распределения. Если существует n -й начальный момент распределения случайной величины ξ , то характеристическая функция этой величины имеет производную n -го порядка, причём

$$\frac{d^n \varphi(u; t)}{du^n} = i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x; t) \exp(iux) dx,$$

откуда

$$m_n(t) = \left. \frac{\partial^n}{i^n \partial u^n} \right|_{u=0} \varphi(u, t).$$

Разложим $\varphi(u)$ в ряд Тейлора вблизи $u = 0$:

$$\varphi(u; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \varphi(u; t)}{du^n} \right|_{u=0} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} m_n(t).$$

Это выражение называют *разложением характеристической функции по моментам*.

Функция

$$\psi(u; t) = \ln \varphi(u; t)$$

называется кумулянтной функцией случайной величины ξ . Кумулянтная функция является полной вероятностной характеристикой случайной величины, так же, как и $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(u)$. Смысл введения кумулянтной функции заключается в том, что эта функция часто оказывается наиболее простой среди полных вероятностных характеристик. Например, для гауссовой случайной величины

$$\psi(u) = iua - \frac{\sigma^2 u^2}{2}.$$

Кумулянтную функцию можно представить рядом, аналогично соотношению для характеристической функции:

$$\psi(u; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n \ln \varphi(u; t)}{du^n} \right|_{u=0} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \kappa_n(t)$$

или

$$\varphi(u, t) = \exp \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \kappa_n(t) \right\}.$$

Коэффициенты разложения называют кумулянтами:

$$\kappa_n(t) = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \ln \varphi(u, t)}{\partial u^n} \Big|_{u=0}.$$

$\kappa_0(t) = 0$ для любой случайной величины и не является характеристикой случайной величины.

$$\begin{aligned} \kappa_1(t) &= m_1(t) = \langle \xi(t) \rangle, & \kappa_2(t) &= M_2(t) = \sigma^2(t) \\ \kappa_3(t) &= M_3(t), & \kappa_4(t) &= M_4(t) - 3M_2^2(t). \end{aligned}$$

Пример 3. Одномерная плотность вероятностей стационарного случайного процесса имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Определить характеристическую функцию процесса и среднее значение. Характеристическая функция будет равна:

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) f(x) dx = \alpha \int_0^{\infty} \exp(iux - \alpha x) dx = \frac{\alpha}{\alpha - iu}.$$

Производная характеристической функции при $u = 0$ будет $\varphi'(0) = \frac{i}{\alpha}$.

Следовательно, среднее значение определится как

$$m_1 = \frac{\varphi'(0)}{i} = \frac{1}{\alpha}.$$

С помощью характеристической функции удобно также находить плотность вероятности случайной величины, подвергнутой функциональному преобразованию. Если удастся вычислить преобразование Фурье, то поставленная задача будет решена.

Пример 4. Пусть $\xi(\alpha) = A_0 \cos(\alpha)$, $A_0 = \text{const}$, α – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-\pi, \pi]$ [4].

Плотность вероятности процесса $f(\alpha) = 1/2\pi$.

Характеристическая функция:

$$\varphi(u, \alpha) = \langle \exp(iu\xi(\alpha)) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(iuA_0 \cos \alpha) d\alpha = J_0(uA_0),$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом.

Используя табличный интеграл, получим

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(uA_0) \exp(-iu\xi) du = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{A_0^2 - \xi^2}}, & |\xi| \leq A_0 \\ 0, & |\xi| > A_0. \end{cases}$$

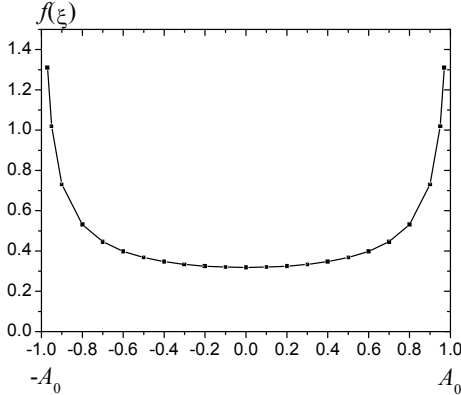


Рис. 7. Плотность вероятности

Вид графика плотности вероятности (рис. 7) связан с тем, что если выполнить большую серию опытов, каждый раз случайным образом выбирая значения α из указанной области, то величина $A_0 \cos(\alpha)$ чаще будет принимать значения, близкие к $\pm A_0$, нежели близкие к нулю.

1.8. Спектральная плотность. Формулы Винера–Хинчина

Введем важное понятие *спектральной плотности* (интенсивности) $W(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$, которая связана с автокорреляционной функцией преобразованием Фурье [2]:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (1.4)$$

На основании обратного преобразования Фурье можем написать

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega. \quad (1.5)$$

Положив здесь $\tau = 0$, получим выражение для дисперсии:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega. \quad (1.6)$$

Если понимать под $\xi(t)$ флуктуационный ток (напряжение), то величину σ^2 можно рассматривать как среднюю мощность, выделяемую этим током (напряжением) на сопротивлении 1 Ом. Часть этой мощности $W(\omega)d\omega/2\pi$ выделяется составляющими спектра, заключенными между ω и $\omega + d\omega$. Поэтому функция $W(\omega)$ характеризует распределение мощности по спектру. Функцию $W(\omega)$ иногда называют *спектром мощности* или *энергетическим спектром* (ЭС), так как она имеет размерность энергии.

Формулы (1.4) и (1.5) были одновременно получены советским ученым А.Я.Хинчиным и американским ученым Н.Винером, и поэтому называются формулами Винера – Хинчина.

Корреляционная функция $K(\tau)$ и спектральная плотность $W(\omega)$ стационарного случайного процесса обладают всеми свойствами, характерными для пары преобразований Фурье. В частности, чем «шире» спектр $W(\omega)$, тем «уже» корреляционная функция $K(\tau)$, и наоборот.

Для сопоставления поведения различных процессов вводится понятие интегральной ширины энергетического спектра (рис.8):

$$\Omega_0 = \frac{1}{\max W(\omega)} \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega.$$

Эффективная ширина полосы есть такой интервал на оси частот, для которого площадь построенного, как показано на рисунке, прямоугольника равна всей площади под кривой $W(\omega)/\max W(\omega)$.

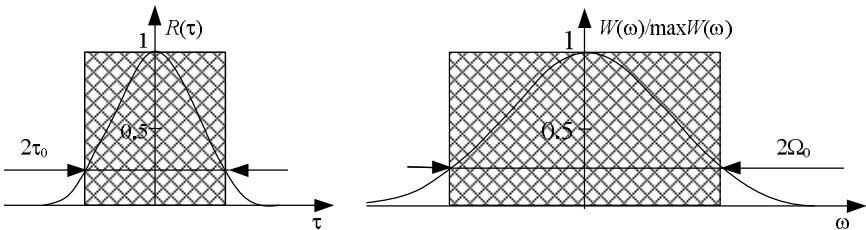


Рис. 8. Интегральный масштаб корреляции и ширина энергетического спектра

Основные свойства энергетического спектра:

1. Энергетический спектр не отрицателен при любых значениях ω : $W(\omega) \geq 0$.
2. Энергетический спектр – четная функция: $W(\omega) = W(-\omega)$.
3. Интегральная ширина ЭС обратно пропорциональна интегральному масштабу корреляции и удовлетворяет соотношению:

$$\Omega_0 \tau_0 = \frac{\pi W(0)}{2 \max W(\omega)}.$$

4. Для того чтобы стационарный процесс существовал, необходимо, чтобы его энергетический спектр при $\omega \rightarrow \infty$ убывал быстрее, чем $1/\omega$. Следует это из требования конечности дисперсии процесса.

Используя свойство четности корреляционной функции, формулы Винера – Хинчина могут быть переписаны в действительной форме:

$$W(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$K(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

1.9. Белый шум

Рассмотрим центрированный стационарный СП, у которого энергетический спектр постоянен в диапазоне частот $[-\omega_0, \omega_0]$ и равен нулю вне этого диапазона [11]:

$$W(\omega) = \begin{cases} W_0 = \text{const}, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \omega > \omega_0. \end{cases}$$

Среднее значение процесса равно нулю.

Корреляционная функция процесса (рис.9):

$$K(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} W_0 \cos \omega \tau d\omega = W_0 \frac{\sin \omega_0 \tau}{\pi \tau}.$$

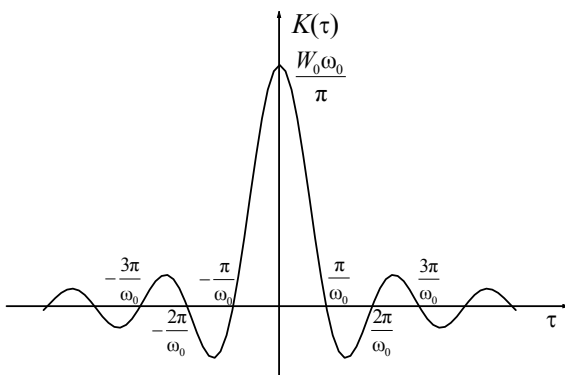


Рис.9. Корреляционная функция СП с равномерным энергетическим спектром интервале частот $[-\omega_0, \omega_0]$

Дисперсия рассматриваемого процесса:

$$\sigma^2 = K(0) = \frac{W_0 \omega_0}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} = \frac{W_0 \omega_0}{\pi}.$$

При постоянном значении спектральной плотности мощности дисперсия неограниченно возрастает с расширением интервала частот $[-\omega_0, \omega_0]$, т.е. при $\omega_0 \rightarrow \infty$ имеем $\sigma^2 \rightarrow \infty$. Время корреляции процесса τ_k определяется уравнением

$$\frac{\sin \omega_0 \tau_k}{\omega_0 \tau_k} = \frac{1}{e}$$

При $\omega_0 \rightarrow \infty$ время корреляции $\tau_k \rightarrow 0$. Получаемый в пределе процесс, характеризующийся бесконечно широким равномерным спектром.

Стационарный СП с постоянным энергетическим спектром

$$W(\omega) = W_0 = \text{const}$$

на всех частотах, бесконечной дисперсией и равным нулю временем корреляции, называют *белым шумом*.

Корреляционная функция белого шума

$$K(\tau) = \lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} W_0 \frac{\sin \omega_0 \tau}{\pi \tau} = W_0 \delta(\tau),$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака.

Белый шум является моделью абсолютно случайного процесса, когда значения случайного процесса в любые два несовпадающих, но сколь угодно близких момента времени статистически независимы, а интегральная ширина энергетического спектра бесконечно велика. Он представляет собой физически нереализуемую математическую абстракцию. Однако многие процессы в рассматриваемом на практике интервале частот имеют спектр очень близкий к равномерному. В этом случае их можно аппроксимировать белым шумом.

В случае постоянства спектральной плотности мощности случайного процесса введение такой идеализации позволяет разрабатывать достаточно легко применимые оптимальные методы фильтрации [12]. Пример белого шума – тепловые шумы транзисторов в диапазоне частот от 0 до $f_0 = kT/h \sim 6 \cdot 10^{12}$ Гц, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, а h – постоянная Планка. Понятие «белый шум» определяет только спектральную характеристику случайного процесса и оставляет открытым вопрос о законах распределения. Белыми шумами могут быть названы случайные процессы, имеющие равномерный энергетический спектр и различные законы распределения. Но обычно считается, что белый шум является центрированным и нормальным СП. Говорят, что про-

цесс, энергетический спектр которого непостоянен во всем частотном диапазоне, является окрашенным СП.

1.10. Эргодическое свойство случайных процессов

До сих пор характеристики случайного процесса (плотность вероятности, моментные функции и др.) были определены через соответствующие статистические средние значения, т.е. средние значения большего числа реализаций в ансамбле идентичных систем [3]. В большинстве практических случаев исследователь не имеет в наличии статистического ансамбля реализаций СП с определенной на нем плотностью вероятности. Для большинства СП, являющимися стационарными, указанные характеристики можно получить путем усреднения соответствующих величин для одной реализации за достаточно большой промежуток времени. Такая возможность физически может быть оправдана тем, что стационарный СП протекает однородно во времени. Поэтому одна реализация достаточно большой продолжительности может содержать все сведения о свойствах СП. Про такие стационарные СП говорят, что они обладают *эргодическим* свойством. Соотношение между различными видами случайных процессов показано на рис. 10 [2].



Рис. 10. Соотношение между различными видами случайных процессов

Не касаясь здесь строгих математических обоснований эргодичности процесса, укажем, что необходимое и достаточное условие эргодичности стационарного процесса $\xi(t)$ состоит в том, что КФ функция удовлетворяла предельному соотношению

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0.$$

Временное среднее и функция временной корреляции определяются как

$$\bar{\xi}_T(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t+t') dt',$$

$$K_T(t, \tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta\xi(t+t') \delta\xi(t+t'+\tau) dt'.$$

Если иметь в виду, что интегрирование здесь проводится внутри каждой реализации, то в общем случае возникающий процесс также является случайным. Однако интуитивно понятно, что временное среднее при большом времени усреднения должно стремиться к среднему по ансамблю реализаций [1].

Случайный процесс называется *эргодическим*, если среднее по времени при достаточно большом интервале усреднения с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, стремится к среднему по ансамблю реализаций. Записывается это условие как

$$P\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\xi}_T(t) = \langle \xi(t) \rangle\right\} = 1.$$

Очевидно, что необходимым условием эргодичности СП является его стационарность. Однако это условие не является достаточным. Например, рассмотрим стационарный СП вида:

$$\xi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A_0 и φ – являются случайными величинами, не зависящими от времени, причем величина φ – распределена равномерно в интервале $|\varphi| \leq \pi$. Очевидно, что наличие реализаций с различными значениями амплитуды A не позволяет оценить параметры данного СП по произвольно выбранной реализации, так что процесс $\xi(t)$ эргодическим не является.

Строгая эргодичность означает, что множество реализаций данного случайного процесса на некотором конечном отрезке времени характеризуется теми же многомерными законами распределения любого порядка, что и множество отрезков этого процесса той же длительности, «нарезанных» из одной бесконечно длинной реализации. Наряду с понятием строгой эргодичности по отношению ко всем возможным вероятностным характеристикам случайного процесса могут использоваться частные определения эргодичности, относящиеся к отдельным характеристикам (эргодичность относительно среднего значения, корреляционной функции, дисперсии и т.д.).

В общем случае трудно, если только вообще возможно, доказать, что эргодичность – обоснованное допущение для какого-либо физического процесса, так как может наблюдаться только одна реализация этого процесса. Тем не менее, обычно имеет смысл предположить эргодичность процесса, если только отсутствуют веские доводы физического характера, препятствующие этому.

1.11. Дисперсия временного среднего. Выбор времени усреднения

Выполнение операции временного усреднения предполагает, прежде всего, выбор времени усреднения, поскольку, как нельзя реализовать

наблюдение бесконечного ансамбля реализаций, так и нельзя реализовать бесконечное время наблюдения. Для практики обычно достаточно потребовать, чтобы дисперсия флуктуации временного среднего была много меньше дисперсии исходного СП. Найдем необходимое для этого условие [1].

Сначала оценим среднее по ансамблю реализаций от временного среднего:

$$\langle \bar{\xi}_T(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \langle \xi(t+t') \rangle dt'$$

Запишем разность, учитывая, что операции интегрирования и статистического усреднения переместимы,

$$\bar{\xi}_T(t) - \langle \bar{\xi}_T(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \langle \xi(t+t') - \langle \xi(t+t') \rangle \rangle dt'$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и статистически усредняя, для дисперсии временного среднего имеем выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\xi}}^2 &= \left(\frac{1}{2T} \right)^2 \int_{-T}^T \int_{-T}^T \langle \delta \xi(t+t') \delta \xi(t+t'') \rangle dt' dt'' = \\ &= \left(\frac{1}{2T} \right)^2 \int_{-T}^T \int_{-T}^T K(t''-t') dt' dt''. \end{aligned}$$

Здесь $K(t''-t') = \sigma^2 R(t''-t')$ – корреляционная функция стационарного процесса $\xi(t)$, σ^2 – дисперсия этого процесса, $R(t''-t')$ – коэффициент корреляции.

Сделаем замену переменных [2]

$$\begin{aligned} \tau &= t'' - t', \quad t_0 = (t'' + t') / 2; \\ \left(t'' = t_0 + \frac{\tau}{2}, \quad t' = t_0 - \frac{\tau}{2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая четность корреляционной функции $K(\tau) = K(-\tau)$ и, выполнив интегрирование по t_0 , получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\xi}}^2 &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K(\tau) d\tau = \\ &= \frac{\sigma^2}{2T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Формула показывает, что для вычисления среднеквадратичной ошибки временного среднего значения, необходимо знать корреляционную функ-

цию. Однако в двух частных случаях (для малых и больших временных интервалов T) можно получить приближенные оценки σ_{ξ}^2 .

При $T \ll \tau_0$, где

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau$$

есть время корреляции случайного процесса, можно приближенно положить $R(t) \approx 1$ и тогда получим

$$\sigma_{\xi}^2 \approx \sigma^2.$$

Когда $T \gg \tau_0$, получим выражение

$$\sigma_{\xi}^2 \leq \frac{\sigma_{\xi}^2}{T} \int_{-T}^T |R(\tau)| d\tau = \frac{\sigma^2 \tau_0}{T}. \quad (1.7)$$

Отсюда видно, что если стационарный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0,$$

т.е. имеет конечную дисперсию σ^2 и конечное время корреляции τ_0 , то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_{\xi}^2 = 0.$$

Это означает, что с ростом T случайная величина $\bar{\xi}_T(t)$ стремится к неслучайной величине, равной статистическому среднему значению $\langle \xi(t) \rangle$:

$$\langle \xi(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t+t') dt'$$

При этом из равенства (1.7) получаем оценку быстроты сходимости

$$\left| \bar{\xi}_T(t) - \langle \xi(t) \rangle \right| \leq \sigma \left(\frac{\tau_0}{T} \right)^{1/2}.$$

Из математической статистики известно, что дисперсия среднего арифметического N взаимно независимых одинаковых случайных величин в N раз меньше дисперсии каждой из величин. Из этого следует, что среднее по времени $\bar{\xi}_T(t)$ имеет такую же быстроту сходимости, как и среднее арифметическое

$$\bar{\xi}_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi(i\Delta) \quad (1.8)$$

одинаковых взаимно независимых случайных величин $\xi(i\Delta)$, число которых равно $N = T/\tau_0$. Поэтому для облегчения фактического вычисления среднего значения $\langle \xi(t) \rangle$ целесообразно вместо интеграла пользоваться суммой (1.8), взяв интервал разбиения по времени $\Delta \geq \tau_0$.

Путем временного усреднения можно определить различные статистические характеристики стационарного эргодического случайного процесса.

Пример 5. Определить, является ли процесс

$$\xi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A_0 и ω_0 константы, а φ – случайная величина, равномерно распределена в интервале $[-\pi, \pi]$:

- 1) эргодическим относительно среднего значения и
- 2) эргодическим относительно корреляционной функции.

Решение:

1) Усреднение по ансамблю:

$$\langle \xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\varphi, t) f(\varphi) d\varphi = A_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = 0.$$

Усреднение по времени:

$$\begin{aligned} \overline{\xi_T(t)} &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_0 \cos(\omega_0(t+t') + \varphi^*) dt' = \\ &= \frac{A_0}{2T\omega_0} \left(\sin(\omega_0(t+T) + \varphi^*) + \sin(\omega_0(t+T) - \varphi^*) \right), \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\xi_T(t)} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь φ^* – некоторое значение случайной величины.

2) Корреляционная функция, найденная ранее усреднением по ансамблю:

$$K(t_1, t_2) = \frac{A_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau, \quad \text{где } \tau = t_2 - t_1,$$

Функция временной корреляции:

$$\begin{aligned} K_T(t, \tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_0^2 \cos(\omega_0(t+t') + \varphi^*) \cdot \cos(\omega_0(t+t'+\tau) + \varphi^*) dt' = \\ &= \frac{A_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau + \frac{A_0^2}{8T\omega_0} \sin(2\omega_0(t+t') + \omega_0 \tau + 2\varphi^*) \Big|_{-T}^T. \\ \lim_{T \rightarrow \infty} K_T(t, \tau) &= \frac{A_0^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \end{aligned}$$

Таким образом, процесс $\xi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ обладает свойством эргодичности относительно среднего значения и КФ [11].

Пример 6. Определить, является ли эргодическим относительно среднего значения и корреляционной функции случайный процесс $\xi(t) = \alpha \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где $\omega_0 = \text{const}$, а α и φ – статистически независимые случайные величины, причем φ равномерно распределена в интервале $[-\pi, \pi]$.

Решение:

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \alpha \rangle \langle \cos(\omega_0 t + \varphi) \rangle = 0,$$

так как $\langle \cos(\omega_0 t + \varphi) \rangle = 0$.

$$\overline{\xi_T(t)} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \alpha^* \cos(\omega_0 t + \varphi^*) dt = \frac{\alpha^*}{2T\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi^*) \Big|_{-T}^T,$$

где α^* и φ^* – конкретные значения случайных величин α и φ для рассматриваемой реализации. Очевидно, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\xi_T(t)} = 0$.

Таким образом, процесс $\xi(t)$ обладает свойством эргодичности относительно среднего значения, так как $\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\xi_T(t)} = \langle \xi(t) \rangle$.

Корреляционные функции:

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle - \langle \xi(t) \rangle \langle \xi(t+\tau) \rangle = \\ &= \langle \alpha^2 \rangle \langle \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0(t+\tau) + \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \langle \alpha^2 \rangle \cos \omega_0 \tau, \end{aligned}$$

$$K_T(t, \tau) = \frac{\alpha^{*2}}{2} \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha^{*2}}{8T\omega_0} \sin(2\omega_0(t+t') + \omega_0 \tau + 2\varphi^*) \Big|_{-T}^T.$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K_T(t, \tau) = \frac{\alpha^{*2}}{2} \cos \omega_0 \tau$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K_T(t, \tau) \neq K(\tau),$$

так как при $T \rightarrow \infty$ вообще говоря $\alpha^{*2} \neq \langle \alpha^2 \rangle$,

т.е. КФ, определенная через усреднение по ансамблю, не совпадает с КФ, определенной с помощью усреднения по времени, и, следовательно, процесс $\xi(t)$ не обладает свойством эргодичности относительно КФ [11].

Глава 2. Модели случайных процессов

Несмотря на кажущуюся непредсказуемость случайных процессов, как мы видели в предыдущих разделах, для их описания существует математический аппарат – теория СП. Случайные процессы в радиофизике, обычно их называют шумами, имеют свои специфические особенности. В этой главе мы рассмотрим модели наиболее распространенных из них.

2.1. Нормальные процессы

Самый распространенный и самый универсальный тип шумов, которые нас окружают – это нормальные (гауссовские) шумы. В случае, если шумы все-таки не нормальные, то прохождение их через радиоэлектронные системы часто приводит к их нормализации. Поэтому начнем рассмотрение с нормальных случайных процессов.

2.1.1. Характеристическая функция и плотность распределения

СП называется *нормальным*, если в его кумулянтном разложении содержатся только два первых члена [2]:

$$\varphi(u; t) = \exp\left\{iu\kappa_1(t) - \frac{1}{2}u^2\kappa_2(t)\right\}.$$

Это означает, что нормальный СП имеет ХФ вида

$$\varphi(u; t) = \exp\left\{iu\langle\xi(t)\rangle - \frac{1}{2}u^2\sigma^2(t)\right\}.$$

Плотность распределения имеет вид:

$$f(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{iu\left[\langle\xi(t)\rangle - x\right] - \frac{1}{2}u^2\sigma^2(t)\right\} du.$$

Вычисляется этот интеграл путем использования замены переменной интегрирования

$$v = u\sigma + i \frac{x - \langle\xi(t)\rangle}{\sigma},$$

так что

$$f(x; t) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left\{-\frac{\left[x - \langle\xi(t)\rangle\right]^2}{2\sigma^2(t)}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\} dv.$$

$$\text{Интеграл } \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}dv = \sqrt{2\pi}$$

Окончательно плотность распределения имеет вид:

$$f(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{[x - \langle \xi(t) \rangle]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}.$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x;t) = \int_{-\infty}^x f(x;t)dx.$$

На рис. 11 представлен вид этих функций.

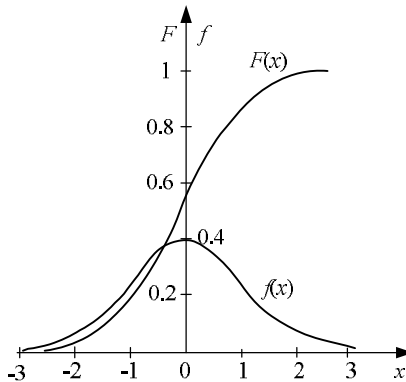


Рис. 11. Нормальная плотность вероятности и функция распределения

Ширина нормальной плотности вероятностей прямо пропорциональна среднему квадратическому (стандартному) отклонению σ . На уровне 0,607 от максимального значения функции $f(x)$ она равна 2σ . В этих точках абсолютная величина производной $f(x)/dx$ достигает своего максимального значения.

В радиофизических системах многие случайные процессы имеют тенденцию приближаться к нормальному СП. Степень близости реального процесса к нормальному обычно характеризуют близостью к нулю нормированных кумулянтов третьего и четвертого порядков

$$\gamma_1(t) = \frac{\kappa_3}{\sigma^3} = \frac{M_3}{\sigma^3}, \quad \gamma_2(t) = \frac{\kappa_4}{\sigma^4} = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3,$$

называемых соответственно коэффициентом асимметрии и коэффициентом эксцесса.

Сделаем два замечания:

1. При $\sigma \rightarrow 0$ нормальный закон распределения переходит в дельта-функцию

$$f(x; t) = \delta(x - \langle \xi(t) \rangle)$$

и описывает детерминированный процесс.

2. Не существует СП, для которого кумулянтное разложение содержало бы другое конечное число членов, большее двух.

Выражение для многомерных плотности распределения и характеристической функции нормального СП:

$$f(\underline{x}; t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \underline{\underline{K}}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\underline{x} - \langle \underline{\xi} \rangle \right]^T \underline{\underline{K}}^{-1} \left[\underline{x} - \langle \underline{\xi} \rangle \right] \right\};$$

$$\varphi(\underline{u}; t) = \exp \left\{ i \underline{u} \langle \underline{\xi} \rangle - \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{\underline{K}} \underline{u} \right\}. \quad (2.1)$$

Здесь $\underline{\underline{K}}$ – корреляционная матрица, составленная из всевозможных корреляционных функций:

$$K_{n,m} = \langle \delta \xi(t_n) \delta \xi(t_m) \rangle, \quad n, m \in 1, 2, \dots, N.$$

$\underline{\underline{K}}^{-1}$ – матрица, обратная $\underline{\underline{K}}$, символ T обозначает транспонированную матрицу и $\underline{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ – вектор строка, $\det \underline{\underline{K}}$ – определитель корреляционной матрицы.

Пример 7. Найти одномерную $f(\xi; t)$ и двумерную $f(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)$ плотности распределения вероятностей процесса

$$\xi(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$

где ω – постоянная угловая частота; α и β – взаимно независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями $m_\alpha = m_\beta = 0$ и дисперсиями $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma$ [13].

Решение. Случайная величина $\xi = \xi(t)$ при любом фиксированном значении t представляет собой линейную комбинацию гауссовских случайных величин и в силу этого также является гауссовской. Таким образом, для определения плотностей распределения вероятностей $f(\xi; t)$ и $f(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)$ процесса $\xi(t)$ необходимо определить его математическое ожидание $m_\xi(t)$ и корреляционную функцию $K_\xi(t_1, t_2)$:

$$m_\xi(t) = \langle \xi(t) \rangle = \langle \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \rangle = \langle \alpha \rangle \cos \omega t + \langle \beta \rangle \sin \omega t = 0,$$

$$K_\xi(t_1, t_2) = \langle (\alpha \cos \omega t_1 + \beta \sin \omega t_1)(\alpha \cos \omega t_2 + \beta \sin \omega t_2) \rangle.$$

Так как α и β статистически независимые величины, то $\langle \alpha \beta \rangle = \langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle = 0$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} K_{\xi}(t_1, t_2) &= \sigma^2 \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + \sigma^2 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 = \\ &= \sigma^2 \cos \omega(t_2 - t_1) = K_{\xi}(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1. \end{aligned}$$

Корреляционная матрица:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}} &= \begin{vmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \cos \omega \tau \\ \sigma^2 \cos \omega \tau & \sigma^2 \end{vmatrix}, \\ \det \underline{\underline{K}} &= \sigma^4 - \sigma^4 \cos^2 \omega \tau = \sigma^4 \sin^2 \omega \tau, \\ \underline{\underline{K}}^{-1} &= \frac{1}{\det \underline{\underline{K}}} \begin{vmatrix} \sigma^2 & -\sigma^2 \cos \omega \tau \\ -\sigma^2 \cos \omega \tau & \sigma^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомые плотности распределения вероятностей имеют вид

$$\begin{aligned} f(\xi, t) &= f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right), \\ f(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) &= f(\xi_1, \xi_2) = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sin \omega \tau} \exp\left(-\frac{\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos \omega \tau + \xi_2^2}{2\sigma^2 \sin^2 \omega \tau}\right). \end{aligned}$$

2.1.2. Центральная предельная теорема

Нормальный закон распределения занимает особое положение в силу того, что большинство реальных случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному. Последнее обстоятельство связано с тем, что на практике случайные величины обычно являются результатом совокупного действия многих независимых случайных факторов и, при некоторых условиях, по мере увеличения числа этих факторов закон распределения асимптотически приближается к нормальному. Условия эти определяются *центральной предельной теоремой* теории вероятности, которая в упрощенном виде может быть сформулирована следующим образом:

«Сумма большого числа независимых, одинаково распределенных случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, ... $\xi_N(t)$, имеющих конечные средние и дисперсии, является нормальным процессом» [2].

Доказательство этой теоремы основано на исследовании характеристической функции суммы этих процессов.

Прежде всего, следует отметить, что исследование сходимости сумм СП возможно лишь после соответствующего центрирования и нормирования сумм. Если этого не сделать, то при $N \rightarrow \infty$ среднее и дисперсия искомого предельного распределения не ограничены. Будем считать, что все эти процессы центрированы и имеют одинаковую дисперсию σ . Нормирование центрированной суммы возможно двумя способами:

$$\eta(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n \quad \text{или} \quad \eta(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \xi_n.$$

В первом случае дисперсия процесса $\eta(t)$ равна σ^2/N и при $N \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Во втором случае дисперсия стремится к единице.

Рассмотрим вариант нормировки:

$$\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \xi_n.$$

Запишем характеристическую функцию для СП $\eta(t)$:

$$\varphi(u; t) = \left\langle \exp \left\{ iu \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \xi_n(t) \right\} \right\rangle.$$

С учетом независимости исходных процессов можно записать

$$\varphi(u; t) = \prod_{n=1}^N \left\langle \exp \left\{ iu \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \xi_n(t) \right\} \right\rangle = \prod_{n=1}^N \varphi_n \left(\frac{u}{\sqrt{N}}; t \right).$$

Запишем кумулянтные разложения характеристических функций:

$$\varphi_n(u; t) = \left\langle \exp \{ iu \xi_n(t) \} \right\rangle = \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} \kappa_k^{(n)} \right\}.$$

Поскольку все составляющие процессы центрированы, то $\kappa_1^{(n)} = 0$. Тогда для суммарного процесса имеем

$$\varphi(u; t) = \exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(iu/\sqrt{N})^k}{k!} \sum_{n=1}^N \kappa_k^{(n)} \right\}.$$

Введем обозначение

$$\bar{\kappa}_k \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \kappa_k^{(n)}.$$

В результате можно записать

$$\varphi(u; t) = \exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} \frac{-}{\kappa_k N^{1-\frac{k}{2}}} \right\}.$$

Устремляя теперь $N \rightarrow \infty$, окончательно получаем

$$\varphi(u; t) = \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \frac{-}{\kappa_2} \right\}.$$

Это и соответствует определению нормального процесса с нулевым средним.

Нормализация всех временных средних при правильно выбранном времени усреднения объясняется тем, что временное среднее просто представляется суммой большого числа независимых и приблизительно равнозначных слагаемых.

2.1.3. Свойства нормального случайного процесса

Рассмотрим основные свойства нормальных случайных процессов [2].

1. Некоррелированные СП – статистически независимы. Действительно, если процессы некоррелированные, то соответствующая матрица корреляции является диагональной:

$$K_{n,m} = \langle \delta \xi(t_n) \delta \xi(t_m) \rangle = \sigma_n^2(t_n) \cdot \delta_{n,m}, \quad n, m \in 1, 2, \dots, N,$$

где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера. В результате характеристическая функция факторизуется:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{u}; t) &= \exp \left\{ i \underline{u} \langle \underline{\xi} \rangle - \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} \right\} = \\ &= \prod_{n=1}^N \varphi_n(u_n; t_n), \quad \varphi_n(u_n; t_n) = \exp \left\{ i u_n \langle \xi_n \rangle - \frac{1}{2} u_n^2 \sigma_n^2(t_n) \right\}. \end{aligned}$$

Это и означает независимость.

2. Все статистические моменты выражаются через первые два момента.

Доказательство этого следует из вида XF (2.1), поскольку в эту формулу не входят другие моменты, кроме первых двух.

В качестве примера можно непосредственно по формуле

$$\langle \xi(t_1) \xi(t_2) \dots \xi(t_m) \rangle = \frac{1}{i^m} \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_2} \dots \frac{\partial}{\partial u_m} \Big|_{\underline{u}=0} \varphi(\underline{u}; t).$$

вычислить несколько первых моментов.

Так, полагая, что СП – центрированный, получаем

$$\varphi(\underline{u}; \underline{t}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \sum_p u_k K_{k,p} u_p \right\}$$

$$\langle \xi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = K_{1,2}$$

$$\langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \rangle = 0$$

$$\langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \rangle = K_{1,3} K_{2,4} + K_{2,3} K_{1,4} + K_{1,2} K_{3,4}$$

Все нечетные моменты центрированного нормального СП оказываются равны нулю.

Следствием этого свойства является вывод, что корреляционная теория дает полное описание нормальных СП.

3. Сумма нормальных СП – нормальный процесс. Без доказательства.

В качестве примера рассмотрим процесс, получающийся как разность нормальных СП: $\eta = \xi_1 - \xi_2$. Очевидно, закон его распределения нормальный, а его параметры определяются как

$$\langle \eta \rangle = \langle \xi_1 \rangle - \langle \xi_2 \rangle, \quad \sigma_\eta^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2K_{1,2}.$$

Обобщением этого свойства является утверждение, что любая линейная комбинация нормальных СП есть нормальный СП.

2.1.4. Условная плотность нормального распределения.

Предсказание случайных процессов

Знание поведения одного процесса может быть использовано для предсказания поведения другого, если между ними существует некоторая статистическая взаимосвязь. В качестве второго процесса может выступать исходный, взятый с некоторым временным сдвигом. В этом случае речь может идти о прогнозе поведения СП в будущее на основе измерений сейчас. Для описания этого используется условная плотность распределения [1].

Условная плотность нормального распределения значений одного процесса при условии, что значения другого процесса измерены, определяется как результат деления двумерной плотности распределения на одномерную:

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)}.$$

Здесь и дальше, если временной параметр не меняется, мы будем для краткости его опускать в формулах. Для записи в явном виде двумерной

плотности распределения необходимо задать соответствующую корреляционную матрицу

$$\underline{\underline{K}} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2R \\ \sigma_1\sigma_2R & \sigma_2^2 \end{vmatrix},$$

где R – коэффициент корреляции первого и второго процессов. Определитель этой матрицы и соответствующая обратная матрица находятся как

$$\det \underline{\underline{K}} = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-R), \quad \underline{\underline{K}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{K}}} \begin{vmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_1\sigma_2R \\ -\sigma_1\sigma_2R & \sigma_1^2 \end{vmatrix}.$$

Запишем в явном виде двумерную плотность распределения

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \underline{\underline{K}}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{(x_1 - \langle \xi_1 \rangle)^2 \sigma_2^2 - 2(x_1 - \langle \xi_1 \rangle)(x_2 - \langle \xi_2 \rangle) \sigma_1 \sigma_2 R + (x_2 - \langle \xi_2 \rangle)^2 \sigma_1^2}{2 \det \underline{\underline{K}}} \right\}.$$

для одномерной плотности распределения формула существенно проще:

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - \langle \xi_1 \rangle)^2}{2\sigma_1^2} \right\}.$$

В результате деления и приведения подобных членов окончательно для условной плотности распределения получаем, что

$$f(x_2|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{2|1}}} \exp \left\{ -\frac{(x_2 - \langle \xi_{2|1} \rangle)^2}{2\sigma_{2|1}^2} \right\},$$

где введены обозначения

$$\langle \xi_{2|1} \rangle = \langle \xi_2 \rangle + R \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \langle \xi_1 \rangle), \quad \sigma_{2|1}^2 = \sigma_2^2(1-R^2). \quad (2.2)$$

Таким образом, условная плотность распределения представляет собой нормальный закон.

Согласно полученному результату второй случайный процесс не перестал быть случайным от того, что первый процесс был измерен. Он остался нормальным, но его характеристики, если $R \neq 0$, корректируются с учетом имеющихся априорных сведений. Согласно (2.2), среднее значение ожидаемой величины смещается, а дисперсия уменьшается.

В предельном случае при полной взаимосвязи процессов $R = 1$ и величина $\sigma_{2|1}^2 = 0$, а закон распределения – δ -функция. Это означает, что после измерения первого процесса второй процесс становится детерминированным, т.е. полностью определенным, а при выполнении условия $\sigma_2 = \sigma_1$ – просто равным измеренному значению первого процесса $\langle \xi_{2|1} \rangle = x_1$. При $R \neq 1$ имеет место размытие строгого детерминизма. Коэффициент корреляции играет роль некоторого параметра этого детерминизма.

Полученному результату можно дать некоторое образное представление. Пусть в результате многочисленных наблюдений первого и второго процесса имеется ансамбль их реализаций. Представим синхронные отсчеты процессов как абсциссу и ординату точки в прямоугольной системе координат. Множество реализаций даст на плоскости некоторое «облако» этих точек (рис.12).

Такое представление данных часто называется диаграммой рассеяния. Расплывчатость полученного «облака» точек (диаграммы рассеяния) свидетельствует о стохастичности процессов. Если «облако» сжалось до прямой линии, то имеет место полная взаимосвязь процессов и $R = 1$. Тангенс угла наклона этой прямой согласно (2.2) определяется как

$$\operatorname{tg}(\alpha) = R \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (2.3)$$

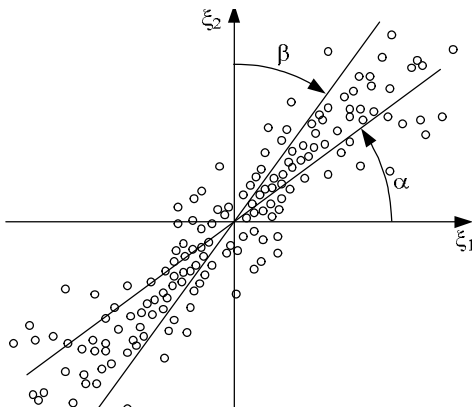


Рис.12. Диаграмма рассеяния и геометрический смысл коэффициента корреляции

Если диаграмма рассеяния расплывается, то $R \neq 1$. Аппроксимация её средней прямой линией приводит к зависимости вида (2.2) с тангенсом угла наклона (2.3). На основе этого можно утверждать, что коэффициент

корреляции, а значит, и функция корреляции являются мерой линейной взаимосвязи СП.

Если теперь мысленно сменить первый и второй процессы местами, то все сказанное выше сохранит силу, но угол наклона диаграммы рассеяния станет другой:

$$\operatorname{tg}(\beta) = R \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Это означает, что, перемножив, мы можем записать

$$\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta) = R^2,$$

или

$$R = \pm\sqrt{\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}.$$

В частном случае, когда мы имеем дело с полным детерминизмом, очевидно, $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{ctg}(\beta)$ и $R = \pm 1$. Последняя формула дает простой способ для графической оценки коэффициента корреляции по диаграмме рассеяния. Знак «+» выбирается при положительном наклоне прямой и «-» при отрицательном.

2.1.5. Распределение Релея

Это распределение встречается в нескольких практических ситуациях. В частности, ниже будет показано, что плотности вероятностей амплитудных значений (т.е. огибающих) узкополосных случайных напряжения или тока, распределенных по нормальному закону, подчиняются рэлеевскому закону [7]. Первоначально эту плотность вероятностей ввел лорд Рэлей в 1880 г. при рассмотрении огибающей суммы ряда гармонических колебаний разной частоты. Она также встречается при пристрелке пушек, ракет и другого огнестрельного и метательного оружия, если разбросы (отклонения от цели) в каждом из двух взаимно перпендикулярных направлений независимы и распределены по нормальному закону. Таким образом, если начало прямоугольной системы координат считать целью, а разброс по осям обозначить через X и Y , то промах будет выглядеть как $R = (X^2 + Y^2)^{1/2}$. Если X и Y независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями σ^2 , то плотность вероятностей для R записывается в виде

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

Это и есть *рэлеевская плотность* распределения вероятностей, график которой для различных значений дисперсии σ^2 показан на рис.13.

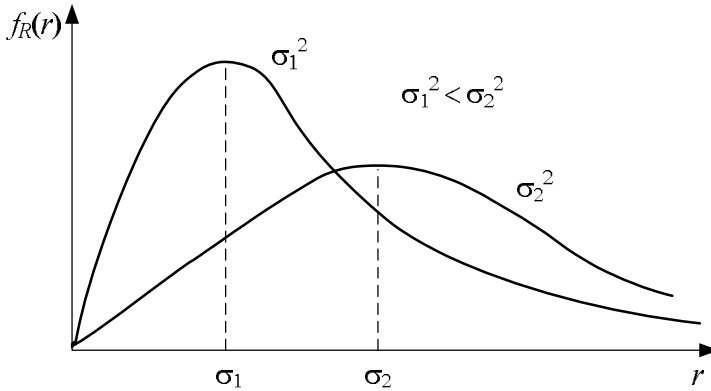


Рис.13. Рэлеевская плотность распределения вероятностей

Максимум этой функции соответствует стандартному отклонению, и она несимметрична относительно этого значения.

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Рэлея, равно

$$\langle R \rangle = \int_0^{\infty} r f_R(r) dr = \int_0^{\infty} (r^2 / \sigma^2) \exp(-r^2 / 2\sigma^2) dr = \sigma \sqrt{\pi / 2},$$

а средний квадрат имеет вид

$$\langle R^2 \rangle = \int_0^{\infty} r^2 f_R(r) dr = \int_0^{\infty} (r^3 / \sigma^2) \exp(-r^2 / 2\sigma^2) dr = 2\sigma^2.$$

При этом дисперсия случайной величины R равна

$$\sigma_R^2 = \langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2 = (2 - \pi / 2)\sigma^2 = 0.429\sigma^2.$$

Полученное значение дисперсии отличается от дисперсии σ^2 гауссовских случайных величин, из которых получена рассматриваемая рэлеевская величина. В отличие от гауссовских случайных величин, для случайной величины, распределенной по закону Рэлея, и математическое ожидание и дисперсия зависят от одного и того же параметра σ^2 , в результате чего они не могут изменяться независимо друг от друга.

Функция распределения вероятностей для рэлеевской величины находится непосредственно из соответствующей плотности вероятностей:

$$F_R(r) = \begin{cases} \int_0^r \frac{u}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

2.2. Марковские случайные процессы

В радиофизике большую роль играют случайные процессы, получившие название процессов Маркова или процессов без последействия. Этот класс случайных процессов впервые систематически изучался известным русским математиком А.А. Марковым.

Пример: броуновское движение [2]. Частицы (молекулы) газа или жидкости в отсутствие внешних влияний находятся в постоянном, хаотическом движении, интенсивность которого зависит только от температуры и плотности. Частица в случайные моменты времени сталкивается с молекулами окружающей среды и меняет при этом свою скорость и направление.

Будем следить, как изменяется с течением времени одна из координат избранной частицы, допустим горизонтальная координата. При этом можно не учитывать силу тяжести; на частицу действуют только систематическая сила трения об окружающую среду и случайная сила толчков. Считая компоненту силы трения пропорциональной x -й компоненте скорости и пренебрегая силой инерции, получим следующее уравнение движения частицы:

$$\gamma \dot{x} = n(t)$$

где γ – коэффициент трения; $n(t)$ – сила случайных толчков вдоль оси x .

Поскольку толчки, испытываемые данной частицей в результате столкновения с молекулами окружающей среды, в разных направлениях равновероятны, то среднее значение $n(t)$, очевидно, равно нулю. Случайная сила $n(t)$ представляет результирующий эффект, обусловленный большим числом отдельных толчков. Время корреляции, грубо говоря, равно среднему времени свободного пробега молекул; при большой концентрации молекул оно очень мало. Поэтому согласно центральной предельной теореме случайную силу $n(t)$ можно приближенно рассматривать как нормальный белый шум.

Смещения частицы для двух не перекрывающихся интервалов времени, значительно превышающих время свободного пробега, независимы. Если взять три момента времени (рис.14)

$$t_2 > t' > t_1,$$

причем промежутки много больше среднего времени свободного пробега, то поведение частицы на интервале (t', t_2) не будет зависеть от того, что происходило с частицей до момента t' . Это характерное свойство Марков-

ских процессов. Такой случайный процесс можно назвать процессом без последствия.

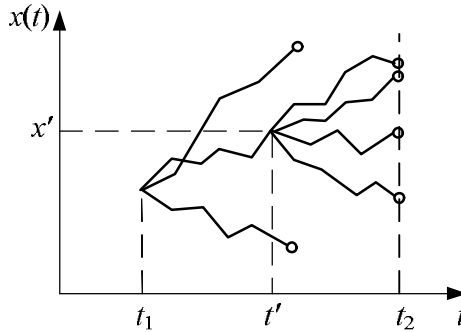


Рис. 14. Траектории броуновской частицы

Допустим, что нам точно известна координата x' в момент t' . Вследствие случайного характера воздействующей силы $n(t)$, возможные значения координаты x_2 в момент времени t_2 различны и образуют некоторый «ансамбль». Мы можем говорить об условной вероятности $F(x_2, t_2 | x', t')$ того, что если в момент времени t' координата равна x' , то в момент времени t_2 частица будет иметь координату, заключенную в промежутке $(x_2, x_2 + dx_2)$.

Условная вероятность $F(x_2, t_2 | x', t')$ характеризует вероятность перехода частицы из состояния x' в состояние x_2 за время между t' и t_2 и называется *вероятностью перехода*. Если частица в момент времени t' может иметь различные значения координаты x' с вероятностью $F(x', t')$, то двумерная плотность вероятности равна

$$f(x', x_2; t', t_2) = f(x', t') f(x_2, t_2 | x', t').$$

2.2.1. Уравнение Смолуховского

Рассмотрим множество сечений случайного процесса [1]

$$\xi_1 = \xi(t_1), \quad \xi_2 = \xi(t_2), \quad \xi_3 = \xi(t_3), \quad \dots, \quad \xi_n = \xi(t_n),$$

взятых в последовательные моменты времени

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_n.$$

Согласно правилу умножения вероятностей можно записать

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_n | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \quad (2.4)$$

Если СП таков, что его текущее значение слабо зависит от предшествующих значений процесса, то можно записать равенство

$$f(\xi_n | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = f(\xi_n | \xi_{n-1}) \quad (2.5)$$

СП, для которого это равенство выполняется при любых n , называется *марковским случайным процессом (МСП)*. В соответствии с этим определением, применяя (2.4) к (2.5) многократно, имеем

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_n | \xi_{n-1}) f(\xi_{n-1} | \xi_{n-2}) \dots f(\xi_2 | \xi_1) f(\xi_1).$$

Видно, что марковские процессы полностью определяются одномерной плотностью распределения $f(\xi_1, t_1)$ и двумерной условной плотностью распределения $f(\xi_2, t_2 | \xi_1, t_1)$, которая называется *плотностью перехода*.

Фундаментальным для теории случайных функций марковского типа является уравнение Смолуховского, выражающее тот простой факт, что вероятности перехода для каких-либо трех последовательных моментов времени должны быть определенным образом согласованы между собой.

Переход из состояния ξ_1 в момент времени t_1 в состояние ξ_2 в момент t_2 (плотность вероятности этого перехода есть $f(\xi_2, t_2 | \xi_1, t_1)$) реализуется через какое-либо состояние ξ' в промежуточный момент времени t' , т.е. может быть представлен в виде двух последовательных переходов $\xi_1 \rightarrow \xi'$ и $\xi' \rightarrow \xi_2$. Плотность вероятности совместного осуществления этих двух переходов есть

$$f(\xi' | \xi_1) f(\xi_2 | \xi').$$

Но переход есть один из взаимно исключающих частных случаев перехода, так что суммирование по всем возможным состояниям ξ' в момент t' должно давать полную плотность вероятности перехода

$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_2; t_2 | \xi'; t') f(\xi'; t' | \xi_1; t_1) d\xi'.$$

Это интегральное уравнение известно как *уравнение Смолуховского*. Также его называют *обобщенным уравнением Маркова*.

Важно подчеркнуть, что все реальные процессы имеют тенденцию становиться марковскими при раздвижении во времени между собой сечений СП. Если марковским процессом является стационарный СП, то

$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) = f(\xi_2; t | \xi_1)$$

2.2.2. Нормальные марковские случайные процессы

Нормальные процессы и марковские процессы в общем случае частично «перекрываются» (рис. 15).

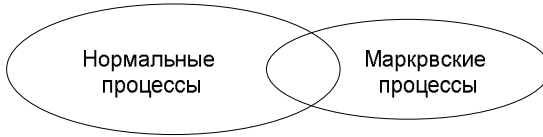


Рис.15. Иллюстрация соотношения между нормальными и марковскими процессами

Найдем вид корреляционной функции нормального Марковского процесса [1].

Рассмотрим стационарный нормальный случайный процесс. Подставим найденную нами условную плотность перехода нормального СП

$$f(x_2|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{2|1}}} \exp\left\{-\frac{(x_2 - \langle \xi_{2|1} \rangle)^2}{2\sigma_{2|1}^2}\right\},$$

в уравнение Смолуховского. При этом ограничимся случаем центрированных стационарных СП и обозначим $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 = \sigma^2$.

Перейдем к характеристической функции перехода:

$$\begin{aligned} \varphi(u; \tau|\xi_1) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_2; \tau|\xi_1) \exp(iu\xi_2) d\xi_2 = \\ &= \exp\left\{iu\xi_1 R(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}u^2\sigma^2(1 - R^2(t_2 - t_1))\right\}. \end{aligned}$$

Уравнение Смолуховского после преобразования Фурье трансформируется в

$$\varphi(u; t_2 - t_1|\xi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u; t_2 - t'|\xi') f(\xi'; t' - t_1|\xi_1) d\xi'.$$

Подставив в него характеристическую функцию перехода, получим

$$\begin{aligned} &\exp\left\{iu\xi_1 R(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}u^2\sigma^2(1 - R^2(t_2 - t_1))\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{iu\xi' R(t_2 - t') - \frac{1}{2}u^2\sigma^2(1 - R^2(t_2 - t'))\right\} f(\xi'; t' - t_1|\xi_1) d\xi' = \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\sigma^2(1 - R^2(t_2 - t'))\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iu\xi' R(t_2 - t')\} f(\xi'; t' - t_1|\xi_1) d\xi'. \end{aligned}$$

Интегральный член в свою очередь выражается через характеристическую функцию перехода так, что далее имеем

$$\begin{aligned} & \exp\left\{iu\xi_1 R(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}u^2\sigma^2(1 - R^2(t_2 - t_1))\right\} = \\ & = \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\sigma^2(1 - R^2(t_2 - t'))\right\} \times \\ & \times \exp\left\{iu\xi_1 R(t_2 - t')R(t' - t_1) - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 R^2(t_2 - t')(1 - R^2(t' - t_1))\right\}. \end{aligned}$$

Приравнявая показатели экспоненты в левой и в правой частях полученного равенства, в результате получаем уравнение

$$R(t_2 - t_1) = R(t_2 - t')R(t' - t_1).$$

Это уравнение должно тождественно удовлетворяться, чтобы МСП был нормальным СП. Решим его, сведя к дифференциальному уравнению. Предварительно перепишем его как

$$R(\tau_1 + \tau_2) = R(\tau_1)R(\tau_2).$$

Продифференцируем его по τ_1 и затем положим $\tau_1 = 0$. Получим дифференциальное уравнение

$$R'(\tau_2) = R(\tau_2)R'(0).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$R(\tau_2) = c \cdot \exp\{-\alpha\tau_2\},$$

где $\alpha \equiv -R'(0)$, $c = \text{const}$.

Учитывая далее, что $R(0) = 1$, и используя свойство четности КФ, получаем искомый вид коэффициента корреляции:

$$R(t_2 - t_1) = \exp(-\alpha|t_2 - t_1|).$$

Таким образом, *нормальный случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией является непрерывным Марковским процессом.*

Соответствующий энергетический спектр имеет вид

$$W(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Нормальный случайный процесс, имеющий корреляционную функцию (и энергетический спектр) иного вида, не может быть марковским.

2.2.3. Диффузионные процессы. Уравнения Колмогорова

Уравнение Смолуховского является нелинейным интегральным уравнением. Аналитических методов строгого решения таких уравнений не разработано. С целью разрешения ситуации уравнения Смолуховского в

результате некоторых упрощающих предположений сводят к дифференциальным уравнениям, которые получили название уравнений Колмогорова. Эти уравнения хотя и в частных производных, но для их решения применимы известные методы.

Рассмотрим три сечения МСП в следующие друг за другом моменты времени: $t_1 \leq t' \leq t_2$ [2]. Сближим первый и второй моменты времени: $t' = t_1 + \Delta t$, $\Delta t \rightarrow 0$.

Условие нормировки плотности перехода имеет вид:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi'; t' = t_1 + \Delta t | \xi_1; t_1) d\xi'.$$

Умножив левую и правую части на $f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t)$, можно записать

$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t) f(\xi'; t' = t_1 + \Delta t | \xi_1; t_1) d\xi'. \quad (2.6)$$

Положив теперь в уравнении Смолуховского $t' = t_1 + \Delta t$, вычтем из него (2.6) и получим уравнение

$$\begin{aligned} & f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) - f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\xi_2; t_2 | \xi'; t_1 + \Delta t) - f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t)] f(\xi'; t_1 + \Delta t | \xi_1; t_1) d\xi'. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Раскладывая $f(\xi_2; t_2 | \xi'; t_1 + \Delta t)$ в ряд Тейлора в окрестности $\xi' = \xi_1$, получим

$$f(\xi_2; t_2 | \xi'; t_1 + \Delta t) = f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi' - \xi_1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi_1^n} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1 + \Delta t).$$

Подставим это выражение в (2.7), поделим обе части на Δt и, перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$-\frac{\partial f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1)}{\partial t_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(\xi_1; t_1)}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi_1^n} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1),$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A_n(\xi_1; t_1) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi' - \xi_1)^n}{\Delta t} f(\xi'; t_1 + \Delta t | \xi_1; t_1) d\xi' = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{[\xi(t_1 + \Delta t) - \xi(t_1)]^n | \xi(t_1)}{\Delta t} \right\rangle. \end{aligned}$$

Интеграл в правой части представляет n -й момент изменения состояния за малое время Δt .

Если $A_n \neq 0$ при $n = 1, 2$, а все остальные $A_n = 0$ при $n \geq 3$, то непрерывный марковский процесс называется *диффузионным*. Название оправдывается тем, что аналогичным уравнением описываются процессы диффузии и теплопроводности. Коэффициент A_1 называется коэффициентом сноса, A_2 – коэффициентом диффузии.

Уравнение

$$-\frac{\partial f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1)}{\partial t_1} = A_1(\xi_1; t_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) + \frac{1}{2} A_2(\xi_1; t_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1).$$

называется первым *уравнением Колмогорова* (или *обратным уравнением Колмогорова*).

Уравнение необходимо дополнить начальным и граничными условиями.

Граничные условия:

$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{\xi_1 \rightarrow \pm\infty} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{\xi_1 \rightarrow \pm\infty} = 0.$$

Начальное условие:

$$f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{t_1 = t_2} = \delta(\xi_2 - \xi_1).$$

Получается, что при $t_2 = t_1$ процесс $\xi(t_2)$ принимает вполне определенное уже измеренное значение $\xi(t_1)$.

Если все то же самое проделать для предельного перехода $t' = t_2 - \Delta t$, $\Delta t \rightarrow 0$, то можно получить сопряженное дифференциальное уравнение, известное как *второе уравнение Колмогорова* (или *прямое уравнение Колмогорова*):

$$\frac{\partial f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1)}{\partial t_2} = -\frac{\partial}{\partial \xi_2} [A_1(\xi_2; t_2) f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} [A_2(\xi_2; t_2) f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1)],$$

где

$$A_2(\xi_2; t_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{[\xi(t_2) - \xi(t_2 - \Delta t)]^2 | \xi(t_2 - \Delta t)}{\Delta t} \right\rangle.$$

Это уравнение известно также как *уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова* (или *Энштейна – Фоккера*, или *Фоккера – Планка*).

Граничные и начальное условие записываются аналогично:

$$\begin{aligned} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{\xi_2 \rightarrow \pm\infty} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{\xi_2 \rightarrow \pm\infty} &= 0, \\ f(\xi_2; t_2 | \xi_1; t_1) \Big|_{t_1 = t_2} &= \delta(\xi_2 - \xi_1). \end{aligned}$$

В первом уравнении Колмогорова переменными являются ξ_1 и $t_1 < t_2$, а ξ_2 и t_2 входят только в начальное условие [9]. Во втором уравнении переменными являются ξ_2 и $t_2 > t_1$, а ξ_1 и t_1 входят только через начальное условие. Поэтому уравнения называются обратным «обращенным в прошлое» и прямым «обращенным в будущее». При решении научно-прикладных задач в зависимости от их конкретной формулировки применяют прямое или обратное уравнение. Если интересует плотность вероятности непрерывного марковского диффузионного процесса $\xi(t)$ при заданной плотности вероятности начальной координаты $\xi(t_1) = \xi_1$, то естественно использовать прямое уравнение. Наоборот, если нужно вычислить распределение первого времени достижения фиксированного уровня как функцию состояния ξ_1 , то целесообразно пользоваться обратным уравнением.

В случае стационарных процессов уравнения Колмогорова записываются так:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f(\xi_2; \tau | \xi_1)}{\partial \tau} &= A_1(\xi_1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} f(\xi_2; \tau | \xi_1) + \frac{1}{2} A_2(\xi_1) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} f(\xi_2; \tau | \xi_1) \\ \frac{\partial f(\xi_2; \tau | \xi_1)}{\partial \tau} &= -\frac{\partial}{\partial \xi_2} [A_1(\xi_2) f(\xi_2; \tau | \xi_1)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} [A_2(\xi_2) f(\xi_2; \tau | \xi_1)] \end{aligned}$$

Перепишем последнее уравнение в более привычном виде:

$$\frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial A_1(x, t) f}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_2(x, t) f}{\partial x^2}$$

Его можно интерпретировать так [2]. Пусть имеется большое число броуновских частиц, выходящих в начальный момент t_0 из x_0 . Их концентрация в точке x в момент t будет $f(x, t | x_0, t_0)$. Поток частиц S складывается из систематического («гидродинамического») потока $A_1 f$, где A_1 – скорость

систематического движения в точке x в момент t , и из диффузионного потока $-\frac{1}{2} \frac{\partial A_2 f}{\partial x}$:

$$S = A_1 f - \frac{1}{2} \frac{\partial A_2 f}{\partial x}.$$

Тогда получаем просто уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0,$$

выражающее сохранение числа частиц.

Начальные и граничные условия однозначно определяют плотность вероятности $f(x, t)$ как решение уравнения Фоккера–Планка. В том случае, когда коэффициенты $A_1(x)$ и $A_2(x)$ не зависят от времени, плотность вероятности $f(x, t)$ с течением времени стремится к стационарному распределению $f_{CT}(x)$, которое не зависит от начального распределения и времени.

Поэтому в стационарном состоянии $\frac{\partial}{\partial t} f_{CT}(x) = 0$ и, следовательно, $S(x) = S = \text{const}$. При этом уравнение Фоккера – Планка переходит в линейное дифференциальное уравнение для $f_{CT}(x)$:

$$\frac{d}{dx} [A_2(x) f_{CT}(x)] - 2A_1(x) f_{CT}(x) = -2S,$$

для которого при нулевых граничных условиях $S = 0$ и общее решение имеет вид:

$$f_{CT}(x) = \frac{C}{A_2(x)} \exp \left[2 \int_0^x \frac{A_1(x')}{A_2(x')} dx' \right].$$

Постоянная интегрирования C определяется из условия нормировки

$$\int f_{CT}(x, t) dx = 1.$$

Этой формулой часто пользуются при решении конкретных задач.

Пример 8. Пусть на цепочку RC действует белый гауссовский шум (БГШ) $\xi(t)$, имеющий нулевое среднее значение и корреляционную функцию $K_\xi(\tau) = W_0 \delta(\tau)$ (рис.16) [9].

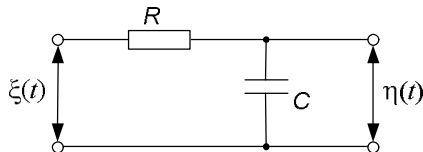


Рис.16. Воздействие БГШ на RC цепочку

Случайный процесс $\eta(t)$ задается стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{d\eta}{dt} + \alpha\eta = \alpha\xi(t), \quad \alpha = \frac{1}{RC}. \quad (2.8)$$

Решение уравнения имеет вид

$$\eta(t) = \eta_0 \exp(-\alpha t) + \alpha \exp(-\alpha t) \int_0^t \exp(\alpha t') \xi(t') dt'.$$

СП $\eta(t)$, получающийся линейным преобразованием БГШ, является гауссовским. Найдем математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию процесса $\eta(t)$:

$$\begin{aligned} m(\eta(t)) &= \langle \eta(t) \rangle = \eta_0 \exp(-\alpha t) + \alpha \exp(-\alpha t) \int_0^t \exp(\alpha t') \langle \xi(t') \rangle dt' = \eta_0 \exp(-\alpha t), \\ K_\eta(t_1, t_2) &= \langle (\eta(t_1) - \langle \eta(t_1) \rangle) (\eta(t_2) - \langle \eta(t_2) \rangle) \rangle = \\ &= \alpha^2 \exp(-\alpha(t_1 + t_2)) \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \exp(\alpha(t' + t'')) \langle \xi(t') \xi(t'') \rangle dt' dt'' = \\ &= \alpha^2 W_0 \exp(-\alpha(t_1 + t_2)) \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \exp(\alpha(t' + t'')) \delta(t' - t'') dt' dt''. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При вычислении интеграла

$$\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \exp(\alpha(t' + t'')) \delta(t' - t'') dt' dt''$$

необходимо иметь в виду, что формула

$$\int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} f(z) \delta(z_0 - z) dz = f(z_0)$$

справедлива лишь при $\varepsilon > 0$, т.е. когда особая точка $z = z_0$ лежит внутри пределов интегрирования.

Области интегрирования при

$$\tau = t' - t'' > 0,$$

$$\tau = t' - t'' < 0$$

изображены на рис.17 а) и б), соответственно.

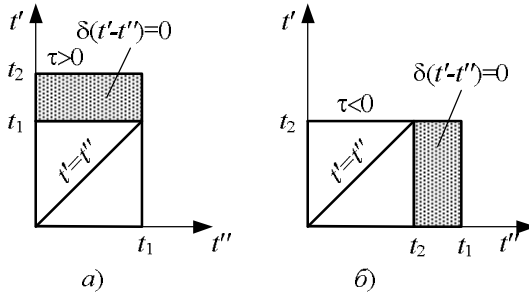


Рис.17. Области интегрирования

Дельта-функция $\delta(t' - t'')$ обращается в бесконечность, как это следует из рисунка, лишь на том участке биссектрисы координатного угла плоскости переменных t' и t'' , который определяется наименьшим из пределов t_1 или t_2 . В заштрихованных областях $\delta(t' - t'')$ обращается в ноль. Поэтому при вычислении интеграла оба предела нужно полагать одинаковыми и равными наименьшему.

Так, при $\tau > 0$ наименьшим из пределов интегрирования является t_1 :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \exp(\alpha(t' + t'')) \delta(t' - t'') dt' dt'' = \\ & = \int_0^{t_1} \exp(\alpha t') dt' \int_0^{t_1} \exp(\alpha t'') \delta(t' - t'') dt'' = \frac{1}{2\alpha} (\exp(2\alpha t_1) - 1). \end{aligned}$$

Подставив это значение в (2.9) и произведя замену $t_2 = t_1 + \tau$ ($\tau > 0$), получим

$$K_{\eta}(t_1, \tau) = \frac{\alpha W_0}{2} \exp(-\alpha\tau) (1 - \exp(-2\alpha t_1)), \quad \tau > 0.$$

При $\tau < 0$ наименьшим из пределов интегрирования является t_2 :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} \exp(\alpha(t' + t'')) \delta(t' - t'') dt' dt'' = \\ & = \frac{1}{2\alpha} (\exp(2\alpha t_2) - 1). \end{aligned}$$

Подставив это значение в (2.9) и произведя замену $t_1 = t_2 - \tau$ ($\tau < 0$), получим

$$K_{\eta}(t_2, \tau) = \frac{\alpha W_0}{2} \exp(\alpha\tau) (1 - \exp(-2\alpha t_2)), \quad \tau < 0.$$

В результате для корреляционной функции получим выражение:

$$K_{\eta}(t, \tau) = \frac{\alpha W_0}{2} \exp(-\alpha|\tau|)(1 - \exp(-2\alpha t)).$$

Полагая $\tau = 0$, найдем дисперсию случайного процесса $\eta(t)$:

$$\sigma_{\eta}^2(t) = \frac{\alpha W_0}{2} (1 - \exp(-2\alpha t)).$$

В стационарном состоянии ($t \rightarrow \infty$) корреляционная функция является экспоненциальной:

$$K_{\eta}(\tau) = \frac{\alpha W_0}{2} \exp(-\alpha|\tau|).$$

Условная (при фиксированном η_0) плотность вероятности процесса $\eta(t)$ будет нормальной:

$$f(\eta, t | \eta_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\eta}} \exp\left\{-\frac{[\eta - m(\eta)]^2}{2\sigma_{\eta}^2}\right\}$$

Полагая здесь $t \rightarrow \infty$, приходим к стационарной нормальной плотности вероятности

$$f_{CT}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{CT}}} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2D_{CT}}\right\}.$$

Покажем, что процесс $\eta(t)$ является марковским. Рассмотрим три произвольных момента времени $t_3 > t_2 > t_1 \geq 0$:

$$\eta(t_3) = \eta(t_2) \exp(-\alpha(t_3 - t_2)) + \alpha \exp(-\alpha t_3) \int_{t_2}^{t_3} \exp(\alpha t') \xi(t') dt'. \quad (2.10)$$

Отсюда видно, что $\eta(t_3)$ не зависит от $\eta(t_1)$, если задано $\eta(t_2)$. Поэтому, например, для плотности вероятности перехода справедливо равенство

$$f(\eta_3, t_3 | \eta_2, t_2; \eta_1, t_1) = f(\eta_3, t_3 | \eta_2, t_2),$$

что и доказывает марковский характер процесса.

Вычислим теперь коэффициенты сноса и диффузии. Для этого положим в (2.10) $t_2 = t$, $t_3 = t + \Delta t$. Приращение процесса за время Δt равно

$$\eta(t + \Delta t) - \eta(t) = \{\exp(-\alpha\Delta t) - 1\}\eta(t) + \alpha \left\{ \exp(-\alpha(t + \Delta t)) \int_t^{t+\Delta t} \exp(\alpha t') \xi(t') dt' \right\}.$$

При вычислении коэффициентов сноса и диффузии воспользуемся разложением

$$\exp(-\alpha\Delta t) \approx 1 - \alpha\Delta t, \quad \alpha\Delta t \ll 1,$$

и правилом интегрирования с дельта-функцией. Тогда получим

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle [\eta(t + \Delta t) - \eta(t)] \eta(t) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\exp(-\alpha \Delta t) - 1) \eta(t) = -\alpha \eta. \\
 A_2 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle [\eta(t + \Delta t) - \eta(t)]^2 | \eta(t) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(\exp(-\alpha \Delta t) - 1)^2 \eta^2 + \\
 &\quad + \alpha^2 \exp(-2\alpha(t + \Delta t)) \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \exp\{\alpha(t' + t'')\} \langle \xi(t') \xi(t'') \rangle dt' dt''] = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \alpha^2 \exp(-2\alpha(t + \Delta t)) W_0 \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \exp\{\alpha(t' + t'')\} \delta(t' - t'') dt' dt'' = \\
 &= \alpha^2 W_0.
 \end{aligned}$$

Уравнение ФПК принимает вид

$$\frac{\partial f(\eta, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial(\eta f)}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \alpha^2 W_0 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}.$$

Фундаментальное решение этого уравнения при начальном условии $f_0(\eta) = \delta(\eta - \eta_0)$ дается условной плотностью вероятности

$$f(\eta, t | \eta_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta}} \exp\left\{-\frac{[\eta - m(\eta)]^2}{2\sigma_\eta^2}\right\}.$$

Характер изменения плотности вероятности перехода $f(\eta, t | \eta_0, 0)$ во времени показан на рис. 18.

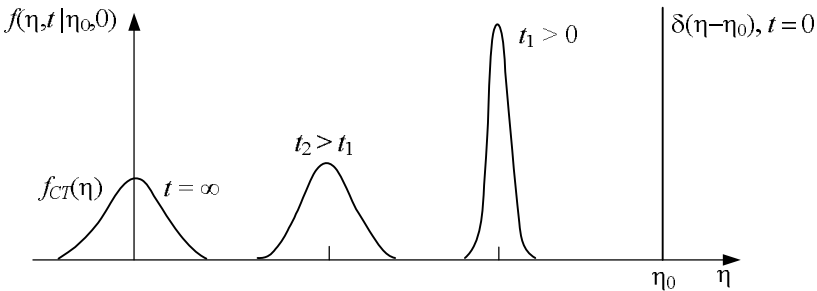


Рис. 18. Изменение плотности вероятности перехода во времени

Начальная дельтаобразная плотность вероятности $\delta(\eta - \eta_0)$ с течением времени систематически смещается влево из-за ненулевого коэффициента сноса и расплывается все шире и шире из-за коэффициента диффузии, приближаясь к нормальной стационарной плотности вероятности.

2.2.4. Процессы с независимыми приращениями

Рассмотрим стационарный чисто диффузионный СП [1]. В этом случае $A_1 = 0$ и $A_2 = 1$. В этом случае второе уравнение Колмогорова записывается как

$$\frac{\partial f(\xi_2; \tau | \xi_1)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} f(\xi_2; \tau | \xi_1). \quad (2.11)$$

Начальное и граничные условия имеют вид

$$f(\xi_2; \tau | \xi_1) \Big|_{\tau=0} = \delta(\xi_2 - \xi_1)$$

и

$$f(\xi_2; \tau | \xi_1) \Big|_{\xi_2 \rightarrow \pm\infty} = \frac{\partial}{\partial \xi_2} f(\xi_2; \tau | \xi_1) \Big|_{\xi_2 \rightarrow \pm\infty} = 0.$$

Применим преобразование Фурье к уравнению (2.11) и с учетом граничных условий перейдем к уравнению для характеристической функции перехода:

$$\frac{\partial \varphi(u; \tau | \xi_1)}{\partial \tau} = -\frac{u^2}{2} \varphi(u; \tau | \xi_1). \quad (2.12)$$

Начальное условие при этом трансформируется в

$$\varphi(u; \tau | \xi_1) \Big|_{\tau=0} = \exp\{iu\xi_1\}.$$

Решая (2.12) с учетом начального условия, получаем

$$\varphi(u; \tau | \xi_1) = \exp\left\{iu\xi_1 - \frac{1}{2}u^2\tau\right\}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим окончательно для плотности перехода

$$f(\xi_2; \tau | \xi_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{2\tau}\right\}.$$

Как видно, решение представляет собой плотность распределения нормального СП, дисперсия которого линейно нарастает: $\sigma_{\xi_2|\xi_1}^2 = \tau$.

В многомерном случае можно записать

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n | \xi_0) = f(\xi_1; \tau_1 | \xi_0) f(\xi_2; \tau_2 | \xi_1) \dots f(\xi_n; \tau_n | \xi_{n-1}),$$

где $\tau_1 = t_1 - t_0, \tau_2 = t_2 - t_1, \dots, \tau_n = t_n - t_{n-1}$.

Плотность распределения факторизуется по распределениям приращений процесса от сечения к сечению: $\Delta \xi_n = \xi_n - \xi_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ Это означает, что рассмотренный МСП является процессом с независимыми приращениями.

СП, у которых приращения независимы, а дисперсия приращений линейно нарастает с увеличением временного интервала, называются *винеровскими*.

Определение. Процесс $\xi(t)$ называют случайным с *независимыми приращениями*, если для любой последовательности моментов времени

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

случайные величины $\xi(t_2) - \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ независимы.

Любое конечномерное распределение процесса с независимыми приращениями определяется его одномерным распределением и распределением приращения, т.е. двумерным распределением.

Следует отличать процессы с независимыми приращениями от процессов с некоррелированными приращениями, для которых приращения процесса на непересекающихся интервалах некоррелированы.

2.2.5. Белый шум и винеровский процесс

Винеровский процесс $\eta(t)$ определяется через белый гауссовский шум $\xi(t)$ с помощью дифференциального уравнения

$$\dot{\eta}(t) = \xi(t),$$

где $\xi(t)$ – нормальный стационарный белый шум с нулевым средним значением и дельтообразной корреляционной функцией. С таким процессом мы уже встречались при упрощенном рассмотрении броуновского движения. Аналогичным уравнением описывается поведение фазы автогенератора с учетом малых собственных флуктуационных шумов.

Решение этого уравнения представляет собой результат накопления (интегрирования) белого шума:

$$\eta(t_0 + T) = \eta(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t') dt'.$$

Видно, что характерная особенность процесса $\eta(t)$ состоит в том, что он не переходит в стационарный процесс при сколь угодно большом интервале T .

Исследуем его свойства на предмет соответствия винеровскому процессу. Выделим множество неперекрывающихся временных интервалов: $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ [1].

Рассмотрим различные приращения процесса:

$$\Delta\eta_n = \eta(t_n) - \eta(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \xi(t') dt'.$$

Очевидно, в силу центрированности белого шума центрированными будут и приращения: $\langle \Delta\eta_n \rangle = 0$. Далее, в силу δ -коррелированности белого шума этот интеграл может быть представлен суммой большого числа независимых слагаемых так, что согласно центральной предельной теореме процесс $\Delta\eta_n$ будет распределен по нормальному закону:

$$f(\Delta\eta_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp\left\{-\frac{\Delta\eta_n^2}{2\sigma_n^2}\right\}.$$

Дисперсия приращения

$$\sigma_n^2 = \langle \Delta\eta_n^2 \rangle = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} K(t' - t'') dt' dt'' = W_0 \cdot \tau_n, \tau_n = t_n - t_{n-1}.$$

растет прямо пропорционально длине интервала.

Для полного соответствия винеровскому процессу осталось доказать независимость приращений. Поскольку приращения распределены по нормальному закону, достаточно доказать некоррелированность приращений. Корреляция приращений записывается как

$$K_{n,m} = \langle \Delta\eta_n \Delta\eta_m \rangle = W_0 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \delta(t' - t'') dt' dt'' = 0 \quad \text{при } n \neq m,$$

поскольку все интервалы не перекрываются.

Таким образом, результат накопления белого шума образует винеровский процесс.

Вычислим коэффициенты сноса A_1 и диффузии A_2 :

$$A_1(\eta) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{[\eta(t + \Delta t) - \eta(t)] \eta(t)}{\Delta t} \right\rangle = -\alpha \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \langle \xi(t') \rangle dt' = 0.$$

$$A_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{[\eta(t + \Delta t) - \eta(t)]^2 \eta(t)}{\Delta t} \right\rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \langle \xi(t') \xi(t'') \rangle dt' dt'' = W_0.$$

Для найденных коэффициентов уравнение ФПК принимает вид

$$\frac{\partial f(\eta, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} W_0 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} f(\eta, t).$$

2.3. Дробовой шум

Под дробовыми шумами обычно понимают шумы в радиоэлектронных устройствах (диодах, транзисторах и лампах), связанные с дискретностью носителей зарядов, образующих токи [4]. Флуктуации возникают вследствие статистической независимости упорядоченного перемещения носителей зарядов. Такие шумы существуют как при электронном и ионном, так и при дырочном токах.

Рассмотрим, например, вакуумный диод, к которому подключен источник постоянной ЭДС. От катода к аноду движется поток электронов, каждый из которых переносит электрический заряд $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл (по модулю).

Время пролета электрона с катода на анод имеет порядок $\tau_0 \sim 10^{-9}$ с. В этот интервал времени во внешних цепях регистрируется короткий импульс так называемого конвекционного тока, причем

$$\int_0^{\tau_0} i_{\text{кон}} dt = e,$$

откуда следует оценка $i_{\text{кон}} \sim 1.6 \cdot 10^{-10}$ А. В обычных режимах ток диода составляет несколько миллиампер и более, поэтому импульсы конвекционного тока густо перекрываются во времени. Акты вылета отдельных электронов с катода являются статистически независимыми случайными событиями. Отсюда следует, что мгновенное значение анодного тока диода не остается постоянным, а претерпевает некоторые флуктуации. Любой электронный прибор служит источником шума, который в физике и радиотехнике получил название дробового шума.

Центральное место в теории дробового шума занимает представление о пуассоновских процессах.

2.3.1. Распределение Пуассона

Для изучения статистических свойств дробового шума в электронных лампах мы должны, прежде всего, найти вероятность $p(N, T)$ того, что в интервале времени длины T из катода вылетает в точности N электронов [14]. В случае работы лампы в режиме насыщения представляется естественным предположить, что вероятность вылета электрона в заданном интервале времени не зависит от числа ранее вылетевших электронов и что при малых интервалах она пропорциональна длине интервала, т.е. при $\Delta t \rightarrow 0$

$$p(1, \Delta t) = \gamma \Delta t, \quad (2.13)$$

где γ – пока что не определенная постоянная. Мы можем также предположить, что при малых Δt вероятность того, что за время Δt вылетит более чем один электрон, пренебрежимо мала, т.е. приближенно

$$p(0, \Delta t) + p(1, \Delta t) = 1 \quad (2.14)$$

для малых Δt .

Вероятность того, что за время Δt не вылетает ни один электрон, мы можем найти следующим образом. Поскольку вылет электрона в интервале времени Δt не зависит от числа электронов, вылетевших в интервале времени T , мы имеем

$$p(0, T + \Delta t) = p(0, T)p(0, \Delta t)$$

Подставляя в это равенство выражение для $p(0, \Delta t)$, получаемое из (2.13) и (2.14), мы видим, что для малых Δt

$$\frac{p(0, T + \Delta t) - p(0, T)}{\Delta t} = -\gamma p(0, T).$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ это уравнение превращается в дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dp(0, T)}{dT} = -\gamma p(0, T),$$

имеющее решение

$$p(0, T) = \exp(-\gamma T),$$

причем граничное условие

$$p(0, 0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p(0, \Delta t) = 1$$

вытекает из соотношения (2.13) и (2.14).

Рассмотрим теперь вероятность того, что N электронов вылетают за время $T + \Delta t$. Если интервал Δt достаточно мал, то здесь имеются лишь две возможности: либо за время Δt происходит вылет одного электрона, либо не происходит вылета ни одного электрона. Следовательно, для малых Δt

$$p(N, T + \Delta t) = p(N - 1, T; 1, \Delta t) + p(N, T; 0, \Delta t).$$

Так как снова вылет электрона за время Δt не зависит от числа электронов, вылетевших за время T , то

$$p(N, T + \Delta t) = p(N - 1, T)p(1, \Delta t) + p(N, T)p(0, \Delta t).$$

Подставляя соответствующие выражения для $p(1, \Delta t)$ и $p(0, \Delta t)$, находим, что при малых значениях Δt

$$\frac{p(N, T + \Delta t) - p(N, T)}{\Delta t} + \gamma p(N, T) = \gamma p(N - 1, T).$$

Таким образом, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dp(N, T)}{dT} + \gamma p(N, T) = \gamma p(N-1, T),$$

представляющее собой рекуррентное соотношение, связывающее $p(N, T)$ и $p(N-1, T)$. Поскольку $p(N, 0) = 0$, решение этого линейного дифференциального уравнения первого порядка равно

$$p(N, T) = \gamma \exp(-\gamma T) \int_0^T \exp(\gamma T) p(N-1, T) dT. \quad (2.15)$$

Если мы теперь возьмем $N = 1$, то, используя найденный выше результат для $p(0, T)$, сможем получить $p(1, T)$. Этот результат можно использовать для нахождения с помощью равенства (2.15) вероятности $p(2, T)$. Продолжая этот процесс, позволяющий определить $p(N, T)$ по $p(N-1, T)$, находим, что

$$p(N, T) = \frac{(\gamma T)^N}{N!} \exp\{-\gamma T\}.$$

Это распределение известно как распределение Пуассона. Оно описывает вероятность появления N импульсов на интервале T .

Найдем некоторые средние величины, связанные с распределением Пуассона [1].

1. Среднее число импульсов за время T :

$$\langle N \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N p(N, T) = \exp\{-\gamma T\} \sum_{N=0}^{\infty} N \frac{(\gamma T)^N}{N!} = \gamma T.$$

За единичный интервал времени происходит $\langle N \rangle / T = \gamma$ событий. Это позволяет установить физический смысл введенного ранее коэффициента пропорциональности γ .

2. Дисперсия числа импульсов получается, если сначала рассчитать

$$\langle N^2 \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N^2 p(N, T) = \exp\{-\gamma T\} \sum_{N=1}^{\infty} N^2 \frac{(\gamma T)^N}{N!} = \gamma T (1 + \gamma T).$$

Для дисперсии числа импульсов тогда получается

$$\sigma_N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \gamma T = \langle N \rangle.$$

3. Плотность распределения интервалов между импульсами $f(\tau)$ можно получить, если учесть, что вероятность отсутствия импульсов на интервале T связана с искомой плотностью простым соотношением

$$p(0, T) = P\{\tau \geq T\} = \int_T^{\infty} f(\tau) d\tau = \exp\{-\gamma T\}.$$

В результате путем дифференцирования находим

$$f(\tau) = \gamma \exp\{-\gamma \tau\}.$$

4. Средний интервал между событиями оценивается как

$$\langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} \tau f(\tau) d\tau = 1/\gamma.$$

2.3.2. Пуассоновский поток дельта-импульсов

Определим случайный поток δ -импульсов как сумму (рис.19)

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N \delta(t - t^{(k)}), \quad t^{(k)} \in [0, T].$$

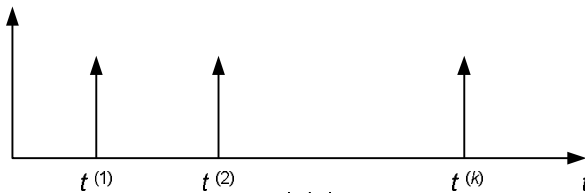


Рис.19. Пуассоновский поток дельта-импульсов

Здесь величины $t^{(k)}$ означают моменты появления δ -импульсов [1]. Случайными являются: общее число импульсов N , появившихся за время T , и моменты появления импульсов $t^{(k)}$. Примем, что число импульсов распределено по закону Пуассона. Моменты появления импульсов ни от чего не зависят и потому распределены равномерно на интервале $[0, T]$:

$$f(t^{(k)}) = \frac{1}{T}, \quad t^{(k)} \in [0, T].$$

Сделанные предположения составляют модель СП – пуассоновского потока δ -импульсов.

Найдем среднее значение и корреляционную функцию этого СП.

Среднее значение вычислим, зафиксировав сначала число импульсов.

С учетом результатов предыдущего раздела усредним далее по числу импульсов:

$$\langle \xi(t) \rangle = \frac{\langle N \rangle}{T} = \gamma.$$

Для расчета корреляционной функции предварительно вычислим второй начальный момент:

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2)|N \rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \langle \delta(t_1 - t^{(k)})\delta(t_2 - t^{(n)}) \rangle.$$

Разобьем сумму на две, выделив члены с повторяющимися индексами:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t_1)\xi(t_2)|N \rangle &= \sum_{k=1}^N \langle \delta(t_1 - t^{(k)})\delta(t_2 - t^{(k)}) \rangle + \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{n=1, n \neq k}^N \langle \delta(t_1 - t^{(k)})\delta(t_2 - t^{(n)}) \rangle. \end{aligned}$$

В результате, используя независимость моментов появления импульсов и свойства δ -импульсов, имеем

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2)|N \rangle = \delta(t_1 - t_2) \frac{N}{T} + \frac{N(N-1)}{T^2}.$$

Усреднение по числу импульсов дает

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2)\gamma + \gamma^2.$$

Для корреляционной же функции получается выражение

$$K(t_1 - t_2) = \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle - \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2)\gamma.$$

Таким образом, можно сделать вывод: пуассоновский поток δ -импульсов образует стационарный δ -коррелированный процесс, т.е. представляет собой белый шум, энергетический спектр которого есть $W_0 = \gamma$.

2.3.3. Модель дробового шума

Рассмотрим случай плоскопараллельного вакуумного диода, который находится под разностью потенциалов V [1]. Спонтанно, в случайные моменты времени $t^{(k)}$ из катода вылетают электроны и далее, ускоряясь под действием электрического поля $E = V/d$, преодолевают межэлектродный промежуток длиной d и оказываются на аноде. Движение отдельного электрона описывается вторым законом Ньютона:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = eE.$$

Здесь m , e – масса и заряд электрона. Решим это уравнение движения, полагая, что в момент вылета электрона его скорость и ускорение были нулевыми:

$$x(t) = \frac{eV}{2md}t^2 = d\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2.$$

Величина $\tau_0 = d\sqrt{\frac{2m}{eV}}$ – время пролета электроном межэлектродного промежутка.

Для вычисления наводимого электроном тока оценим сначала величину индуцированного на аноде заряда $q(t)$ в некоторый конкретный момент времени t . Работа, затрачиваемая на это, равна потенциальной энергии электрона, затрачиваемой на его ускорение:

$$A = eEx(t) = Vq(t).$$

Отсюда находятся индуцированный заряд и наведенный ток:

$$q(t) = e\frac{x(t)}{d}, \quad j_e(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{2e}{\tau_0^2}t. \quad (2.16)$$

Этот результат означает, что элементарный ток на аноде от одного электрона начинает наводиться в момент его вылета из катода и заканчивается, когда электрон достигает анода. Форма тока имеет пилообразный вид.

При вылете из катода N электронов полный ток в диоде задается суммой (рис.20):

$$J(t) = \sum_{k=1}^N j_e(t-t^{(k)}), \quad t^{(k)} \in [0, T] \quad (2.17)$$

Случайными являются: общее число вылетевших за время T электронов N и моменты вылета электронов $t^{(k)}$. Полный случайный ток $J(t)$ и называется дробовым шумом.

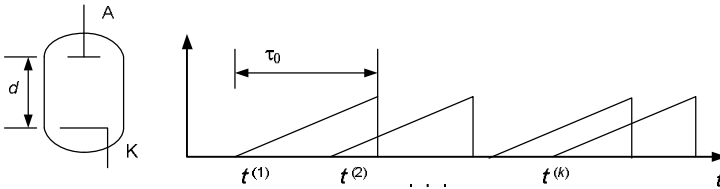


Рис.20. К модели дробового шума

Дробовой шум можно связать с рассмотренной ранее идеализированной моделью, если записать

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} j_e(t-t')\xi(t')dt'.$$

С формальной точки зрения эта формула говорит, что дробовой шум можно представить как результат прохождения пуассоновского потока δ -импульсов через линейную систему, импульсная характеристика которой описывается элементарным током (2.16).

2.3.4. Среднее значение и функция корреляции дробового шума

Вычислим среднее значение дробового шума [1].

$$\langle J(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} j_e(t-t') \langle \xi(t') \rangle dt' = \gamma \int_0^{\tau_0} \frac{2et'}{\tau_0^2} dt' = \gamma e.$$

Для корреляционной функции дробового шума при этом имеем

$$\begin{aligned} K_J(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j_e(t_1-t') j_e(t_2-t'') K(t'-t'') dt' dt'' = \\ &= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} j_e(t_1-t') j_e(t_2-t') dt'. \end{aligned}$$

Путем замены переменной

$$\tau' = t_1 - t'$$

этот результат можно переписать в виде

$$K_J(t_1, t_2) = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} j_e(\tau') j_e(t_2 - t_1 + \tau') d\tau' = K_J(t_1 - t_2).$$

Последнее означает, что дробовой шум – это стационарный СП. Вычисление сводится к временной корреляции двух треугольных функций и дает несколько громоздкий вид.

2.3.5. Энергетический спектр дробового шума. Формула Шоттки

Установленная выше стационарность дробового шума позволяет вычислить его энергетический спектр [1], взяв преобразование Фурье от выражения

$$W_J(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_J(\tau) \exp\{-i\omega\tau\} d\tau = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\omega\tau\} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} j_e(t) j_e(t+\tau) dt.$$

Полагая $\tau = t' - t$, получаем

$$W_J(\omega) = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} j_e(t) \exp\{i\omega t\} dt \int_{-\infty}^{\infty} j_e(t') \exp\{-i\omega t'\} dt' = \gamma |j_e(\omega)|^2,$$

где

$$j_e(\omega) \equiv \int_0^{\tau_0} j_e(t) \exp\{i\omega t\} dt = \frac{2e}{(\omega\tau_0)^2} \int_0^{\omega\tau_0} x \exp\{ix\} dx.$$

Разложение стоящей под интегралом экспоненты в ряд Тейлора позволяет представить результат в виде ряда по степеням $(\omega\tau_0)$ как параметра:

$$j_e(\omega) \equiv 2e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k (\omega\tau_0)^k}{k!(k+2)} \approx e.$$

В результате окончательно для энергетического спектра дробового шума можно записать

$$W_J(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_J(\tau) \exp\{i\omega\tau\} d\tau \approx \gamma e^2.$$

Таким образом, низкочастотный участок спектра аппроксимируется формулой

$$W_J(\omega) = \gamma e^2 = \langle J \rangle e.$$

Спектральная плотность шума на положительных частотах описывается формулой

$$W_J^+(\omega) = 2\langle J \rangle e.$$

Эта формула получила в радиотехнике название формулы Шоттки. Согласно ей, эквивалентная шумовая схема электронного прибора (рис.21) содержит в себе источник тока, создающий белый шум со спектральной плотностью, описываемой этой формулой.

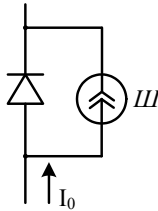


Рис.21. Эквивалентная схема диода с источником шума

Эксперименты показывают, что дробовой шум электронных приборов имеет постоянный спектр мощности вплоть до частот в несколько сотен мегагерц, а затем начинает уменьшаться с ростом частоты. Это связано с тем, что на очень высоких частотах несправедливой становится принятая модель шума, согласно которой за время наблюдения на анод должно приходиться достаточно большое число электронов. Кроме того, начинает сказываться уменьшение модуля спектральной плотности отдельных импуль-

сов конвекционного тока, длительность которых хотя и мала, но все же конечна.

Область применимости формулы Шоттки определяется требованием

$$(\omega\tau_0) \ll 1.$$

Пример 9. Транзисторный усилитель с резистивно-емкостной нагрузкой имеет следующие параметры: $R_n = 5.1$ кОм, $C_n = 45$ пФ, $R_i = 20$ кОм. Рабочая точка на характеристике транзистора выбрана таким образом, что постоянная составляющая тока коллектора $I_{0К} = 1,5$ мА. Вычислить эффективное шумовое напряжение на выходе, обусловленное дробовым шумом транзистора [4].

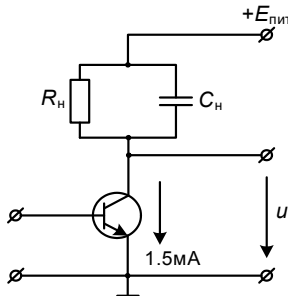


Рис. 22. Транзисторный усилитель с резистивно-емкостной нагрузкой

Прежде всего, по формуле Шоттки находим спектр мощности источника шума тока:

$$W_J^+ = 2eI_{0К} = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} = 4,8 \cdot 10^{-22} \text{ А}^2 / \text{Гц}.$$

Составив эквивалентную схему усилителя, замечаем, что роль частотного коэффициента передачи системы играет комплексное сопротивление, включенное параллельно источнику тока:

$$H(\omega) = Z(\omega) = R_{эк} / (1 + i\omega C_n R_{эк}),$$

где

$$R_{эк} = R_n R_i / (R_n + R_i).$$

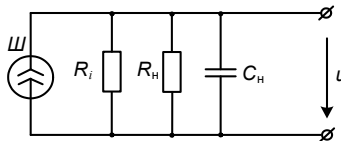


Рис. 23. Эквивалентная схема усилителя

В данном случае

$$R_{\text{эк}} = 5,1 \cdot 20 / 25,1 = 4,06 \text{ кОм.}$$

Дисперсию шумового напряжения на выходе усилителя вычислим по формуле (1.6), используя формулу (3.2) для энергетического спектра при линейном преобразовании:

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} W_J^+ |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{R_{\text{эк}} W_J^+}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 R_{\text{эк}}^2 C_H^2} = \\ &= \frac{C R_{\text{эк}} W_J^+}{4 C_H} = 1,08 \cdot 10^{-8} \text{ В}^2. \end{aligned}$$

Эффективное напряжение шума на выходе

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_u^2} = 104 \text{ мкВ.}$$

Подобные расчеты приходится выполнять каждый раз, определяя предельную чувствительность усилителей малых сигналов. Для этого обычно поступают так: эффективное напряжение шума приводит ко входу по формуле $\sigma_{\text{вх}} = \sigma_{\text{вых}}/K$, где K – коэффициент усиления напряжения на частоте сигнала. Полученную величину принимают за минимальный уровень эффективного напряжения полезного гармонического сигнала, который может усиливаться данным устройством, откуда минимальная амплитуда

$$U_{\text{min}} = \sqrt{2} \sigma_{\text{вх}}.$$

Так, в рассмотренном примере при крутизне характеристики транзистора $S = 20 \text{ мА/В}$ коэффициент усиления напряжения на нулевой частоте $K = S R_{\text{эк}} = 81,2$. Поэтому

$$\sigma_{\text{вх}} = 104 / 81,2 = 1,28 \text{ мкВ,}$$

минимальная амплитуда усиливаемого сигнала

$$U_{\text{min}} = 1,28 \cdot 1,41 = 1,81 \approx 2 \text{ мкВ.}$$

В расчетах предполагалось, что частота гармонического сигнала существенно ниже граничной частоты усилителя.

2.4. Тепловой шум

Тепловой шум возникает во всех проводниках, находящихся при некоторой термодинамической температуре T . Известно, что температура является мерой хаотического движения молекул вещества. Электроны также находятся в состоянии хаотического движения. Хаотическое тепловое движение носителей заряда на границах проводника воспринимается как некоторая сторонняя хаотическая ЭДС. В результате к передаваемым по

проводникам сигналам всегда добавляется действие тепловой ЭДС, т.е. добавляются тепловые шумы. Эти шумы существенно затрудняют прием слабых сигналов.

Рассмотрим идеальную двухпроводную линию с волновым сопротивлением (L и C – погонные индуктивность и емкость), к концам которой подключены согласованные на частоте ω омические сопротивления $R = \sqrt{L/C}$, имеющие одну и ту же температуру T (термодинамическое равновесие). Образуется замкнутая цепь, в которую включены два резистора-проводника с сопротивлением $R_1 = R_2 = R$, которые сами же являются источниками ЭДС: $e_1 = e_2 = e$. (рис.24) [1, 3]. Обмен энергией между сопротивлениями происходит посредством волн, возбуждаемых в линии каждым из резисторов и не испытывающих отражения ввиду согласования линии с нагрузками в рассматриваемом спектральном интервале $\Delta\omega$.

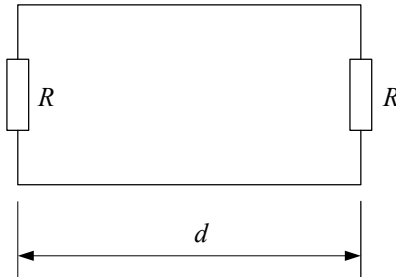


Рис.24. К модели теплового шума

Первый резистор служит источником ЭДС, которая действует в замкнутой цепи и вызывает выделение тепловой мощности на втором резисторе. Средняя величина этой мощности оценивается как

$$\langle P_1 \rangle = \langle e^2 \rangle / 4R.$$

В свою очередь второй резистор передает точно такую же мощность, которая выделяется затем на первом резисторе.

Будем считать, что система из двух резисторов находится в термодинамическом равновесии, по крайней мере, в полосе частот $\Delta\omega$. Если обозначить как $W_e(\omega)$ энергетический спектр тепловой ЭДС, развиваемой каждым резистором, то на полосу частот $\Delta\omega$ приходится средняя интенсивность флуктуаций равная $\langle e^2 \rangle = 2\Delta\omega W_e(\omega)$. Полная же мощность, курсирующая в системе, определяется как

$$\langle P \rangle = 2\langle P_1 \rangle = \frac{W_e(\omega)\Delta\omega}{R}. \quad (2.18)$$

Свяжем эту мощность с термодинамической температурой системы T . Как известно из термодинамики, энергия колебательной термодинамической системы определяется формулой

$$E = NkT,$$

где N – число колебательных степеней свободы, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, T – температура в градусах Кельвина. Определим число степеней свободы для нашей идеализированной системы.

Представим, что между выделенными нами двумя резисторами реализуется стоячая волна. Естественно, что для реализации устойчивого режима на линии, соединяющей резисторы, должно укладываться целое число полуволн, т.е. должно выполняться условие

$$m \frac{\lambda}{2} = d.$$

Здесь λ – длина волны, d – длина линии, соединяющей резисторы, m – целое число. Если v – фазовая скорость распространения волны в линии, то частоты, соответствующие этим волнам, равны

$$\omega_m = 2\pi \frac{v}{\lambda} = m \frac{\pi v}{d}.$$

Шаг следования этих частот определяется как

$$\delta\omega = \frac{\pi v}{d}.$$

Тогда в выделенной нами общей полосе термодинамического равновесия будет укладываться

$$N = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} = \frac{\Delta\omega}{\pi v} d$$

различных частот, которое и есть число колебательных степеней свободы нашей системы. Вся приходящаяся на эти степени свободы энергия будет переноситься за время распространения волны от одного резистора к другому: $\Delta t = d/v$. В результате средняя термодинамическая мощность, переносимая в полосе $\Delta\omega$ системой, равна

$$\langle P \rangle = \frac{E}{\Delta t} = \frac{kT\Delta\omega}{\pi}. \quad (2.19)$$

Приравнявая (2.18) и (2.19), окончательно находим для энергетического спектра тепловой ЭДС следующую оценку:

$$W_e(\omega) = \frac{1}{\pi} kTR. \quad (2.20)$$

Эта формула известна как формула Найквиста. Согласно (2.19), тепловой шум – белый шум.

Практически удобнее пользоваться односторонним энергетическим спектром, который задается только в области положительных частот и имеет размерность $\text{В}^2/\text{Гц}$:

$$W_0 = 4kTR.$$

Величина W_0 имеет простой и ясный физический смысл *удельной дисперсии* источника теплового шума, который приходится на полосу частот шириной в 1 Гц.

Пример 10. Оценим спектральную плотность мощности тепловых шумов при $T = 300\text{К}$, $R = 10\text{кОм}$ [4]

$$W_0 = 4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{Дж/К} \cdot 300\text{К} \cdot 10 \cdot 10^3 \text{Ом} = 1.66 \cdot 10^{-16} \text{В}^2/\text{Гц}$$

Удельное эффективное напряжение шума равно $1,29 \cdot 10^{-8} \text{В}/\sqrt{\text{Гц}}$. Несмотря на кажущуюся малость, эффект тепловых шумов может явиться решающим фактором, ограничивающим реальную чувствительность приемных устройств.

Из формулы видно, что спектральная плотность теплового шума постоянная и, казалось бы, тепловой шум является идеальным примером белого шума. Однако следует иметь ввиду, что формула справедлива лишь при не очень высоких частотах. Она получается из точной квантовой формулы [2]

$$W(f) = 4kTR \frac{hf}{kT} \left(e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \right)^{-1},$$

где $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Дж·сек – постоянная Планка, при $hf/kT \ll 1$.

При нормальной комнатной температуре даже на миллиметровых волнах неравенство выполняется (частота порядка $6 \cdot 10^{12}$ Гц). Использование более точной формулы даст уменьшение энергетического спектра на более высоких частотах.

Однако при вычислении дисперсии теплового шума необходимо пользоваться точной формулой

$$\sigma^2 = 4kTR \int_0^\infty \frac{hf}{kT} \left(e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \right)^{-1} df = 4kTR \frac{kT}{h} \int_0^\infty \frac{xdx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^2}{3h} (kT)^2 R.$$

Еще одно замечание. При рассмотрении баланса мощностей в электрической цепи не было учтено ни одного реактивного элемента, хотя известно, что любой резистор имеет емкость C . Если учесть её, то в необходимо провести замену

$$R \rightarrow \frac{R}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Влияние знаменателя будет несущественно лишь при $\omega \ll 1/RC$. Учет же его даст уменьшение $W_e(\omega)$ на высоких частотах.

Интересно и важно отметить, что мощность шума, которая может быть передана во внешнюю резистивную нагрузку, не зависит от сопротивления резистора R . Для доказательства рассмотрим систему, в которой между шумящим резистором R и нагрузкой R_H включен идеальный фильтр с полосой пропускания 1 Гц (рис.25) [4].

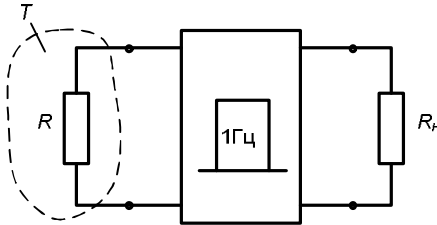


Рис.25. Передача шума в нагрузку через полосовой фильтр

Как известно, мощность, передаваемая в нагрузку, максимальна при $R = R_H$ (условие согласования) и равна в нашем случае (Вт/Гц)

$$P = \frac{\langle e^2 \rangle}{4R} = kT.$$

Поэтому единственным радикальным средством борьбы с тепловыми шумами является глубокое охлаждение входных цепей чувствительных радиоприемных устройств, применяемых в радиолокации, радиоастрономии и системах космической связи. Наилучшие результаты достигаются при охлаждении исходных цепей приемников до температуры жидкого гелия (4.2К).

2.5. Шумы приемных антенн

Источником шума в радиотехническом устройстве может быть приемная антенна, на выходе которой возникает случайное напряжение под воздействием хаотических флуктуаций электромагнитного поля [4].

Пусть простейшая приемная антенна (вibrator Герца) длиной l ориентирована вдоль оси z и помещена внутри замкнутой полости, стенки которой имеют температуру T .

В соответствии с законом Планка полость заполнена равновесным электромагнитным излучением, которое характеризуется спектральным параметром – удельной яркостью (Вт/(м²·Гц·ср)):

$$B = \frac{1}{c} \cdot \frac{2hf^3}{e^{hf/kT} - 1},$$

где f – частота, Гц; c – скорость света, м/с; $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Дж/Гц – постоянная Планка.

Удельная яркость представляет собой плотность потока электромагнитного излучения, отнесенного к частотному интервалу 1 Гц и приходящего из телесного угла в 1 ср.

Если $hf \ll kT$, что типично для радиодиапазона, то формула превращается в приближенную формулу Рэля – Джинса:

$$B = \frac{2kT}{\lambda^2}, \quad (2.21)$$

где $\lambda = c/f$ – длина волны.

Рассмотрим величину

$$\overline{E_0^2} = \overline{E_x^2} + \overline{E_y^2} + \overline{E_z^2}$$

– средний квадрат напряженности электрического поля E , приходящийся на интервал частот 1 Гц. В теории электромагнетизма доказывается, что плотность потока мощности излучения (Вт/м²) составит при этом

$$\frac{\overline{E_0^2}}{120\pi} = \frac{\overline{E_z^2}}{40\pi}.$$

Входящая сюда величина $Z_0 = 120\pi \approx 377$ Ом представляет собой характеристическое сопротивление вакуума.

Здесь учтено, что из-за полного равноправия всех пространственных направлений

$$\overline{E_0^2} = 3\overline{E_z^2}.$$

Разделив плотность потока мощности на 4π , т.е. на телесный угол всего пространства, получаем выражение удельной яркости:

$$B = \frac{\overline{E_z^2}}{160\pi^2}. \quad (2.22)$$

Приравняв правые части выражений (2.21) и (2.22), находим удельный средний квадрат проекции составляющей вектора напряженности электрического поля, которая ориентирована вдоль антенны:

$$\overline{E_z^2} = \frac{320\pi^2 kT}{\lambda^2}.$$

Поскольку на выходе антенны, малой по сравнению с длиной волны, возникает напряжение $u = El$, получаем удельную дисперсию выходного напряжения:

$$\overline{u_0^2} = 320\pi^2 (l/\lambda)^2 kT. \quad (2.23)$$

Если ввести так называемое сопротивление излучения (Ом) вибратора Герца

$$R_\Sigma = 80\pi^2 (l/\lambda)^2,$$

то из (2.23) получим формулу Найквиста для элементарной приемной антенны:

$$\overline{u_0^2} = W_0 = 4kTR_\Sigma, \text{ В}^2/\text{Гц}. \quad (2.24)$$

Здесь температура T является параметром равновесной среды, через которую распространяются электромагнитные волны. В сущности это справедливо лишь для шумов космического происхождения. Измерения показали, что наиболее «холодные» участки небесного свода имеют температуру порядка нескольких Кельвинов. В то же время температура в направлении радиогалактик и других космических источников шумового радиоизлучения может достигать 10000 К.

Если говорить о естественных помехах земного происхождения, то подавляющая часть мощности этого шума сосредоточена на частотах ниже 30 МГц. Для того чтобы оставить неизменным вид формулы (2.24), вводят шумовую температуру $T_{\text{ш}}$, зависящую от частоты. Спектральный состав земных помех таков, что на частотах порядка 1 МГц температура $T_{\text{ш}}$ может достигать $3 \cdot 10^8$ К. Основные источники земных помех – грозовые разряды и процессы коммутации в мощных электрических цепях.

2.6. Фликер-шум

В некоторых приборах на очень низких частотах ($\omega < 0,1$ Гц ÷ 1 кГц) возникают шумы, для которых $W(\omega) \neq \text{const}$. Для этих шумов, называемых фликер-шумами, обычно

$$W_F(\omega) \approx \frac{I^\gamma}{\omega^\alpha}, \quad \gamma \approx 2, \quad \alpha \approx 1.$$

где I – сила протекающего тока [1]. Дисперсия таких шумов бесконечно велика и теория стационарных процессов к ним не применима. Относительно удовлетворительное описание этих шумов удается построить при

использовании СП со стационарными приращениями. Однако законченной модели фликер-шумов пока нет.

Физически происхождение фликер-шумов обычно связывают со старением электронных приборов, когда, например, с катода вылетают не только электроны, но и более крупные образования.

Шум со спектром такого же вида наблюдается не только в электронных лампах, но и в ряде других проводников: в гранулированных сопротивлениях (в интервале частот от долей герц до нескольких мегагерц), в контактах, в полупроводниковых приборах - германиевых и кремниевых детекторах, фотосопротивлениях, контактных фотоэлементах, термисторах и т. п. (так называемый избыточный шум полупроводников), в газоразрядных приборах и в электролитах (элементах и аккумуляторах). Таким образом, во многих совершенно различных проводниках обнаруживается наличие низкочастотного шума [3].

Глава 3. Преобразования случайных процессов в линейных системах

Случайные процессы в радиофизике, какого бы они ни были происхождения, исследуются с помощью радиоэлектронных систем. Эти системы включают в себя как пассивные, так и активные элементы. Проходя через них, сигналы, несущие информацию о СП, искажаются. К полезным составляющим добавляются новые шумы, искажается спектральный состав и форма сигналов. Понимание происходящих изменений важно для правильной интерпретации данных и управления ими. В ряду всех возможных систем на первом месте стоят линейные системы как вносящие минимальные искажения. С них и начнем.

3.1. Основные соотношения из теории цепей

Принцип классификации систем основан на том, что различные системы по-разному ведут себя при подаче на вход суммы нескольких сигналов [4]. Система называется *линейной*, если оператор \mathbf{T} системы таков, что справедлив *принцип суперпозиции*, т.е. выполняется соотношение

$$\zeta(t) = \mathbf{T} \left[\sum_{n=1}^N c_n \xi_n(t) \right] = \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{T} [\xi_n(t)],$$

где коэффициенты c_n могут быть постоянными или случайными величинами, не зависящими от t .

Если эти условия не выполняются, то говорят, что система является *нелинейной*.

Линейные системы обычно описываются с помощью простейших системных функций, например импульсной характеристики, переходной характеристики, передаточной функции, функции включения.

Импульсная характеристика. Пусть некоторая линейная стационарная система описывается оператором \mathbf{T} . По определению, *импульсной характеристикой* системы называется функции $h(t)$, являющаяся откликом системы на входной сигнал $\delta(t)$ -импульс (рис.26) . Это означает, что

$$h(t) = \mathbf{T} \delta(t).$$

Импульсная характеристика, так же как и порождающая ее дельта-функция, есть результат идеализации. С физической точки зрения импульсная характеристика приближенно отображает реакцию системы на входной импульсный сигнал произвольной формы с единичной площадью. Условием является то, что длительность этого сигнала пренебрежимо мала по сравнению с характерным временным масштабом системы.

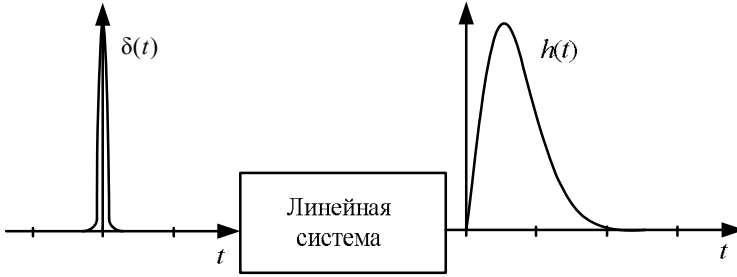


Рис.26. К пояснению понятия импульсной характеристики

Интеграл Дюамеля. Входной сигнал допускает представление вида

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t')\delta(t-t')dt'.$$

Отвечающая ему выходная реакция

$$\zeta(t) = T\xi(t) = T \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t')\delta(t-t')dt'.$$

Линейный оператор T на основании принципа суперпозиции может быть внесен под знак интеграла. Далее, оператор T «действует» лишь на величины, зависящие от текущего времени t , но не от переменной интегрирования t' . Поэтому

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T\delta(t-t')\xi(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')\xi(t')dt'$$

Эта формула называется *интегралом Дюамеля*. Соотношение свидетельствует о том, что выходной сигнал линейной стационарной системы представляет собой свертку двух функций – входного сигнала и импульсной характеристики системы. Формула может быть записана также в виде

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t')\xi(t-t')dt'$$

Переходная характеристика. Пусть на входе линейной стационарной системы действует сигнал, изображаемый функцией Хевисайда $\chi(t)$ или *функцией включения*. Выходную реакцию

$$g(t) = T\chi(t)$$

называют *переходной характеристикой* системы.

Переходная характеристика физически реализуемой системы отлична от нуля лишь при $t \geq 0$. Связь между импульсной и переходной характеристиками:

$$h(t) = T \frac{d}{dt} \chi(t)$$

Оператор дифференцирования d/dt и линейный стационарный оператор T могут меняться местами, поэтому

$$h(t) = \frac{d}{dt} [T\chi(t)] = \frac{dg}{dt}$$

или

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(t') dt'$$

Частотный коэффициент передачи. При исследовании систем особый интерес представляют такие входные сигналы, которые, будучи преобразованы системой, остаются неизменными по форме. Если имеется равенство

$$\zeta(t) = T\xi(t) = \lambda\xi(t),$$

то $\xi(t)$ является *собственной функцией* системного оператора T , а число λ , в общем случае комплексное, – его *собственным значением*.

Комплексный сигнал $\xi(t) = \exp(i\omega t)$ при любом значении частоты ω есть собственная функция линейного стационарного оператора.

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\omega(t-t')\} h(t') dt' = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t') \exp\{-i\omega t'\} dt' \right] \exp(i\omega t)$$

Отсюда видно, что собственным значением системного оператора является функция

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt,$$

называемая *частотным коэффициентом передачи* системы. Функция $|H(\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой фильтра (АЧХ). Частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика линейной стационарной системы связаны между собой преобразованием Фурье. Поэтому, зная функцию $H(\omega)$, можно определить импульсную характеристику

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(i\omega t) dt.$$

3.2. Линейная фильтрация

Простейшей линейной системой является линейный фильтр, имеющий передаточную функцию $H(\omega)$ как реакцию на монохроматический сигнал с частотой ω [1].

Если на вход линейной системы воздействует случайный сигнал $\xi(t)$ со спектральной плотностью $W_\xi(\omega)$, то выходной сигнал $\zeta(t)$ определяется интегралом Дюамеля:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')\xi(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\xi(t-\tau)d\tau. \quad (3.1)$$

Если входной сигнал – случайный процесс, то выходной процесс тоже СП. Будем считать, что $\xi(t)$ – стационарный СП.

Напишем равенство (3.1) для двух моментов времени t_1 и t_2 , перемножим левые и правые части полученных равенств и результат статистически усредним. Поменяв местами операции интегрирования и статистического усреднения, получим для корреляционной функции выходного процесса выражение

$$K_\zeta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)K_\xi(t_2 - t_1 + \tau_1 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 = K_\zeta(t_2 - t_1) = K_\zeta(\tau),$$

где $\tau = t_2 - t_1$. Видно, что выходной СП оказывается также стационарным.

Рассчитаем энергетический спектр выходного процесса как преобразование Фурье от полученной корреляционной функции

$$W_\zeta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\zeta(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau)d\tau \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega(\tau_2 - \tau_1)]h(\tau_1)h(\tau_2)K_\xi(\tau + \tau_1 - \tau_2)\exp[-i\omega(\tau_1 - \tau_2)]d\tau_1d\tau_2.$$

Меняя местами порядок интегрирования, получаем

$$W_\zeta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau_2)h(\tau_2)d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\tau_1)h(\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\omega(\tau + \tau_1 - \tau_2)] \times \\ \times K_\xi(\tau + \tau_1 - \tau_2)d\tau = H(i\omega)H(-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t')K_\xi(t')dt',$$

$$W_\zeta(\omega) = W_\xi(\omega)|H(\omega)|^2. \quad (3.2)$$

Здесь $W_\xi(\omega)$ – энергетический спектр входного процесса. Из этой формулы следует, что после линейной фильтрации энергетический спектр СП может только сужаться, но не расширяться.

Согласно соотношению неопределенности интегральная ширина ЭС обратно пропорциональна интегральному масштабу корреляции:

$$\Omega_{\zeta} \tau_{\zeta} = \frac{\pi}{2} \frac{W_{\zeta}(0)}{\max W_{\zeta}(\omega)}.$$

Уменьшение ширины энергетического спектра приведет к увеличению масштаба корреляции. Таким образом, после линейной фильтрации корреляционные связи СП только расширяются.

3.3. Интегральные характеристики линейного фильтра

Рассматривая квадрат АЧХ $|H(\omega)|^2$ как некую энергетическую характеристику линейного фильтра, введем понятие энергетического отклика фильтра как обратное преобразование Фурье от неё [1]:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) H^*(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Эта характеристика обычно используется в теории *согласованной фильтрации* и теории распознавания образов. Согласованная фильтрация подразумевает разработку, применение согласованных с сигналом фильтров. В идеале согласованный фильтр – это такое устройство, которое реагирует (пропускает, вырабатывает определенный сигнал на выходе, то есть как-то отзывается) только на тот сигнал, с которым он согласован. Для описания линейного фильтра можно ввести понятия интегральной полосы пропускания Ω_f и интегральной длительности отклика τ_f фильтра:

$$\Omega_f = \frac{1}{\max |H(\omega)|^2} \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega, \quad \tau_f = \frac{1}{\max G(t)} \int_0^{\infty} G(t) dt.$$

Произведение интегральной полосы пропускания и интегральной длительности отклика фильтра удовлетворяют соотношению неопределенности

$$\Omega_f \tau_f = \frac{\pi}{2} \frac{|H(0)|^2}{\max |H(\omega)|^2} \frac{G(0)}{\max G(t)} = \frac{\pi}{2} \frac{|H(0)|^2}{\max |H(\omega)|^2}.$$

Это соотношение показывает, что чем уже полоса пропускания, тем шире длительность отклика фильтра. И наоборот.

3.4. Преобразование белого шума линейным фильтром

Представим себе, что на вход линейного фильтра подается белый шум [1]. Согласно (3.2), на выходе появится СП, энергетический спектр которого равен

$$W_{\zeta}(\omega) = W_0 |H(\omega)|^2.$$

Он с точностью до постоянного множителя повторяет квадрат АЧХ фильтра. Это соотношение дает способ практической оценки АЧХ систем с помощью шумовых сигналов. Важно, что выходной СП стал не белым шумом, а окрашенным. Сигнал, который был δ -коррелирован на входе, имеет в этом случае на выходе конечную корреляционную функцию с конечным значением дисперсии. Это свойство широко используется на практике при моделировании случайных процессов с заданной корреляционной функцией. Для любой заданной корреляционной функции всегда можно подобрать соответствующий линейный фильтр, который из белого шума сделает требуемый СП.

Рассмотрим теперь вопрос: сохранил ли выходной СП информацию о входном белом шуме? Для ответа на этот вопрос найдем взаимную корреляционную функцию входного и выходного СП:

$$K_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = \langle \delta\xi(t_1)\delta\zeta(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - t') K_{\xi}(t' - t_1) dt' = W_0 h(t_2 - t_1).$$

Оказывается, что с точностью до постоянного множителя эта кросс-корреляционная функция повторяет ИХ фильтра (рис.27). Это дает статистический способ измерения ИХ системы: нужно лишь оценить КФ входного и выходного процессов.

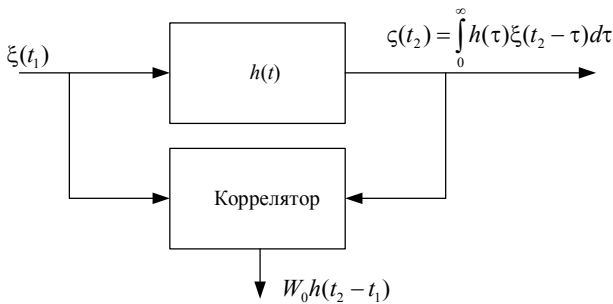


Рис.27. Использование белого шума для измерения импульсной характеристики линейной системы

Сделаем одно важное замечание. Если на вход линейной системы с полосой пропускания Ω_f подать не белый шум, а окрашенный СП с шириной энергетического спектра $\Omega_0 \gg \Omega_f$, то эта система просто не отличит СП от белого шума. В соответствии с соотношением неопределенности это эквивалентно условию $\tau_0 \ll \tau_f$ для масштаба корреляции и длительности отклика системы. Выполнение этих условий существенно расширяет об-

ласть применимости сформулированных выше способов исследования линейных систем.

3.5. Нормализация случайного процесса

Белый шум, как правило, это уже нормальный процесс. Пропускание его через линейный фильтр не изменит его нормальности. Если входной СП не является белым шумом, но выполняются условия $\Omega_0 \gg \Omega_f$ или $\tau_0 \ll \tau_f$, то линейный фильтр не отличит его от такового. По крайней мере, с точки зрения корреляции и энергетического спектра. Это дает основания надеяться, что в отношении закона распределения ситуация будет аналогична: при выполнении упомянутых условий любой процесс будет нормализоваться. Приведем доказательство этого [1].

Разобьем интеграл

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t')\xi(t')dt'$$

на сумму интегралов по отрезкам длиной порядка интегрального масштаба корреляции τ_0 входного процесса. Объединим все интегралы по четным отрезкам в одно слагаемое, нечетным отрезкам в другое слагаемое:

$$\zeta_1(t) = \sum_n \int_{t_0+2n\tau_0}^{t_0+2(n+1)\tau_0} h(t-t')\xi(t')dt',$$

$$\zeta_2(t) = \sum_m \int_{t_0+2m\tau_0+\tau_0}^{t_0+2(m+1)\tau_0+\tau_0} h(t-t')\xi(t')dt'.$$

При выполнении условия $\tau_0 \ll \tau_f$ в каждой сумме будет достаточно много независимых и почти равнозначных слагаемых и, значит, для каждой из сумм будут выполняться условия центральной предельной теоремы (рис.28). Каждая из сумм будет распределена по нормальному закону, но тогда и полный процесс

$$\zeta(t) = \zeta_1(t) + \zeta_2(t)$$

будет распределен по нормальному закону.

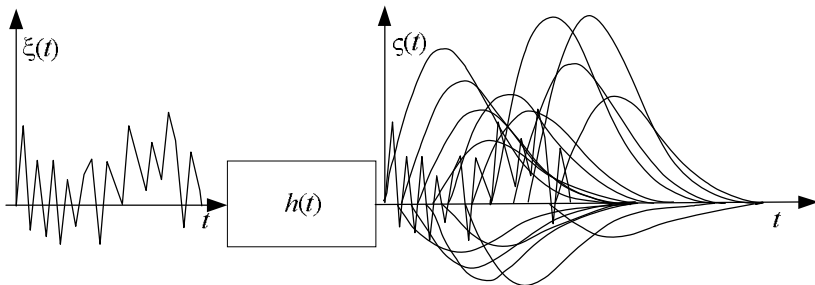


Рис.28. Пояснение нормализации случайного процесса

3.6. Корреляция шумов на выходе линейных систем

Пусть на вход двух различных линейных фильтров подается один и тот же стационарный СП [1]. На выходе их будут получаться два различных СП:

$$\zeta_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t')\xi(t-t')dt' \quad \text{и} \quad \zeta_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t'')\xi(t-t'')dt''.$$

Найдем их взаимную корреляцию:

$$K_{1,2}(t_1, t_2) = \langle \delta\zeta_1(t_1)\delta\zeta_2(t_2) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} h_1(t')h_2(t'')K_{\xi}(t_1 - t_2 - t' + t'')dt'dt''.$$

Эта функция зависит от разности времен $\tau = t_1 - t_2$, и поэтому можно, используя спектральную теорию, записать

$$K_{1,2}(t_1, t_2) = \langle \delta\zeta_1(t_1)\delta\zeta_2(t_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega)H_2^*(\omega)W_{\xi}(\omega)\exp\{i\omega\tau\}d\omega.$$

Очевидно, что если АЧХ обоих фильтров не пересекаются, то подынтегральная функция равна нулю, а это значит, что выходные процессы фильтров некоррелированы. И это в том случае, когда на входе был один и тот же случайный процесс. При выполнении условия $\tau_0 \ll \tau_f$ для каждого из фильтров это равнозначно статистической независимости СП на их выходах. Этот эффект широко используется в создании эффекта псевдостереофонии, когда один и тот же звуковой сигнал подается на фильтр низких и на фильтр высоких частот и выходные сигналы воспроизводятся разнесенными в пространстве динамиками. Возникает полное впечатление стереофонического звучания.

В том случае, если АЧХ фильтров перекрываются, то взаимная корреляционная функция не равна нулю.

Пример 11. Работа пропорционально-интегрирующего фильтра (рис.29 а и б) описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\zeta(t) = \frac{t_1 p + 1}{t_2 p + 1} \xi(t) = T(p) \xi(t) \quad (3.3)$$

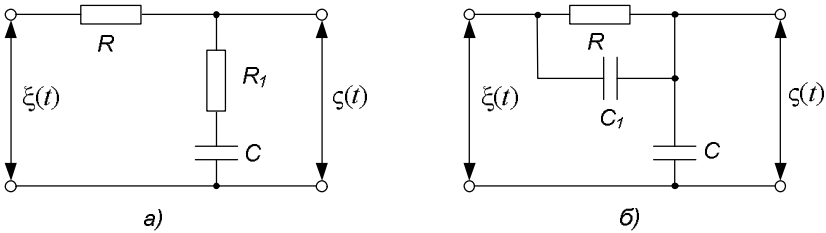


Рис.29. Два варианта схемы пропорционально-интегрирующего фильтра

Для фильтра, изображенного на рисунке а, коэффициенты t_1 и t_2 соответственно равны:

$$t_2 = C(R + R_1), \quad t_1 = R_1 C,$$

а для фильтра на рисунке б:

$$t_2 = R(C + C_1), \quad t_1 = R C_1,$$

На вход фильтра поступает случайное напряжение $\xi(t)$, представляющее собой стационарный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и корреляционной функцией $K_\xi(\tau) = W_0 \delta(\tau)$.

Определить спектральную плотность $W_\zeta(\omega)$ и корреляционную функцию $K_\zeta(\tau)$ напряжения $\zeta(t)$ на выходе фильтра [13].

Решение. В соответствии с выражением (3.3) комплексная частотная характеристика пропорционально-интегрирующего фильтра

$$H(\omega) = T(p = i\omega) = \frac{1 + i\omega t_1}{1 + i\omega t_2},$$

а квадрат ее модуля определяется выражением

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1 + (\omega t_1)^2}{1 + (\omega t_2)^2}.$$

Подставляя его в формулу

$$W_\zeta(\omega) = W_0 |H(\omega)|^2,$$

находим спектральную плотность процесса на выходе фильтра:

$$W_{\zeta}(\omega) = W_0 \frac{1 + (\omega t_1)^2}{1 + (\omega t_2)^2}.$$

График спектральной плотности $W_{\zeta}(\omega)$ на выходе пропорционально-интегрирующего фильтра представлен на рис.30.

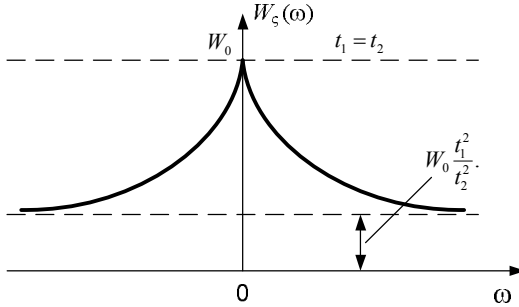


Рис.30. Спектральная плотность на выходе пропорционально-интегрирующего фильтра

Видно, что при $\omega \rightarrow \infty$ и $t_1 \neq t_2$ спектральная плотность стремится к некоторому постоянному уровню, равному $W_0 \frac{t_1^2}{t_2^2}$. Если постоянные времени равны, то в этом случае процесс на выходе фильтра равен входному белому шуму. При $t_1 = 0$ пропорционально-интегрирующий фильтр ведет себя как обычная интегрирующая цепь RC.

Для вычисления корреляционной функции $K_{\zeta}(\tau)$ воспользуемся формулой Винера – Хинчина:

$$K_{\zeta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\zeta}(\omega) \exp\{i\omega\tau\} d\omega.$$

После подстановки имеем

$$K_{\zeta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} W_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + (\omega t_1)^2}{1 + (\omega t_2)^2} \exp\{i\omega\tau\} d\omega.$$

Производя далее замену

$$\exp\{i\omega\tau\} = \cos \omega\tau + i \sin \omega\tau,$$

находим

$$K_{\zeta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} W_0 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + (\omega t_1)^2}{1 + (\omega t_2)^2} \cos \omega\tau d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + (\omega t_1)^2}{1 + (\omega t_2)^2} \sin \omega\tau d\omega \right].$$

Второй интеграл в силу нечетности подынтегральной функции и симметричности пределов равен нулю, поэтому преобразовав подынтегральную функцию первого интеграла, запишем

$$K_{\zeta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} W_0 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega \tau}{1 + (\omega t_2)^2} d\omega + \frac{t_1^2}{t_2^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega \tau}{1 + (\omega t_2)^2} d\omega \right] \right\}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau d\omega = \delta(\tau),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega \tau}{1 + (\omega t_2)^2} d\omega = \frac{\pi}{t_2} \exp\left\{-\frac{|\tau|}{t_2}\right\},$$

окончательно получаем

$$K_{\zeta}(\tau) = W_0 \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 \delta(\tau) + \frac{W_0}{2t_2} \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2} \exp\left\{-\frac{|\tau|}{t_2}\right\},$$

$$\frac{W_0}{2t_2} \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2} \exp\left\{-\frac{|\tau|}{t_2}\right\}$$

При $t_1 = t_2$ имеем

$$K_{\zeta}(\tau) = W_0 \delta(\tau) = K_{\xi}(\tau).$$

В случае $t_1 = 0$

$$K_{\zeta}(\tau) = \frac{W_0}{2t_2} \exp\left\{-\frac{|\tau|}{t_2}\right\}.$$

что согласуется с результатами примера, рассмотренного при изучении марковских процессов. График корреляционной функции приведен на рис.31.

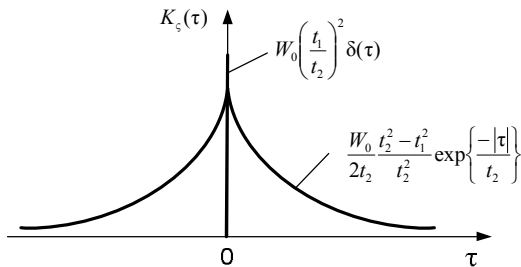


Рис.31. Корреляционная функция на выходе пропорционально-интегрирующего фильтра

Пример 12. На цепь, составленную из последовательно соединенных индуктивности L и сопротивления R (рис.32) воздействует напряжение $\xi(t)$, представляющее собой белый шум с нулевым математическим ожиданием $m_\xi = 0$ и спектральной плотностью

$$W_\xi(\omega) = W_0, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

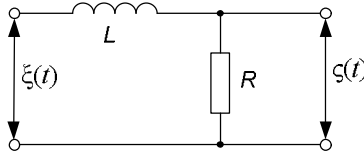


Рис.32. Цепочка RL

Найти спектральную плотность $W_\zeta(\omega)$ и корреляционную функцию $K_\zeta(\tau)$ напряжения $\zeta(t)$ на сопротивлении R [13].

Решение. Комплексная частотная характеристика исследуемой цепи определяется соотношением

$$H(\omega) = \frac{R}{R + i\omega L},$$

а квадрат ее модуля

$$|H(\omega)|^2 = \frac{R^2}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Спектральная плотность напряжения $\zeta(t)$

$$W_\zeta(\omega) = W_\xi(\omega) |H(\omega)|^2 = W_0 \frac{R^2}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

По спектральной плотности согласно формуле Винера – Хинчина находим корреляционную функцию

$$K_\zeta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\zeta(\omega) \exp\{i\omega\tau\} d\omega = W_0 \frac{R}{2L} \exp\left\{ \frac{-|\tau|R}{L} \right\}.$$

Аналогично решаются все задачи, связанные с воздействием на линейные системы белого шума.

3.7. Вероятностная сходимость случайной функции

Имея дело со случайными процессами, описываемыми случайными функциями времени, мы должны пользоваться основными понятиями анализа применительно к таким функциям, т.е. свойством непрерывности, производной и интегралом. Все эти понятия в анализе определялись как

пределы детерминированных функций. Понимание сходимости случайной функции к пределу, таким образом, оказывается принципиальным для обобщения действий математического анализа на случайные функции. Очевидно, что такая сходимость может иметь различный, но в любом случае вероятностный характер. Существует несколько основных типов вероятностной сходимости [11].

1. **Сходимость в среднеквадратическом смысле (с.к.с.).** Случайная функция $\xi(t)$ сходится к случайной величине α при $t \rightarrow t_0$ в среднеквадратическом смысле, если существует следующий предел от детерминированной функции:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \langle |\xi(t) - \alpha|^2 \rangle = 0.$$

Сходимость в среднеквадратическом смысле часто записывают как

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t) = \alpha,$$

где обозначение \lim представляет собой аббревиатуру от английских слов *limit in the mean square*.

2. **Сходимость по вероятности.** Случайная функция $\xi(t)$ сходится к α по вероятности при $t \rightarrow t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P(|\xi(t) - \alpha| > \varepsilon) = 0.$$

3. **Сходимость почти наверное (с вероятностью единица).** Случайная функция $\xi(t)$ сходится к пределу α при $t \rightarrow t_0$ почти наверное, если

$$P(\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \alpha^*) = 1,$$

где $x(t)$ – некоторая реализация случайного процесса, а α^* – некоторое значение случайной величины α . Сходимость почти наверное означает, что произвольно выбранная реализация $x(t)$ случайного процесса $\xi(t)$ с вероятностью равной единице сходится к одному из возможных значений случайной величины α . Среди бесконечного ансамбля реализаций можно, конечно, найти и такие, которые не сходятся к одному из возможных значений α , но их совокупная вероятность равна нулю.

Последнее понятие используется редко. Первое применяется на практике. Его выполнение влечет выполнение равенства по вероятности. В основе его лежит использование *неравенства Чебышева*, имеющего место для любых СП:

$$P\left\{|\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma_\xi^2}{\varepsilon^2}.$$

Здесь $\langle \xi(t) \rangle$, σ_ξ^2 – среднее значение и дисперсия процесса $\xi(t)$.

Из этого неравенства следует, что

$$P\{\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle \geq k\sigma_\xi\} \leq \frac{1}{k^2},$$

то есть отклонение $\xi(t)$ от его среднего, значительно превышающее сред-неквадратическое, маловероятно.

Пример 13. На основе неравенства Чебышева найти вероятность того, что отклонение случайной величины $\xi(t)$ от своего среднего значения $\langle \xi(t) \rangle$ будет больше утроенного значения среднеквадратического отклоне-ния $3\sigma_\xi$.

Решение. Подставим в неравенство Чебышева заданные величины

$$P(|\xi - \langle \xi \rangle| > 3\sigma) \leq \frac{\sigma_\xi^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}.$$

Необходимо подчеркнуть, что полученное значение вероятности явля-ется верхней границей, справедливой для любого закона распределения вероятностей.

Для нормального закона вероятность выхода случайной величины за пределы $3\sigma_\xi$ равна 0.003; соответствующее событие считается практически невозможным.

3.8. Условие непрерывности случайных процессов

Случайный процесс $\xi(t)$ непрерывен в среднеквадратическом смысле, если

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \xi(t + \Delta t) = \xi(t),$$

что означает существование предела

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle [\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]^2 \rangle = 0.$$

Определим необходимые и достаточные условия, которым должен удо-влетворять СП, чтобы это выполнялось [1]. Пусть для простоты $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Распишем явно выражение, стоящее под знаком предела:

$$\langle [\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]^2 \rangle = \sigma^2(t + \Delta t) + \sigma^2(t) - 2K(t, t + \Delta t).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} K(t, t + \Delta t) = K(t, t) = \sigma^2(t). \quad (3.4)$$

Это условие непрерывности КФ при совпадающих аргументах. Это есть необходимое условие непрерывности в с.к.с. С другой стороны, если

выполняется (3.4), то автоматически выполняется (3.5). Значит, условие (3.4) есть ещё и достаточное условие непрерывности в с.к.с.

Для стационарных СП необходимое и достаточное условие непрерывности процесса в с.к.с. записывается как условие непрерывности КФ при нулевом аргументе:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} K(\Delta t) = K(0) = \sigma^2. \quad (3.5)$$

Замечание. Непрерывность случайного процесса не означает, что реализации процесса являются непрерывными функциями. Например, дробовой шум представляет собой последовательность дискретных импульсов, т.е. каждая реализация не является непрерывной функцией, хотя процесс в целом будет непрерывным. Смысл непрерывности СП заключается в том, что вероятность наличия разрыва произвольно выбранной реализации в точке равна нулю [11].

3.9 Условия дифференцируемости случайных процессов

СП дифференцируем в среднеквадратическом смысле (с.к.с.), если выполняется равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left[\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \xi'(t) \right]^2 \right\rangle = 0. \quad (3.6)$$

Случайный процесс $\xi'(t)$ при этом называется производной для процесса $\xi(t)$.

Для выяснения условий, необходимых и достаточных для дифференцируемости СП [1], построим вспомогательный процесс вида

$$\Delta r(t, \Delta t) \equiv \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t}. \quad (3.7)$$

Очевидно, что условие дифференцируемости (3.6) есть условие непрерывности процесса (3.7) по переменной Δt при $\Delta t \rightarrow 0$. Таким образом, с учетом результата предыдущего пункта необходимым и достаточным условием дифференцируемости СП $\xi(t)$ является условие непрерывности корреляционной функции вспомогательного процесса

$$K_{\Delta r}(\Delta t_1, \Delta t_2) \equiv \langle \Delta r(t, \Delta t_1) \Delta r(t, \Delta t_2) \rangle,$$

т.е. требование

$$\lim_{\substack{\Delta t_1 \rightarrow 0 \\ \Delta t_2 \rightarrow 0}} K_{\Delta r}(\Delta t_1, \Delta t_2) < \infty.$$

Распишем в явном виде

$$K_{\Delta r}(\Delta t_1, \Delta t_2) = \frac{K(t + \Delta t_1, t + \Delta t_2) - K(t + \Delta t_1, t) + K(t, t) - K(t, t + \Delta t_2)}{\Delta t_1 \Delta t_2}.$$

Условием существования предела от этой функции является непрерывность и существование самой корреляционной функции, а также её производных до второго порядка включительно

$$K(t_1, t_2), \quad \frac{\partial}{\partial t_1} K(t_1, t_2), \quad \frac{\partial}{\partial t_2} K(t_1, t_2), \quad \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K(t_1, t_2)$$

при совпадающих аргументах $t_1 = t_2$. Это есть необходимые и достаточные условия дифференцируемости СП в с.к.с.

Для стационарных СП условия дифференцируемости сводятся к условиям существования конечных значений:

$$K(\tau = 0), \quad K'(\tau = 0), \quad K''(\tau = 0).$$

3.10. Свойства производной случайного процесса

1. Последовательность операций усреднения и дифференцирования можно менять местами [1]:

$$\langle \xi'(t) \rangle = \frac{d}{dt} \langle \xi(t) \rangle.$$

Для доказательства справедливости этого утверждения образуем процесс

$$\eta(t) = \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \xi'(t)$$

и запишем для него очевидное неравенство

$$\sigma_\eta^2 = \langle \eta^2(t) \rangle - \langle \eta(t) \rangle^2 \geq 0,$$

или, что то же,

$$\langle \eta^2(t) \rangle \geq \langle \eta(t) \rangle^2.$$

По условию дифференцируемости процесса (3.6) левая часть последнего неравенства в пределе обращается в нуль, и мы имеем

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} - \xi'(t) \right)^2 \right\rangle = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\langle \xi(t + \Delta t) \rangle - \langle \xi(t) \rangle}{\Delta t} - \langle \xi'(t) \rangle \right]^2 = \left[\frac{d \langle \xi(t) \rangle}{dt} - \langle \xi'(t) \rangle \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что выражение в квадратных скобках равно нулю, а это есть доказываемое равенство.

2. Корреляционная функция процесса и его производной вычисляется путем дифференцирования КФ самого процесса:

$$\langle \xi(t_1)\xi'(t_2) \rangle = \frac{\partial}{\partial t_2} K(t_1, t_2), \quad \langle \xi'(t_1)\xi(t_2) \rangle = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} K(t_1, t_2).$$

Получается это свойство в результате обобщения первого свойства. Для стационарных процессов перечисленные свойства упрощаются:

$$\begin{aligned} \langle \xi'(t) \rangle &= 0, \quad \langle \xi(t_1)\xi'(t_2) \rangle = \frac{d}{d\tau} K(\tau), \quad \langle \xi'(t_1)\xi(t_2) \rangle = -\frac{d}{d\tau} K(\tau), \\ \langle \xi'(t_1)\xi'(t_2) \rangle &= -\frac{d^2}{d\tau^2} K(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1. \end{aligned}$$

3. Случайный процесс и его производная в совпадающие моменты времени некоррелированы:

$$\langle \xi(t)\xi'(t) \rangle = K'(0) = 0.$$

Это следует из того, что при нулевом разnose корреляция самого процесса максимальна. Из этого свойства вытекает, например, что фаза случайного сигнала и его частота некоррелированы в совпадающие моменты времени.

4. Энергетический спектр производной случайного процесса связан с энергетическим спектром исходного процесса соотношением

$$W_{\xi'}(\omega) = \omega^2 W_{\xi}(\omega).$$

Получается оно из свойства 2 с использованием теоремы Винера – Хинчина.

5. Для того чтобы СП был дифференцируемым, необходимо, чтобы энергетический спектр исходного процесса убывал быстрее, чем

$$W_{\xi}(\omega) < \omega^3 \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty.$$

Следует это свойство из требования конечности дисперсии производной и сходимости интеграла:

$$\sigma_{\xi'}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_{\xi}(\omega) d\omega.$$

6. При дифференцировании стационарность СП не нарушается.

7. При дифференцировании нормальность СП не нарушается.

Пример 14. На интегрирующую RC (рис.33) цепочку действует белый гауссовский шум (БГШ) $\xi(t)$, имеющий нулевое среднее значение и корреляционную функцию $K_\xi(\tau) = W_0\delta(\tau)$.

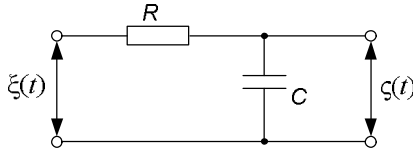


Рис.33. Цепочка RC

Частотная характеристика:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}.$$

Квадрат частотной характеристики

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\alpha)^2}, \text{ где } \alpha = \frac{1}{RC}.$$

Ширина полосы пропускания:

$$\Omega_f = \frac{1}{\max |H(\omega)|^2} \int_0^\infty |H(\omega)|^2 d\omega = \int_0^\infty \frac{1}{1 + (\omega/\alpha)^2} d\omega = \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Спектральная плотность мощности, корреляционная функция и нормированная корреляционная функция процесса на выходе интегрирующей схемы:

$$W_\zeta(\omega) = W_0 |H(\omega)|^2 = \frac{W_0}{1 + (\omega/\alpha)^2},$$

корреляционная функция найдена в примере 8:

$$K_\zeta(\tau) = \frac{\alpha W_0}{2} \exp(-\alpha|\tau|),$$

$$R_\zeta(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|).$$

Интервал корреляции процесса на выходе интегрирующей схемы:

$$\tau_0 = \int_0^\infty \exp(-\alpha|\tau|) d\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2\Omega_f}.$$

Хотя процесс на выходе схемы в этом случае непрерывен в среднеквадратическом, он не дифференцируем. Действительно, средняя мощность процесса на выходе

$$K_{\zeta}(0) = \frac{\alpha W_0}{2} = \frac{W_0 \Omega_f}{\pi}$$

конечна, а интеграл

$$\sigma_{\zeta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 W_{\zeta}(\omega) d\omega = 2W_0 \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{1 + (\omega/\alpha)^2} d\omega$$

расходится (производная корреляционной функции терпит разрыв при $\tau = 0$) [6].

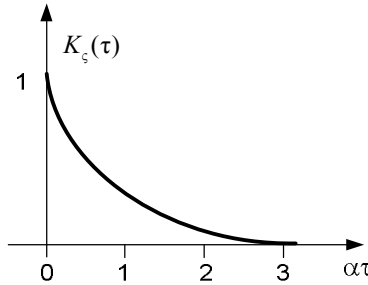


Рис.34. Корреляционная функция

Пример 15. Определить корреляционную функцию $K_{\xi}(\tau)$ случайного напряжения $\xi(t)$ на входе линейной цепи RL (рис.35) [13] при условии, что выходное напряжение $\zeta(t)$ представляет собой стационарный гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией

$$K_{\zeta}(\tau) = D_{\zeta} \exp(-\alpha\tau^2). \quad (3.8)$$

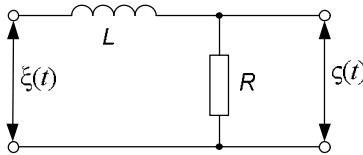


Рис.35. Цепочка LR

Решение. Случайный процесс $\xi(t)$ на входе рассматриваемой линейной системы определяется уравнением

$$\xi(t) = \frac{L}{R} \frac{d}{dt} \zeta(t) + \zeta(t) = \eta(t) + \zeta(t),$$

в соответствии с чем

$$\begin{aligned}
 K_{\xi}(\tau) &= \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \langle [\eta(t) + \zeta(t)] [\eta(t+\tau) + \zeta(t+\tau)] \rangle = \\
 &= K_{\eta}(\tau) + K_{\zeta}(\tau)
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Учитывая, что

$$\eta(t) = \frac{L}{R} \frac{d}{dt} \zeta(t),$$

находим:

$$K_{\eta}(\tau) = -\left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} K_{\zeta}(\tau) = 2\alpha D_{\zeta} \left(\frac{L}{R}\right)^2 (1 - 2\alpha\tau^2) \exp(-\alpha\tau^2). \tag{3.10}$$

После подстановки (3.8) и (3.10) в (3.9) получаем

$$K_{\xi}(\tau) = D_{\zeta} \left[1 + 2\alpha \left(\frac{L}{R}\right)^2 (1 - 2\alpha\tau^2) \right] \exp(-\alpha\tau^2).$$

Глава 4. Преобразования случайных процессов в нелинейных системах

Выделение информации из переносящих ее сигналов невозможно без использования нелинейных преобразований. В простейшем случае это может быть простая демодуляция сигналов. Так или иначе, нелинейные преобразования сигналов и процессов являются типичной операцией в радиофизике и нуждаются в отдельном рассмотрении. Конечно, любое нелинейное преобразование в малом диапазоне изменения сигналов может быть линеаризовано, т.е. заменено близким линейным преобразованием. Однако в общем случае необходимо либо слишком большое множество аппроксимирующих линейных функций, либо это просто невозможно.

В общем случае теория нелинейных преобразований не имеет таких простых представлений, как это делается для линейных преобразований. Более или менее законченной является теория безынерционных преобразований. Этим мы и ограничимся [1].

4.1. Корреляционная функция на выходе плавных нелинейностей. Двусторонний квадратичный детектор

Пусть на вход некоторого нелинейного элемента поступает стационарный СП $\xi(t)$. Нелинейность элемента описывается плавной детерминированной функцией

$$y = g(x).$$

Безынерционность преобразования предполагает, что выходной сигнал появляется на выходе элемента сразу без какой-либо задержки, как только появился входной сигнал. На выходе такого идеализированного элемента мы будем иметь СП, который получается как

$$\zeta(t) = g(\xi(t)).$$

Рассчитать любые статистические моменты выходного процесса относительно просто, если известен закон распределения входного случайного процесса, например:

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t) \rangle &= \langle g(\xi(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(\xi) d\xi; \\ \langle \zeta(t_1) \zeta(t_2) \rangle &= \langle g(\xi(t_1)) g(\xi(t_2)) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1) g(\xi_2) f(\xi_1, \xi_2; \tau = t_1 - t_2) d\xi_1 d\xi_2 \equiv m_{\zeta}(\tau). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Выходной СП является стационарным. Вычисление моментов требует лишь аналитического или численного вычисления интегралов. На практике этот закон распределения известен не всегда. Возникает вопрос: нельзя ли оценить, например, корреляционную функцию (КФ) выходного СП, если известна КФ входного процесса?

Для ответа на поставленный вопрос попытаемся представить $m_\zeta(\tau)$ в виде ряда по степеням КФ входного СП:

$$m_\zeta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} K_\xi^n(\tau). \quad (4.2)$$

Чтобы получить явное выражение для коэффициентов этого разложения, проведем формальное разложение двумерной плотности распределения в ряд Тейлора:

$$f(\xi_1, \xi_2; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_\xi^n(\tau) \frac{\partial^n}{\partial K_\xi^n(\tau)} \Big|_{K_\xi=0} f(\xi_1, \xi_2; \tau). \quad (4.3)$$

Явное выражение плотности распределения через КФ получается с использованием кумулянтного разложения для ХФ:

$$f(\xi_1, \xi_2; \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u_1, u_2; \tau) \exp(-iu_1\xi_1 - iu_2\xi_2) du_1 du_2;$$

$$\varphi(u_1, u_2; \tau) = \exp \left\{ iu_1 \langle \xi_1 \rangle + iu_2 \langle \xi_2 \rangle - \frac{1}{2} [\sigma^2 \sigma_1^2 + \sigma^2 \sigma_2^2 + 2u_1 u_2 K_\xi(\tau)] + \dots \right\}.$$

Подстановка этих выражений в (4.1) и (4.3) с выполнением интегрирования по частям приводит к представлению (4.2), в котором коэффициенты разложения имеют вид

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n g(\xi_1)}{d\xi_1^n} \frac{d^n g(\xi_2)}{d\xi_2^n} f(\xi_1, \xi_2; \tau) d\xi_1 d\xi_2 \equiv \langle g^{(n)}(\xi_1) g^{(n)}(\xi_2) \rangle$$

при условии, что $K_\xi(\tau) = 0$. Здесь $g^{(n)}(\xi)$ означает n -кратную производную.

Заметим, что для нормальных СП условие $K_\xi(\tau) = 0$ равнозначно статистической независимости, и тогда можно записать

$$a_n = \langle g^{(n)}(\xi_1) g^{(n)}(\xi_2) \rangle = \langle g^{(n)}(\xi) \rangle^2.$$

Таким образом, окончательно можно записать, что

$$m_\zeta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle g^{(n)}(\xi) \rangle^2}{n!} K_\xi^n(\tau).$$

Выделение здесь нулевого члена разложения приводит к явному выражению для КФ выходного процесса:

$$K_{\zeta}(\tau) = m_{\zeta}(\tau) - \langle g(\xi) \rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g^{(n)}(\xi) \rangle^2}{n!} K_{\xi}^n(\tau). \quad (4.4)$$

Рассмотрим в качестве примера, как изменится КФ случайного процесса после прохождения двустороннего квадратичного детектора, осуществляющего нелинейное преобразование вида

$$y = g(x) = ax^2.$$

Простое дифференцирование этой зависимости дает

$$y' = 2ax, \quad y'' = 2a, \quad y''' = 0, \dots$$

В результате имеем

$$K_{\zeta}(\tau) = 2[aK_{\xi}(\tau)]^2.$$

Формула (4.4) достаточно универсальна и особенно эффективна в случае, когда вид нелинейности удастся аппроксимировать полиномом. При этом ряд (4.4) обрывается и удается получить не ряд, а конечную сумму.

4.2. Корреляционная функция на выходе кусочно-ломаных нелинейностей

В случае, когда нелинейность не описывается плавной кривой, формула (4.4) малоэффективна, поскольку ряд не удается оборвать. Для такого случая разработан специальный метод – метод дифференциального уравнения, который для нормальных входных СП часто дает формулы конечного вида. Рассмотрим его суть.

В выражение

$$m_{\zeta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1)g(\xi_2)f(\xi_1, \xi_2; \tau = t_1 - t_2)d\xi_1d\xi_2$$

подставим плотность распределения

$$f(\xi_1, \xi_2; \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u_1, u_2; \tau) \exp(-iu_1\xi_1 - iu_2\xi_2) du_1 du_2.$$

Получим

$$m_{\zeta}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint g(\xi_1)g(\xi_2) \iint \varphi(u_1, u_2; \tau) \exp\{-iu_1\xi_1 - iu_2\xi_2\} du_1 du_2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Перепишем в виде

$$m_{\xi}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint F_1(u_1)F_2(u_2)\varphi(u_1, u_2; \tau)du_1du_2,$$

где прямое преобразование Фурье для $g(\xi)$:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \exp(-iu\xi) d\xi.$$

Обратное преобразование дает выражение для $g(\xi)$:

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(iu\xi) du$$

Для характеристической функции нормального процесса справедливо равенство

$$\frac{\partial^n \varphi(u_1, u_2; \tau)}{\partial K_{\xi}^n} = (-1)^n (u_1 u_2)^n \varphi(u_1, u_2; \tau).$$

Продифференцируем $m_{\xi}(\tau)$

$$\frac{\partial^n}{\partial K_{\xi}^n} m_{\xi}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int (iu_1)^n F_1(u_1) du_1 \int (iu_2)^n F_2(u_2) \varphi(u_1, u_2; \tau) du_2$$

Подставив сюда исходное определение характеристической функции

$$\varphi(u_1, u_2; \tau) = \langle \exp\{i(u_1\xi_1 + u_2\xi_2)\} \rangle$$

и изменив порядок интегрирования и статистического усреднения, можем написать

$$\frac{\partial^n}{\partial K_{\xi}^n} m_{\xi}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\langle \int (iu_1)^n F_1(u_1) \exp(iu_1\xi_1) du_1 \int (iu_2)^n F_2(u_2) \exp(iu_2\xi_2) du_2 \right\rangle.$$

Воспользовавшись свойством преобразования Фурье относительно производной

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (iu)^n F(u) \exp(iu\xi) du = \frac{d^n g(\xi)}{d\xi^n} = g^{(n)}(\xi),$$

запишем окончательную формулу

$$\frac{\partial^n}{\partial K_{\xi}^n} m_{\xi}(\tau) = \langle g^{(n)}(\xi(t_1)) g^{(n)}(\xi(t_2)) \rangle$$

С учетом того, что

$$K_{\xi}(\tau) = m_{\xi}(\tau) - \langle g(\xi) \rangle^2,$$

для корреляционной функции выходного СП можно записать формулу:

$$\frac{d^n}{dK_\xi^n} K_\zeta(\tau) = \langle g^{(n)}(\xi(t_1))g^{(n)}(\xi(t_2)) \rangle. \quad (4.5)$$

Она получена без предположения $K_\xi(\tau) = 0$. Важно подчеркнуть, что при ее получении использовано только предположение о нормальности входного СП.

Значения n и τ – произвольные. При вычислении КФ на выходе нелинейных элементов с кусочно-ломаными нелинейностями нужно брать такое значение n , при котором $g^{(n)}(\xi)$ представляет сумму дельта-функций. Тогда правая часть (4.5) всегда вычисляется. Если выражение, стоящее в правой части, известно или может быть вычислено, то записанную формулу можно рассматривать как дифференциальное уравнение для КФ выходного процесса, представляющую собой функцию от КФ входного процесса. Для однозначности решения этого уравнения необходимо дополнить его начальными условиями при $K_\xi = 0$. В качестве таковых можно взять условия

$$\frac{d^p}{dK_\xi^p} K_\zeta(\tau) = \langle g^{(p)}(\xi(t)) \rangle^2 \quad \text{при } K_\xi = 0 \text{ и } p = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.6)$$

Важно отметить, что, во-первых, для выходного СП сама функция $K_\zeta(\tau) = 0$ при $K_\xi = 0$, а, во-вторых, условие $K_\xi = 0$ равнозначно взятию предела $\tau \rightarrow \infty$.

В качестве проверки работоспособности сформулированного метода рассмотрим случай с двусторонним квадратичным детектором. Согласно выражению

$$y = g(x) = ax^2,$$

имеем, что

$$\frac{d^2}{dK_\xi^2} K_\zeta(\tau) = (2a)^2. \quad (4.7)$$

В качестве начальных условий согласно (4.6) возьмем

$$\frac{d}{dK_\xi} K_\zeta(\tau) = 0, \quad K_\zeta(\tau) = 0$$

при $K_\xi = 0$, т.е. при $\tau \rightarrow \infty$. Как нетрудно проверить, решением (4.7) является функция

$$K_\zeta(\tau) = 2[aK_\xi(\tau)]^2.$$

Высокая эффективность метода для кусочно-ломаных нелинейностей будет ясна из последующих примеров.

4.3. Корреляционная функция на выходе предельного ограничителя

Рассмотрим интересный с точки зрения теории и важный с точки зрения практики вид нелинейности, называемой предельным ограничителем. Предельным ограничителем называется нелинейное устройство, реализующее преобразование вида

$$y = a \cdot \text{sgn}(x) = a(2\chi(x) - 1),$$

где $\chi(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда и a – константа. При таком преобразовании фактически сохраняется только знак входного сигнала.

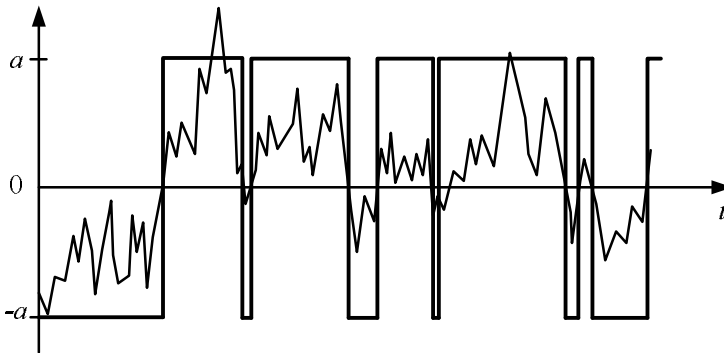


Рис. 36. Преобразование сигнала предельным ограничителем

Реализуется эта операция, если сигнал сначала подвергается очень большому усилению и затем ограничивается по амплитуде величиной a . Такой же результат получается на выходе двухразрядного АЦП. В зарубежной литературе это преобразование известно как операция клиппирования сигнала и широко используется в канадской системе радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ).

Будем считать, что на вход нелинейного устройства вида подается центрированный нормальный СП с известной КФ $K_{\xi}(\tau)$. Задача состоит в нахождении КФ на выходе предельного ограничителя. Для решения задачи воспользуемся дифференциальным уравнением (4.5) и начальными условиями (4.6). Предварительно проведем дифференциальный анализ нелинейности

$$y' = 2a \cdot \delta(x).$$

Появление $\delta(x)$ -функции здесь существенно для вычисления правой части в (4.5). В результате, ограничившись значением $n = 1$, имеем

$$\frac{d}{dK_\xi} K_\zeta(\tau) = (2a)^2 \langle \delta(\xi(t_1)) \delta(\xi(t_2)) \rangle = (2a)^2 f(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0; \tau).$$

Вид двумерной плотности нормального распределения приводился ранее. С учетом его можно записать, что

$$\frac{d}{dK_\xi} K_\zeta(\tau) = \frac{(2a)^2}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - K_\xi^2}}.$$

В качестве начального условия возьмем $K_\zeta(\tau) = 0$ при $K_\xi(\tau) = 0$. Интегрирование полученного уравнения приводит корреляционной функции

$$K_\zeta(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin\left(\frac{K_\xi(\tau)}{\sigma^2}\right).$$

Видно, что, несмотря на существенное упрощение выходного сигнала, его корреляционная функция сохранила всю информацию о корреляционных связях входного процесса. Дисперсия выходного процесса равна $\sigma_\zeta^2 = a^2$.

Обратная связь имеет вид

$$K_\xi(\tau) = \sigma^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{K_\zeta(\tau)}{a^2}\right).$$

Эта формула известна как *формула Ван-Флека* и позволяет восстановить вид корреляционной функции входного процесса на основе анализа клипированного сигнала. Эта формула показывает, что все корреляционные связи нормальных случайных процессов содержатся в их переходах через среднее значение, в нашем случае – через нуль.

4.4. Корреляционная функция на выходе одностороннего линейного детектора

Односторонним линейным детектором называется устройство, реализующее преобразование вида

$$y = a \cdot x \cdot \chi(x).$$

Дифференциальный анализ этой нелинейности дает

$$y' = a \cdot \chi(x) + a \cdot x \cdot \delta(x) = a \cdot \chi(x), \quad y'' = a \cdot \delta(x).$$

Появление δ -функции со второй производной указывает на то, что в методе дифференциального уравнения следует выбрать $n = 2$. При этом

для центрированного нормального СП в соответствии с (4.5) можно записать дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dK_\xi^2} K_\zeta(\tau) = a^2 f(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0; \tau) = \frac{a^2}{2\pi\sqrt{\sigma^4 - K_\xi^2}}$$

с начальными условиями при $K_\xi = 0$

$$\frac{d}{dK_\xi} K_\zeta(\tau) = a^2 \langle \chi(\xi) \rangle^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad K_\zeta = 0.$$

Последовательное интегрирование полученного дифференциального уравнения приводит к решению вида

$$K_\zeta(\tau) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 K_\xi(\tau) + \frac{a^2}{2\pi} \left\{ K_\xi(\tau) \cdot \arcsin\left(\frac{K_\xi(\tau)}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\sigma^4 - K_\xi^2(\tau)} - \sigma^2 \right\}.$$

Получилась несколько более громоздкая формула, чем при клиппировании сигнала, но все-таки конечная.

Полученная формула позволяет просто рассчитать дисперсию выходного процесса

$$\sigma_\zeta^2 = K_\zeta(\tau = 0) = \frac{a^2 \sigma^2}{2\pi} (\pi - 1) \approx 0.34 a^2 \sigma^2.$$

Получилось, что одностороннее линейное детектирование уменьшает дисперсию СП приблизительно в три раза по сравнению с соответствующим линейным преобразованием.

4.5. Корреляционная функция на выходе двустороннего линейного детектора

Двусторонним линейным детектором называется устройство, реализующее преобразование вида

$$y = a \cdot x \cdot \text{sgn}(x).$$

Дифференциальный анализ этой нелинейности дает

$$y' = a \cdot \text{sgn}(x) + 2a \cdot x \cdot \delta(x) = a \cdot \text{sgn}(x), \quad y'' = 2a \cdot \delta(x).$$

Для использования метода дифференциального уравнения для расчета КФ выходного процесса необходимо выбрать $n = 2$. Для центрированного нормального СП при этом в соответствие с (4.5) можно записать дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2}{dK_\xi^2} K_\xi(\tau) = 4a^2 f(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0; \tau) = \frac{2a^2}{\pi\sqrt{\sigma^4 - K_\xi^2}}$$

с начальными условиями при $K_\xi = 0$

$$\frac{d}{dK_\xi} K_\xi(\tau) = a^2 \langle \text{sgn}(\xi) \rangle^2 = 0, \quad K_\xi = 0.$$

Интегрирование полученного дифференциального уравнения приводит к решению вида

$$K_\xi(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \left\{ K_\xi(\tau) \cdot \arcsin\left(\frac{K_\xi(\tau)}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\sigma^4 - K_\xi^2(\tau)} - \sigma^2 \right\}.$$

Соответствующая дисперсия флуктуации выходного процесса оценивается как

$$\sigma_\xi^2 = K_\xi(\tau = 0) = \frac{a^2 \sigma^2}{\pi} (\pi - 2) \approx 0.36a^2 \sigma^2.$$

Сравнивая с результатом предыдущего раздела, видим, что дисперсия немного увеличилась по сравнению со случаем одностороннего линейного детектора.

4.6. Энергетический спектр на выходе нелинейного элемента

Как мы видели, нелинейные преобразования существенно изменяют корреляционные связи СП. Возникает вопрос: что при этом происходит со спектральными свойствами СП? Нам хорошо известно, что на выходе нелинейных устройств обычно появляются комбинационные частоты. Например, монохроматический сигнал вида

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$$

после прохождения квадратичного детектора принимает вид

$$y(t) = aA_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} aA_0^2 + \frac{1}{2} aA_0^2 \cos(2\omega_0 t),$$

т.е. приобретает спектральные составляющие на трех частотах: $\omega = 0$ и $\omega = \pm 2\omega_0$. Рассмотрим, что происходит в этом отношении с СП.

Основой для анализа энергетического спектра на выходе нелинейного элемента является разложение (4.4)

$$K_\xi(\tau) = m_\xi(\tau) - \langle g(\xi) \rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g^{(n)}(\xi) \rangle^2}{n!} K_\xi^n(\tau).$$

Согласно теореме Винера – Хинчина, имеем

$$W_{\zeta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\zeta}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g^{(n)}(\xi) \rangle^2}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\zeta}^n(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau,$$

или, что то же самое,

$$W_{\zeta}(\omega) = \langle g'(\xi) \rangle^2 W_{\zeta}(\omega) + \frac{\langle g''(\xi) \rangle^2}{2!} W_{\zeta}(\omega) * W_{\zeta}(\omega) + \\ + \frac{\langle g'''(\xi) \rangle^2}{3!} W_{\zeta}(\omega) * W_{\zeta}(\omega) * W_{\zeta}(\omega) + \dots$$

Здесь знаком «*» обозначена операция свертки:

$$W_{\zeta}(\omega) * W_{\zeta}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_{\zeta}(\omega - \omega') W_{\zeta}(\omega') d\omega'.$$

Для простоты будем предполагать, что входной процесс – это узкополосный стационарный СП, т.е. процесс, энергетический спектр которого отличен от нуля в относительно узкой полосе частот (рис.37):

$$W_{\zeta}(\omega) \neq 0 \quad \text{при} \quad -\Delta \leq (\omega \pm \omega_0) \leq \Delta, \quad \Delta \ll \omega_0.$$

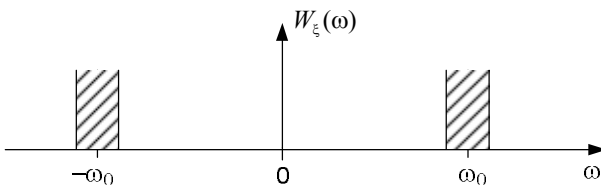


Рис.37. Энергетический спектр узкополосного СП

Установим частотную область, в которой для такого входного процесса свертка может быть отлична от нуля. Подынтегральная функция отлична от нуля при одновременном выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} -\Delta \leq (\omega' \pm \omega_0) \leq \Delta \\ -\Delta \leq (\omega - \omega' \pm \omega_0) \leq \Delta. \end{cases}$$

В развернутом виде эти неравенства эквивалентны выполнению семейства из четырех систем неравенств. Исключив из этих неравенств переменную интегрирования ω' , получим

$$-2\Delta \leq \omega \leq 2\Delta, \quad -2\Delta \leq (\omega \pm 2\omega_0) \leq 2\Delta.$$

Полученные неравенства определяют частотные области, в пределах которых может быть отличен от нуля результат вычисления свертки. Физически это означает, что у выходного СП появились спектральные составляющие вблизи частот $\omega = 0$ и $\omega = \pm 2\omega_0$. Изначально этих спектральных составляющих не было. При этом сам энергетический спектр в два раза расширился. Именно так происходит для двустороннего квадратичного детектора, поскольку для него только одно слагаемое отлично от нуля.

При аналогичном рассмотрении следующего члена в разложении мы получим появление составляющих вблизи частот $\pm\omega_0$ и $\pm 3\omega_0$, причем с утроенной шириной занимаемой полосы. В общем случае бесконечного числа слагаемых энергетический спектр выходного СП бесконечно расширяется: появляются все комбинационные частоты $\pm m\omega_0$ вместе с соответственно расширяющимся окружением (рис.38).

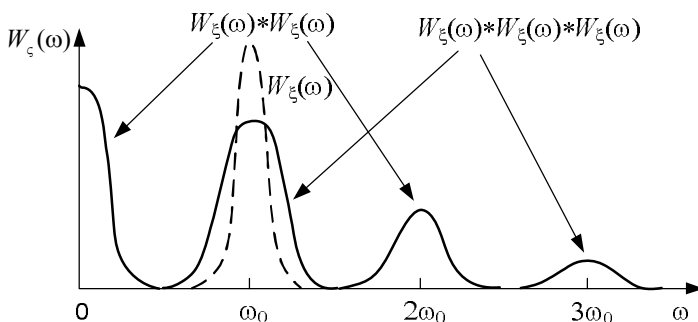


Рис.38. Энергетический спектр на выходе нелинейного устройства

Общий вывод: нелинейные устройства вызывают расширение энергетического спектра. В этом их главное отличие от линейных устройств, которые только сужают спектр.

Появление спектральных составляющих вблизи частоты $\omega = 0$ обычно используется в радиофизике для демодуляции сигналов (извлечения информации), а появление составляющих вблизи комбинационных частот $\pm m\omega_0$ — для модуляции сигналов (внедрения информации в сигналы).

4.7. Вероятность распределения на выходе нелинейного элемента

4.7.1. Взаимооднозначное преобразование

Изменение корреляционных связей и спектров СП нелинейными элементами указывает на то, что на выходе нелинейных устройств должны изменяться их законы распределения. Рассмотрим существующие подходы для вычисления законов распределения выходных СП:

$$\eta(t) = g(\xi(t)).$$

Начнем со случая, когда нелинейное преобразование является взаимно-однозначным. В этом случае вероятность распределения входного процесса в малом диапазоне вблизи заданного значения равна вероятности распределения выходного процесса в малом диапазоне вблизи соответствующего выходного значения СП:

$$\Delta P = f_{\xi}(\xi)\Delta\xi = f_{\eta}(\eta)\Delta\eta.$$

Отсюда следует, что

$$f_{\eta}(\eta) = f_{\xi}(\xi) \cdot \left| \frac{d\xi}{d\eta} \right|.$$

Знак модуля введен здесь с учетом требования положительности плотности распределения. Для практического использования формулы необходимо знать функцию $x = g^{-1}(y)$, осуществляющую обратное нелинейное преобразование:

$$\xi = g^{-1}(\eta).$$

В многомерном случае, когда на входе действует векторный СП и на выходе получается векторный процесс той же размерности, преобразование определяется соотношением

$$f_{\underline{\eta}}(\underline{\eta}) = f_{\underline{\xi}}(\underline{\xi}) \cdot |J_{\xi/\eta}|. \quad (4.8)$$

Здесь

$$J_{\xi/\eta} = \det \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} \right\}$$

– якобиан соответствующей матрицы перехода, связанной с векторной функцией обратного преобразования $\underline{x} = g^{-1}(\underline{y})$.

В качестве примера рассмотрим нелинейное преобразование, осуществляемое логарифмическим усилителем:

$$y = \ln(x).$$

Для него обратная функция определяется как

$$x = g^{-1}(y) = \exp(y).$$

Закон распределения выходного СП:

$$f_{\eta}(\eta) = f_{\xi}(\exp(\eta)) \cdot \exp(\eta).$$

4.7.2. Двусторонний квадратичный детектор

Двусторонний квадратичный детектор описывается преобразованием

$$y = g(x) = ax^2.$$

Ему соответствует неоднозначное обратное преобразование. В этом случае следует говорить о нескольких (в нашем случае двух) ветвях обратной функции $x_j = g_j^{-1}(y)$:

$$f_{\eta}(\eta) = \sum_j f_{\xi}(\xi_j) \cdot \left| \frac{d\xi_j}{d\eta} \right|.$$

Для двустороннего квадратичного детектора соответствующими ветвями обратного преобразования являются функции

$$x_1 = \sqrt{\frac{y}{a}} \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{y}{a}}.$$

Так что распределение выходного процесса задается формулой

$$f_{\eta}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a\eta}} \left[f_{\xi}\left(\sqrt{\frac{\eta}{a}}\right) + f_{\xi}\left(-\sqrt{\frac{\eta}{a}}\right) \right] & \text{при } \eta \geq 0, \\ 0 & \text{при } \eta < 0. \end{cases}$$

Если записать это распределение для централизованного нормального случайного процесса на входе, то на выходе мы имеем плотность распределения вида

$$f_{\eta}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi a\eta}} \exp\left\{-\frac{\eta}{2a\sigma^2}\right\} & \text{при } \eta \geq 0, \\ 0 & \text{при } \eta < 0. \end{cases}$$

Плотности вероятности на входе и на выходе представлены на рис.39.

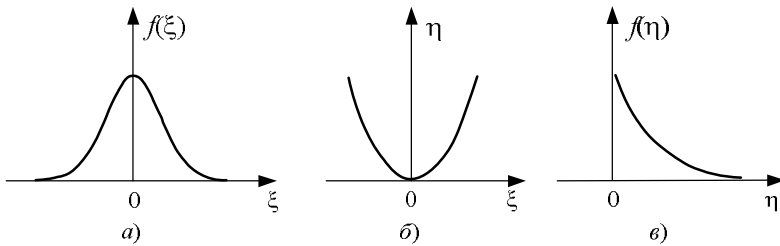


Рис.39. Нормальная плотность вероятности входных флуктуаций (а), нелинейная характеристика элемента (б), плотность вероятности флуктуаций на выходе (в)

4.7.3. Односторонний квадратичный детектор

Односторонний квадратичный детектор описывается преобразованием вида

$$y = g(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Все отрицательные значения входного процесса соответствуют одному значению выходного процесса – нулю. Причем это значение не случайное, а вполне детерминированное, правда, возникающее с определенной вероятностью

$$P(\eta = 0) = P(\xi \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f(\xi) d\xi.$$

В целом выходной процесс является состоящим из суммы непрерывно и дискретно распределенных процессов. Его распределение устанавливается формулой

$$f_{\eta}(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{a\eta}} f_{\xi}\left(\sqrt{\frac{\eta}{a}}\right) \chi(\eta) + P(\eta = 0)\delta(\eta).$$

Если записать её для централизованного нормального случайного процесса на входе, то на выходе мы имеем плотность распределения вида

$$f_{\eta}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi a\eta}} \exp\left\{-\frac{\eta}{2a\sigma^2}\right\} + \frac{1}{2}\delta(\eta) & \text{при } \eta \geq 0, \\ 0 & \text{при } \eta < 0. \end{cases}$$

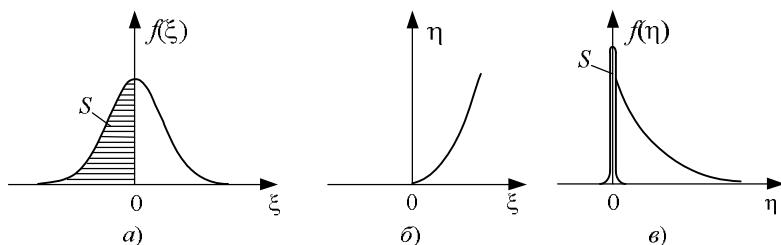


Рис.40. Нормальная плотность вероятности входных флуктуаций (а), нелинейная характеристика элемента (б), плотность вероятности флуктуаций на выходе (в)

Обобщение на случай составных процессов с множеством дискретных выходных значений дается суммированием соответствующих δ -функций. Например, распределение СП на выходе АЦП с N различными дискретными уровнями $\{y_n\}$ задается формулой

$$f_{\eta}(\eta) = \sum_{n=1}^N P_n \delta(\eta - y_n),$$

где вероятности получения соответствующих уровней сигнала

$$P_n = P(y_{n-1} \leq \xi \leq y_n) = \int_{y_{n-1}}^{y_n} f(\xi) d\xi.$$

4.8. Анализ работы автогенератора при наличии шума

Для многих радиофизических задач представляет практический интерес вопрос о характере колебаний автогенератора с учетом собственных флюктуации (шумы сопротивлений потерь и шумы электронных, полупроводниковых и др. приборов) и внешних случайных воздействий (колебания температуры окружающей среды, случайные колебания напряжения источников питания, вибрации и т.д.) [9].

Флюктуации амплитуды и частоты, обусловленные только собственными шумами автогенератора, принято называть *естественными флюктуациями*. Эти флюктуации принципиально не устранимы и определяют тот предел повышения стабильности частоты и амплитуды автогенератора, который не может быть превзойден.

Флюктуации амплитуды и частоты, обусловленные внешними случайными воздействиями, называются *техническими флюктуациями*. Эти флюктуации можно устранить мерами параметрической стабилизации (термостатирование, гашение вибраций и т.д.) и стабилизации питающих напряжений.

Несмотря на то, что в реальных условиях технические нестабильности часто значительно превышают естественные, ограничимся здесь рассмотрением влияния собственных флюктуаций (типа дробового и теплового шума) на работу автогенератора, поскольку они представляют принципиальный интерес. При этом проанализируем работу автогенератора в линейном приближении. Определим характеристики амплитуды и фазы.

4.8.1. Уравнение генератора

Рассмотрим простейшую схему генератора гармонических колебаний с колебательным контуром в цепи сетки лампы (рис.41).

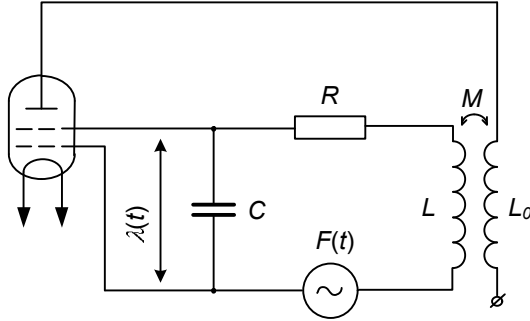


Рис. 41. Упрощенная схема автогенератора

Дифференциальное уравнение генератора для напряжения $\lambda(t)$ между сеткой и катодом лампы имеет вид

$$LC \frac{d^2\lambda}{dt^2} + RC \frac{d\lambda}{dt} + \lambda = M \frac{dI_a}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} + F(t). \quad (4.9)$$

Здесь L , C , R – параметры колебательного контура; M – коэффициент взаимной индукции анодной и сеточной катушек; $I_a(t)$ – нелинейная зависимость анодного тока лампы от напряжения на сетке и $F(t)$ – внешнее воздействие на генератор. Аппроксимируем зависимость $I_a = f(\lambda)$ кубическим полиномом $I_a(\lambda) = I_a + s\lambda - \gamma\lambda^3$. Тогда уравнение (4.9) примет вид

$$\lambda'' + \omega_0^2\lambda = 2\delta(1 - 2\lambda^2 / A_0^2)\lambda' + \omega_0^2 F(t).$$

Здесь и далее штрихами обозначены производные по времени; $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ – собственная частота колебательного контура; $\delta = \omega_0^2(sM - RC)/2$ – величина, характеризующая затухание в регенерированной линейной системе; $A_0 = [2(sM - RC)/2\gamma M]^{1/2}$ – амплитуда автономных колебаний генератора в отсутствие внешнего воздействия (см. ниже).

Рассмотрим здесь случай, когда под $F(t)$ понимается приведенный к сетке эквивалентный собственный широкополосный флуктуационный шум элементов схемы генератора $F(t) = \xi(t)$, и будем трактовать его как БГШ с нулевым математическим ожиданием и дельтообразной корреляционной функцией

$$K(t_1 - t_2) = W_0 \delta(t_1 - t_2).$$

С учетом сказанного запишем уравнение генератора

$$\lambda'' + \omega_0^2\lambda = 2\delta(1 - 2\lambda^2 / A_0^2)\lambda' + \omega_0^2 \xi(t). \quad (4.10)$$

Для изучения решения этого уравнения целесообразно перейти от одного уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка, описывающим поведение амплитуды и фазы. Определим амплитуду и фазу соотношениями:

$$\lambda = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \lambda' = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.11)$$

Отсюда получим

$$A^2 = \lambda^2 + \omega_0^{-2} \lambda'^2, \quad \varphi = -\omega_0 t - \arctg(\lambda' / \omega_0 \lambda).$$

Дифференцируя эти выражения по времени, имеем

$$A' = \lambda'(\lambda'' + \omega_0^2 \lambda) / \omega_0^2 A, \quad \varphi' = -\lambda(\lambda'' + \omega_0^2 \lambda) / \omega_0 A^2.$$

Если в правые части написанных равенств подставить выражение $(\lambda'' + \omega_0^2 \lambda)$ из (4.10) и затем выразить λ и λ' через A и φ согласно (4.11), то придем к уравнениям

$$\begin{aligned} A' &= \delta(1 - A^2 / A_0^2) A - \omega_0 \xi(t) \sin(\omega_0 t + \varphi) + f_1(A, \varphi, t), \\ \varphi' &= -(\omega_0 / A) \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) + f_2(A, \varphi, t), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ функции, содержащие гармонические составляющие с частотами $2\omega_0$ и $4\omega_0$.

В контуре, настроенном на частоту ω_0 и имеющем малое затухание, происходит эффективная фильтрация высших гармоник, и они не могут оказывать существенного влияния на процессы в генераторе. Поэтому в уравнениях (4.12) в первом приближении можно опустить быстро осциллирующие члены $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} A' &= \delta(1 - A^2 / A_0^2) A - \omega_0 \xi(t) \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ \varphi' &= -(\omega_0 / A) \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Уравнения (4.13) принято называть *укороченными уравнениями лампы генератора*. Из них легко находим стационарный режим работы генератора в отсутствие флуктуаций. Так, полагая в первом уравнении $A' = 0$, $\xi(t) = 0$, находим $A_{st} = A_0$. Аналогично, при $\xi(t) = 0$ из второго уравнения получим $\varphi' = 0$, $\varphi_{st} = \varphi_0 = \text{const}$, т.е. фаза сохраняет начальное значение. При этом никакому значению начальной фазы нельзя отдать предпочтение. Поэтому ее практически следует полагать случайной величиной, равномерно распределенной в интервале $[-\pi, \pi]$.

Таким образом, в стационарном режиме напряжение на контуре определяется формулой

$$\lambda(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.14)$$

Видно, что введенная ранее в рассмотрение величина A_0 действительно представляет собой установившееся значение амплитуды напряжения на контуре.

4.8.2. Решение уравнения методом линеаризации

Метод линеаризации заключается в том, что сначала находится решение исходного нелинейного дифференциального уравнения в отсутствие малого случайного воздействия, а затем уравнение линеаризуется относительно малых случайных отклонений от невозмущенных значений и делается пренебрежение нелинейными членами, содержащими эти случайные отклонения. В результате для случайных отклонений получается линейное дифференциальное уравнение.

Применим к уравнениям (4.13) метод линеаризации в окрестности стационарного состояния. Применение метода линеаризации оправдано тем, что внешнее возмущение $\xi(t)$ предполагается малым. Поэтому оно вызывает небольшие отклонения амплитуды A и частоты φ' (не фазы) от их стационарных значений.

Разумеется, что линеаризация уравнений относительно флуктуационных отклонений не исключает необходимости предшествующего нелинейного анализа процессов в автогенераторе, так как без него нельзя получить никаких сведений о стационарном режиме генератора, в окрестности которого и осуществляется линеаризация.

Обозначим флуктуации амплитуды и фазы, обусловленные шумом $\xi(t)$, через

$$a = A - A_0, \quad \psi = \varphi - \varphi_0. \quad (4.15)$$

По предположению a и ψ' представляют собой малые флуктуационные отклонения от стационарных значений (например, $\langle a^2 \rangle \ll A_0^2$).

Подставим эти выражения в исходные уравнения (4.13) и удержим в них лишь те члены, малость которых относительно a не превосходит первого порядка. При этом флуктуационное воздействие $\xi(t)$ следует считать величиной первого порядка малости, а величины A и φ , оставшиеся в уравнениях в виде коэффициентов, нужно заменить их стационарными значениями ($A = A_0$, $\varphi = \varphi_0$). В результате выполнения указанных преобразований для a и ψ получим линейные стохастические дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} a' + 2\delta a &= -\omega_0 \xi(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \psi' &= -(\omega_0 / A_0) \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Поскольку описанная процедура линеаризации совпадает с задачей отыскания дифференциалов для A и φ , то эти уравнения можно получить

из уравнений (4.13) путем дифференцирования в окрестности стационарного состояния.

Отметим общий и характерный результат метода линеаризации – в результате его применения для малых флуктуационных отклонений всегда получаются линейные уравнения, которые в принципе всегда можно решить. При этом если внешнее случайное воздействие является гауссовским, то и случайные отклонения в системе будут гауссовскими процессами.

4.8.3. Характеристики фазы и амплитуды

Стационарное решение первого уравнения (4.16) имеет вид

$$a(t) = -\omega_0 \int_{-\infty}^t \exp[-2\delta(t-x)] \xi(x) \sin(\omega_0 x + \varphi_0) dx. \quad (4.17)$$

Флуктуация амплитуды $a(t)$ получается из нормальных флуктуаций $\xi(t)$ путем линейного преобразования. Отсюда следует, что флуктуации амплитуды $a(t)$ есть гауссовский СП с нулевым математическим ожиданием $\langle a(t) \rangle = 0$. Корреляционная функция этого процесса

$$K_a(\tau) = \sigma_a^2 \exp(-2\delta |\tau|), \quad \sigma_a^2 = W_0 \omega_0^2 / 8\delta.$$

Этот результат позволяет проверить условие применимости метода линеаризации

$$\sigma_a \ll A_0.$$

Уравнение (4.16) для случайной фазы $\varphi(t)$ по существу совпадает с уравнением винеровского процесса. Если начальная фаза в момент времени $t = 0$ равна φ_0 , то полная фаза

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{\omega_0}{A_0} \int_0^t \xi(x) \cos(\omega_0 x + \varphi_0) dx \quad (4.18)$$

имеет нулевое среднее значение $\langle \varphi(t) \rangle = 0$ и дисперсию

$$\sigma_\varphi^2(t) = Dt, \quad D = W_0 \omega_0^2 / 2A_0^2.$$

Видно, что дисперсия растет пропорционально времени наблюдения. Следовательно, полная фаза является нестационарным гауссовским СП. В начальный момент времени $t = 0$ плотность вероятности имеет вид дельта-функции $\delta(\varphi - \varphi_0)$, а затем с ростом t неограниченно расплывается на бесконечной прямой φ . Если мысленно представить себе множество идентичных генераторов, образующих некоторый ансамбль, и допустить, что при $t = 0$ все генераторы ансамбля имеют одинаковую начальную фазу φ_0 , то с ростом t фазы отдельных генераторов будут все более разбросанными.

Поэтому длительная «привязка» текущей фазы к начальной из-за наличия флуктуации невозможна.

Как и для винеровского процесса, приращения фазы за интервал τ

$$\Delta\varphi_\tau = \varphi\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varphi\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = -\frac{\omega_0}{A_0} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \xi(x) \cos(\omega_0 x + \varphi_0) dx$$

независимы на неперекрывающихся интервалах, нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = D\tau. \quad (4.19)$$

Дисперсия приращения фазы растет пропорционально времени τ . Мгновенные значения приращения фазы могут превышать значения $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ и т.д. Поэтому флуктуации фазы вызывают случайный разброс частоты относительно ее номинального значения, причем практически невозможно предложить какие-либо меры для устранения этого эффекта без существенного изменения принципа работы самого генератора.

4.8.4. Спектральная плотность колебания

Получим сначала выражение для корреляционной функции колебания генератора, а затем вычислим его спектральную плотность. С учетом амплитудных и фазовых флуктуаций (4.15) колебание генератора (4.11) будет иметь квазигармонический характер и его можно записать в следующем виде:

$$\lambda(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = [A_0 + a(t)] \cos(\omega_0 t + \psi(t) + \varphi_0).$$

Для корреляционной функции имеем

$$K_\lambda(\tau) = \langle [A_0 + a(t)][A_0 + a(t + \tau)] \cos(\omega_0 t + \psi(t) + \varphi_0) \times \\ \times \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \psi(t + \tau) + \varphi_0) \rangle.$$

Воспользовавшись выражениями (4.17) и (4.18), можно показать, что амплитудные $a(t_1)$ и фазовые $\psi(t_2)$ флуктуации некоррелированы и независимы. Поэтому

$$K_\lambda(\tau) = (1/2)[A_0^2 + K_a(\tau)] \langle \cos(\omega_0 \tau + \Delta\varphi_\tau) \rangle = \\ = (1/2)[A_0^2 + K_a(\tau)] \operatorname{Re}[\exp(i\omega_0 \tau) \langle \exp(i\Delta\varphi_\tau) \rangle].$$

Но $\langle \exp(i\Delta\varphi_\tau) \rangle$ есть значение характеристической функции

$$\varphi(iu) = \langle \exp(iu\Delta\varphi_\tau) \rangle$$

случайной величины $\Delta\varphi_\tau$ в точке $u = 1$.

Для гауссовской случайной величины с нулевым средним значением и известной дисперсией (4.19) имеем

$$\langle \exp(i\Delta\varphi_\tau) \rangle = \exp(-D |\tau| / 2).$$

В результате получим окончательную формулу

$$K_\lambda(\tau) = (1/2)[A_0^2 + \sigma_a^2 \exp(-2\delta |\tau|)] \exp(-D |\tau| / 2) \cos \omega_0 \tau.$$

По корреляционной функции находим одностороннюю спектральную плотность (рис.42)

$$W^+(\omega) = 4 \int_0^\infty K_\lambda(\tau) \cos \omega \tau d\tau = W_1(\omega) + W_2(\omega), \quad \omega \geq 0,$$

где

$$W_1(\omega) = A_0^2 \int_0^\infty \exp\left(-D \frac{\tau}{2}\right) \cos(\omega - \omega_0)\tau d\tau = \frac{A_0^2 D / 2}{(D/2)^2 + (\omega - \omega_0)^2}; \quad (4.20)$$

$$W_2(\omega) = \sigma_a^2 \int_0^\infty \exp\left[-\left(2\delta + \frac{D}{2}\right)\tau\right] \cos(\omega - \omega_0)\tau d\tau =$$

$$= \frac{D/2 + 2\delta}{(D/2 + 2\delta)^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (4.21)$$

При записи этих выражений было учтено, что D и δ много меньше ω_0 . Поскольку в рассматриваемом случае $\sigma_a^2 \ll A_0^2$, то приближенно

$$W^+(\omega) \approx W_1(\omega) = 2A_0^2 D [D^2 + 4(\omega - \omega_0)^2]^{-1}.$$

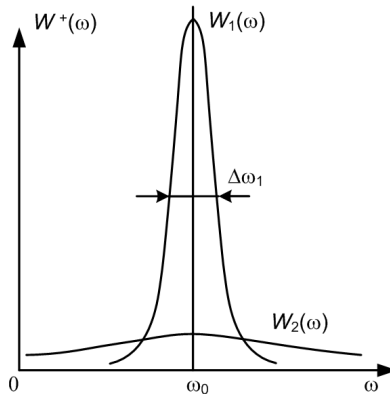


Рис.42. Составляющие спектральной плотности колебания автогенератора

Рассмотрим качественно характер спектра. Если бы флуктуационный шум отсутствовал ($\xi(t) = 0$), то $D = 0$ и $\sigma_a^2 = 0$. Полагая в (4.20) и (4.21) $D = 0$ и $\sigma_a^2 = 0$ и воспользовавшись формулой для дельта-функции, получим

$$W^+(f) = A_0^2 \delta(f - f_0) / 2.$$

В данном случае генератор генерировал бы гармоническое колебание (4.14), спектральная плотность которого есть дискретная линия высотой $A_0^2 / 2$, расположенная на частоте f_0 .

Спектральная плотность колебания автогенератора из-за неизбежного наличия собственных флуктуационных шумов элементов схемы превращается из дискретной линии в сплошной спектр, имеющий конечную ширину $\Delta\omega = \Delta\omega_1 = D$. Спектр симметричен относительно частоты ω_0 , где он имеет максимум (рис.42).

Естественную нестабильность частоты генератора можно количественно характеризовать относительной шириной спектральной плотности

$$\Delta\omega / \omega_0 = D / \omega_0.$$

Здесь определяющим параметром D является дисперсия приращения фазы за единицу времени (4.19).

В заключение укажем, что анализ работы генераторов импульсных колебаний (мультивибраторов, блокинг-генераторов) показывает, что собственные шумы определяют случайный характер этих колебаний (длительностей импульсов и периодов их следования).

Глава 5. Узкополосные случайные процессы

Линейные радиотехнические системы, работающие на высоких и промежуточных радиочастотах, как правило, являются узкополосными. Поэтому важную роль играет особый класс случайных процессов, спектральная плотность мощности которых имеет резко выраженный максимум вблизи некоторой частоты ω_0 , отличной от нуля. Исследуем статистические свойства узкополосных случайных процессов.

5.1. Функция корреляции узкополосного случайного процесса

Если обозначить ширину квадрата АЧХ $|H(\omega)|^2$ системы (допустим, на уровне 0.5 от максимального значения) через $\Delta\omega$, а центральную частоту полосы пропускания через ω_0 , то обычно выполняется неравенство

$$\Delta\omega \ll \omega_0. \quad (5.1)$$

При воздействии на такую систему стационарного СП с широким энергетическим спектром $W_{\text{вх}}(\omega)$ в стационарном режиме работы согласно формуле (3.2) СП $\xi(t)$ на выходе системы будет иметь узкую спектральную плотность $W(\omega)$, т.е. для нее будет справедливо условие (5.1).

Покажем, что корреляционную функцию стационарного узкополосного СП $\xi(t)$ всегда можно представить в виде

$$K(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos(\omega_0 \tau + \gamma(\tau)), \quad (5.2)$$

где $\rho(\tau)$ и $\gamma(\tau)$ – медленно изменяющиеся функции по сравнению с $\cos(\omega_0 \tau)$ [9].

По теореме Винера – Хинчина функция корреляции равна

$$K(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Сделаем замену переменной $\Omega = \omega - \omega_0$ (рис.43).

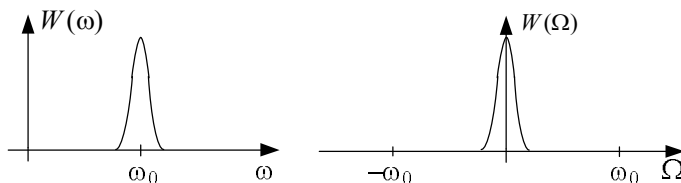


Рис.43. Энергетический спектр узкополосного СП

$$K(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} W(\omega_0 + \Omega) [\cos(\omega_0 + \Omega)\tau] d\Omega = \\ = \sigma^2 [\rho_C(\tau) \cos \omega_0 \tau - \rho_S(\tau) \sin \omega_0 \tau] = \sigma^2 \rho(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \gamma(\tau)],$$

где

$$\sigma^2 \rho_C(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} W(\omega_0 + \Omega) \cos(\Omega\tau) d\Omega,$$

$$\sigma^2 \rho_S(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} W(\omega_0 + \Omega) \sin(\Omega\tau) d\Omega,$$

$$\rho(\tau) = \sqrt{\rho_C^2(\tau) + \rho_S^2(\tau)}, \quad \operatorname{tg} \gamma(\tau) = \rho_C(\tau) / \rho_S(\tau).$$

Таким образом, корреляционную функцию стационарного узкополосного случайного процесса всегда можно представить выражением (5.2). Так как $\rho_C(\tau)$ есть четная функция τ , а $\rho_S(\tau)$ нечетная, то $\rho(\tau)$ всегда четная функция, а $\gamma(\tau)$ – нечетная. Предположим, что спектральная плотность симметрична относительно центральной частоты ω_0 . Поскольку для узкополосных процессов ширина спектра мала по сравнению с ω_0 , то нижний предел интегрирования в интегралах без значительной погрешности можно заменить на $-\infty$. Тогда $\rho_S(\tau) = 0$ и корреляционная функция стационарного узкополосного случайного процесса с симметричной спектральной плотностью может быть представлена формулой

$$K(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos(\omega_0 \tau).$$

Поскольку спектральная плотность $W(\omega_0 + \Omega)$ процесса практически полностью расположена в низкочастотной области частот Ω , то функции $\rho_C(\tau)$ и $\rho_S(\tau)$ и, следовательно, $\rho(\tau)$ и $\gamma(\tau)$ для узкополосных процессов являются медленно изменяющимися по сравнению с $\cos(\omega_0 \tau)$.

Реализации узкополосных процессов напоминают модулированные колебания (рис.44). Поэтому узкополосные процессы часто называют модулированными, квазигармоническими или квазимонохроматическим СП. Квазигармонический СП целесообразно записать в виде сигнала, модулированного по амплитуде и фазе:

$$\xi(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad A(t) \geq 0, \quad (5.3)$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно изменяющиеся функции времени по сравнению с $\cos(\omega_0 t)$. Случайную функцию $A(t)$ можно назвать огибающей узкополосного процесса $\xi(t)$, а функцию $\varphi(t)$ – случайной фазой.

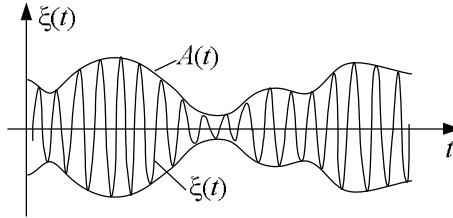


Рис.44. Узкополосный случайный процесс $\xi(t)$ и его огибающая $A(t)$

5.2. Аналитический сигнал

Представление квазигармонического процесса $\xi(t)$ в форме (5.3) неоднозначно, так как при заданных вероятностных характеристиках имеется произвол в определении характеристик $A(t)$ и $\varphi(t)$, а также в выборе частоты ω_0 . Если, например, при выбранной частоте ω_0 за некоторое время произошло изменение $\xi(t)$, то невозможно однозначно различить, произошло оно за счет $A(t)$ или $\varphi(t)$. К тому же, на практике часто бывает, что выделить доминирующую частоту в случайном процессе либо затруднительно, либо вообще невозможно.

Огибающую $A(t)$ и случайную фазу $\varphi(t)$ можно доопределить разными способами. Один из них базируется на преобразовании Гильберта и введении аналитического сигнала [9].

Напомним, что две функции (детерминированные или случайные) связаны преобразованиями Гильберта, если

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad \xi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

где интегралы берутся в смысле главного значения Коши. Если рассмотреть $\xi(t)$ как входной сигнал, то $\eta(t)$ есть выходной сигнал линейной системы с импульсной характеристикой $h(t) = 1/\pi t$ и комплексной частотной характеристикой

$$H(i\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \exp(-i\omega t) dt = -i \operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} -i, & \omega > 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ i, & \omega < 0. \end{cases}$$

Линейный фильтр с такой комплексной характеристикой часто называют *квадратурным фильтром*. Он сдвигает фазы спектральных составляющих входного сигнала на $-\pi/2$: при входном колебании $\cos \omega t$ выходной сигнал будет $\sin \omega t$.

Перейдем от вещественного случайного процесса $\xi(t)$ к комплексному СП, который называют *аналитическим процессом*

$$\zeta(t) = A(t)\exp[i(\omega_0 t + \varphi(t))] = \xi(t) + i\eta(t)$$

и потребуем, чтобы его мнимая часть

$$\eta(t) = A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad A(t) \geq 0, \quad |\varphi| \leq \pi$$

представляла собой преобразование Гильберта от вещественной части $\xi(t)$. Главное удобство от использования такого представления заключается в простом и однозначном переходе к амплитуде (огibaющей) и фазе сигнала:

$$A(t) = |\xi(t) + i\eta(t)|, \quad \omega_0 t + \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\eta(t)}{\xi(t)}.$$

Если ввести комплексную амплитуду

$$Z(t) = A(t)\exp[i\varphi(t)] = A_C(t) + iA_S(t),$$

где

$$A_C(t) = A(t)\cos\varphi(t); \quad A_S(t) = A(t)\sin\varphi(t); \quad A(t) \geq 0, \quad |\varphi| \leq \pi,$$

то аналитический процесс, огibaющую и фазу можно записать в виде

$$\zeta(t) = Z(t)\exp(i\omega_0 t),$$

$$A(t) = [A_C^2(t) + A_S^2(t)]^{1/2}, \quad \omega_0 t + \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{A_S(t)}{A_C(t)}.$$

Случайные функции $A_C(t)$ и $A_S(t)$ есть проекции вектора длины $A(t)$ на оси прямоугольной системы координат, они называются косинусной (или синфазной) и синусной квадратурными составляющими. Вектор вращается со случайной угловой скоростью $\varphi'(t)$, конец вектора блуждает по плоскости (рис.45).

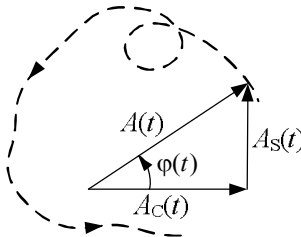


Рис.45. Геометрическое представление узкополосного процесса

5.3. Корреляционная функция сопряженного процесса

Найдем корреляционную функцию сопряженного СП [1]:

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \langle \delta\eta(t_1) \delta\eta(t_2) \rangle = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{\xi}(t' - t'')}{t' - t_1} \frac{dt' dt''}{t'' - t_2}.$$

После замены переменных

$$\tau_1 = t' - t_1, \quad \tau_2 = t'' - t_2, \quad \tau = t_1 - t_2$$

получаем

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{\xi}(\tau_1 - \tau_2 + \tau)}{\tau_1 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2.$$

Сразу видно, что сопряженный СП является стационарным, как и исходный процесс.

Для дальнейшего удобно перейти к энергетическому спектру сопряженного процесса

$$W_{\eta}(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{\xi}(\tau_1 - \tau_2 + \tau)}{\tau_1 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 d\tau.$$

Представление под интегралом корреляционной функции через её спектр, а также того, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega\tau)}{\tau} d\tau = i \cdot \text{sgn}(\omega), \quad (5.4)$$

приводит к результату $W_{\eta}(\omega) = W_{\xi}(\omega)$ автоматически означает по теореме Винера – Хинчина равенство корреляционных функций: $K_{\eta}(\tau) = K_{\xi}(\tau)$.

Последнее означает сохранение для сопряженного процесса стационарности и равенства корреляционных функций и энергетических спектров.

5.4. Взаимная корреляция сопряженных процессов

В предыдущем разделе мы получили равенство корреляционных функций сопряженных СП. Возникает вопрос: как они коррелируют между собой [1]?

Подобно тому, как это сделано выше, можно записать

$$K_{\xi, \eta}(t_1, t_2) = \langle \delta\xi(t_1) \delta\eta(t_2) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(t_1 - t'') \frac{dt''}{t'' - t_2}.$$

После замены переменной интегрирования имеем

$$K_{\xi,\eta}(t_1, t_2) = \langle \delta\xi(t_1)\delta\eta(t_2) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau - \tau'') \frac{d\tau''}{\tau''} = K_{\xi,\eta}(\tau),$$

где $\tau = t_1 - t_2$. Взаимный энергетический спектр, определяемый как

$$W_{\xi,\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau) K_{\xi,\eta}(\tau) d\tau,$$

с учетом равенства (5.4) получается в виде

$$W_{\xi,\eta}(\omega) = -i \operatorname{sgn} \omega \cdot W_{\xi}(\omega).$$

Взаимный энергетический спектр оказался нечетной и чисто мнимой функцией.

С помощью обратного преобразования Фурье для взаимной корреляционной функции имеем

$$K_{\xi,\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega\tau) \cdot \operatorname{sgn} \omega \cdot W_{\xi}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\omega\tau) W_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (5.5)$$

Это синус-преобразование Фурье.

Отсюда следует

$$K_{\xi,\eta}(\tau) = -K_{\xi,\eta}(-\tau) = -K_{\eta,\xi}(\tau), \quad K_{\xi,\eta}(\tau = 0) = 0.$$

Первое означает нечетность, а второе – ортогональность сопряженных СП. Последнее особенно подчеркивает, что корреляционная функция есть мера лишь линейной взаимосвязи, но не взаимозависимости.

5.5. Корреляционные свойства квадратурных составляющих

Наша задача – найти и изучить статистические характеристики огибающей $A(t)$ и начальной фазы $\varphi(t)$ [1]. Для этого удобно перейти от реализаций $\xi(t)$ и $\eta(t)$ к медленно меняющимся во времени реализациям $A_C(t)$ и $A_S(t)$. В соответствии с общим определением квадратурные составляющие СП

$$Z(t) = A_C(t) + iA_S(t) = \exp(-i\omega_0 t) \cdot [\xi(t) + i\eta(t)],$$

или, что то же самое,

$$A_C(t) = \xi(t) \cos \omega_0 t + \eta(t) \sin \omega_0 t,$$

$$A_S(t) = -\xi(t) \sin \omega_0 t + \eta(t) \cos \omega_0 t,$$

Используя определение и тригонометрические преобразования, найдем корреляционные функции для квадратур:

$$\begin{aligned}
K_C(\tau) &= K_\xi(\tau) \cos \omega_0 \tau + K_{\xi,\eta}(\tau) \sin \omega_0 \tau = K_S(\tau), \\
K_{C,S}(\tau) &= K_{\xi,\eta}(\tau) \cos \omega_0 \tau - K_\xi(\tau) \sin \omega_0 \tau = -K_{S,C}(\tau).
\end{aligned}
\tag{5.6}$$

Здесь $\tau = t_1 - t_2$. Четность и нечетность этих функций подобна четности и нечетности сопряженных процессов. В этом смысле часто говорят, что процессы $A_C(t)$, $A_S(t)$ являются квадратурно сопряженными.

Разрешая уравнения (5.6) относительно $K_\xi(\tau)$ и $K_{\xi,\eta}(\tau)$, получаем

$$\begin{aligned}
K_\xi(\tau) &= K_C(\tau) \cos \omega_0 \tau - K_{C,S}(\tau) \sin \omega_0 \tau = K_\eta(\tau), \\
K_{\xi,\eta}(\tau) &= -K_C(\tau) \sin \omega_0 \tau + K_{C,S}(\tau) \cos \omega_0 \tau = -K_{\eta,\xi}(\tau).
\end{aligned}
\tag{5.7}$$

Общими свойствами являются:

$$\begin{aligned}
K_\xi(0) &= K_\eta(0) = K_C(0) = K_S(0) = \sigma^2, \\
K_{\xi,\eta}(0) &= K_{C,S}(0) = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, дисперсии квадратур оказываются равными дисперсии исходного узкополосного процесса. Последнее равенство означает некоррелированность сопряженных процессов в совпадающие моменты времени.

5.6. Распределение огибающей и фазы нормального узкополосного шума

Основной круг задач, связанных с анализом узкополосных процессов вида

$$\xi(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad A(t) \geq 0,$$

состоит в нахождении различных вероятностных характеристик (плотностей вероятностей, корреляционных функций и др.) для огибающей $A(t)$, случайной фазы $\varphi(t)$ и их производных по времени [1]. При этом часто полагают регистрируемый сигнал нормальным СП. Такая ситуация возникает, например, при дальнем тропосферном распространении радиоволн, когда сигнал за горизонт проникает за счет рассеяния на турбулентных неоднородностях тропосферы. Подобным образом ведут себя сигналы, рассеянные неровными поверхностями. Нормальность процессов обеспечивается суммированием большого числа равнозначных составляющих. Собственные флуктуационные шумы радиоприемных устройств на выходе УРЧ и УПЧ также гауссовские.

Достоинства метода, основанного на переходе от узкополосного случайного процесса к его квадратурным составляющим, становятся очевидными, когда требуется вычислить двумерную плотность вероятности $f(A, \varphi)$.

Общая методика решения подобных задач заключается в следующем. Так как преобразование Гильберта является линейным, то для гауссовско-

го процесса $\xi(t)$ сопряженный процесс $\eta(t)$ будет также гауссовским. При этом квадратурные компоненты $A_C(t)$ и $A_S(t)$, а также их различные производные есть совместно гауссовские процессы с известными корреляционными характеристиками и для них можно записать выражения совместных нормальных плотностей вероятностей.

В совпадающие моменты времени квадратуры некоррелированы, а значит, и независимы. Отсюда сразу запишем совместный закон их распределения:

$$f(A_C, A_S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{A_C^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{A_S^2}{2\sigma^2}\right).$$

Здесь σ^2 – дисперсия исходного процесса.

Теперь, чтобы получить искомую плотность вероятности $f(A, \varphi)$, следует выполнить функциональное преобразование, переводящее случайный вектор $\{A_C(t), A_S(t)\}$ в новую случайную совокупность $\{A, \varphi\}$:

$$A_C(t) = A(t) \cos \varphi(t); \quad A_S(t) = A(t) \sin \varphi(t).$$

При этом

$$A \in [0, \infty) \quad \text{и} \quad \varphi \in [-\pi, \pi]$$

Закон их совместного распределения получается с использованием известного правила (4.8)

$$f_{A,\varphi}(A, \varphi) = f(A_C, A_S) \cdot |J|.$$

Якобиан такого преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -A \sin \varphi \\ \sin \varphi & A \cos \varphi \end{vmatrix} = A.$$

$$f_{A,\varphi}(A, \varphi) = f(A_C, A_S) \cdot A = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right).$$

Закон распределения огибающей с учетом свойства согласованности распределений имеет вид

$$f_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{A,\varphi}(A, \varphi) d\varphi = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), \quad A \in [0, \infty). \quad (5.8)$$

А закон распределения фазы следующий:

$$f_\varphi(\varphi) = \int_0^\infty f_{A,\varphi}(A, \varphi) dA = \frac{1}{2\pi}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Таким образом, начальная фаза узкополосного случайного процесса распределена равномерно. Физически это означает отсутствие какого-либо преимущественного значения начальной фазы у отдельно взятых реализаций.

Очевидно, что

$$f_{A,\varphi}(A, \varphi) = f_A(A)f_\varphi(\varphi),$$

т.е. амплитуда и фаза независимы.

Распределение амплитуды имеет вид распределения Рэлея. Среднее значение амплитуды для него

$$\langle A \rangle = \int_0^{\infty} A \cdot f_A(A) dA = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Выражение для дисперсии имеет вид

$$\sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \quad \langle A^2 \rangle = \int_0^{\infty} A^2 \cdot f_A(A) dA = 2\sigma^2.$$

Дисперсия

$$\sigma_A^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 = 0.429\sigma^2.$$

Глубина замираний определяется как

$$\alpha = \frac{\sigma_A^2}{\langle A \rangle^2} = \frac{\langle A^2 \rangle}{\langle A \rangle^2} - 1 = \frac{4 - \pi}{\pi} = 0.273.$$

Это эквивалентно значению

$$10\lg(\alpha) = -5.64\text{dB}.$$

Считается, что для нормального СП характерны наиболее глубокие замирания (вариации) амплитуды сигнала. Близость глубины замираний к найденному значению служит индикатором: распределения амплитуды по закону Релея, самого сигнала по нормальному закону, отсутствия когерентной составляющей (среднего значения).

Располагая одномерной плотностью вероятности огибающей, можно решить ряд задач теории узкополосных случайных процессов, в частности, найти вероятность превышения огибающей некоторого заданного уровня.

Пример 16. Узкополосный нормальный процесс имеет постоянное значение спектра мощности $W_0 = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ В}^2 \cdot \text{с}$ в пределах полосы частот от $\omega_{\min} = 10^5 \text{ с}^{-1}$ до $\omega_{\max} = 1.02 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$. Найти вероятность того, что огибающая этого процесса будет превосходить уровень $A_0 = 5\text{В}$ [4].

Решение. По условию задачи эффективная ширина спектра процесса $\Delta\omega_{\text{эфф}} = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$. Поэтому дисперсия $\sigma^2 = W_0 \Delta\omega_{\text{эфф}} = 3 \text{ В}^2$. Согласно определению понятия плотности вероятности, искомая величина

$$P(A \geq A_0) = \int_{A_0}^{\infty} f(A) dA = \exp\left(-\frac{A_0^2}{2\sigma^2}\right) = \exp(-25/6) = 0.0155.$$

Можно утверждать, что событие, рассматриваемое в этом примере, является достаточно редким.

5.7. Распределение огибающей смеси сигнала и узкополосного нормального шума

Рассмотрим задачу о законе распределения узкополосного нормального СП с не равным нулю средним значением [1]. Обозначим через $A_0(t)$ и $\varphi_0(t)$ амплитуду и фазу детерминированной составляющей сигнала. Квадратуры для нее определяются как

$$\langle A_C(t) \rangle = A_0(t) \cos \varphi_0(t); \quad \langle A_S(t) \rangle = A_0(t) \sin \varphi_0(t).$$

Повторяя рассуждения, приведенные в начале предыдущего раздела, о нормальности и независимости распределения квадратур, запишем закон их совместного распределения:

$$f(A_C, A_S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(A_C - \langle A_C \rangle)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(A_S - \langle A_S \rangle)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Переходя теперь к совместному закону распределения амплитуды и фазы сигнала, получим

$$f_{A,\varphi}(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2 - 2AA_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + A_0^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Видно, что амплитуда и фаза в общем случае не являются независимыми.

Закон распределения амплитуды получается путем интегрирования:

$$\begin{aligned} f_A(A) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_{A,\varphi}(A, \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2 + A_0^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{AA_0}{\sigma^2}\right), \quad A \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(x \cos \varphi) d\varphi$$

– модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Закон распределения (5.9) является обобщением закона Рэля и называется обобщенным законом распределения Рэля (рис.46). Этот закон известен также как закон Райса.

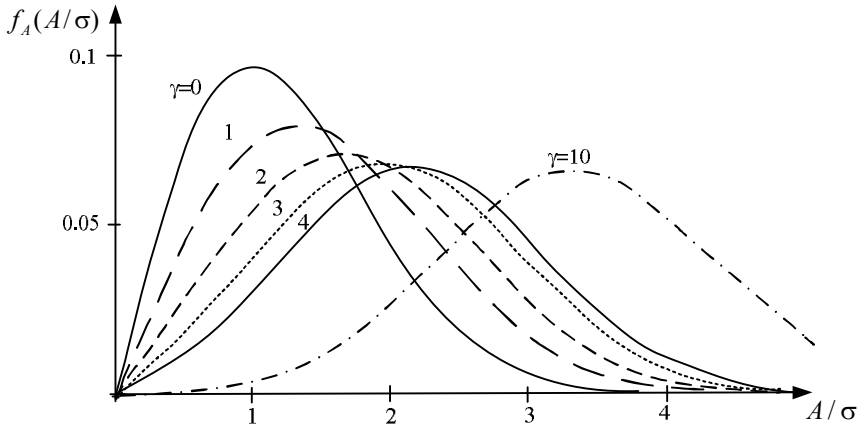


Рис.46. Закон распределения амплитуды смеси сигнал+шум

Иследуем его поведение при изменении параметра $\gamma = A_0^2 / \sigma^2$, называемого отношением сигнал – шум (ОСШ). Здесь можно выделить два предельных случая: малого и большого ОСШ. При малом ОСШ ($\gamma \ll 1$) мы имеем переход к закону Рэля. При большом ОСШ ($\gamma \gg 1$) можно воспользоваться асимптотикой модифицированной функции Бесселя и записать

$$f_A(A) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(A-A_0)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad A \in [0, \infty).$$

Таким образом, распределение амплитуды нормализуется и в пределе при $\gamma \rightarrow \infty$ переходит в δ -функцию. Последнее означает, что амплитуда становится детерминированной.

5.8. Распределение фазы смеси сигнала с шумом

Чтобы получить закон распределения фазы при наличии отличной от нуля детерминированной составляющей, необходимо, продолжая выкладки предыдущего раздела, вычислить интеграл [1]:

$$f_{A,\varphi}(A, \varphi) = \int_0^{\infty} f_{A,\varphi}(A, \varphi) dA = \int_0^{\infty} \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2 - 2AA_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + A_0^2}{2\sigma^2}\right\} dA,$$

$$\varphi \in [-\pi, \pi]$$

За счет тригонометрических преобразований перепишем его в более удобном виде:

$$f_{\varphi}(\varphi) = \exp\left\{-\frac{A_0^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}{2\sigma^2}\right\} \int_0^{\infty} \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{[A - A_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}{2\sigma^2}\right\} dA.$$

Здесь мы ограничимся лишь асимптотическим анализом записанного выражения при малом и большом ОСШ.

Случай малого ОСШ ($\gamma \ll 1$): получается равномерный закон распределения. Более интересен случай большого ОСШ ($\gamma \gg 1$). При этом множитель, стоящий перед интегралом, становится определяющим. Отличный от нуля вклад будет получаться в малом диапазоне изменения φ вблизи значения $\varphi \approx \varphi_0$, так что

$$\sin(\varphi - \varphi_0) \approx \varphi - \varphi_0 \quad \text{и} \quad \cos(\varphi - \varphi_0) \approx 1.$$

С учетом этого имеем

$$f_{\varphi}(\varphi) \approx \exp\left\{-\frac{A_0^2 (\varphi - \varphi_0)^2}{2\sigma^2}\right\} \int_0^{\infty} \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(A - A_0)^2}{2\sigma^2}\right\} dA \approx$$

$$\approx \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{A_0^2 (\varphi - \varphi_0)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Получился нормальный закон распределения со средним значением $\langle \varphi \rangle = \varphi_0$ и дисперсией распределения $\sigma_{\varphi}^2 = \gamma^{-1}$. Измерение дисперсии фазы может быть использовано для оценки ОСШ и наоборот.

В пределе при $\gamma \rightarrow \infty$ закон распределения фазы переходит в δ -функцию. Это означает, что фаза становится детерминированной. Поведение плотности распределения фазы в общем случае показано на рис.47.

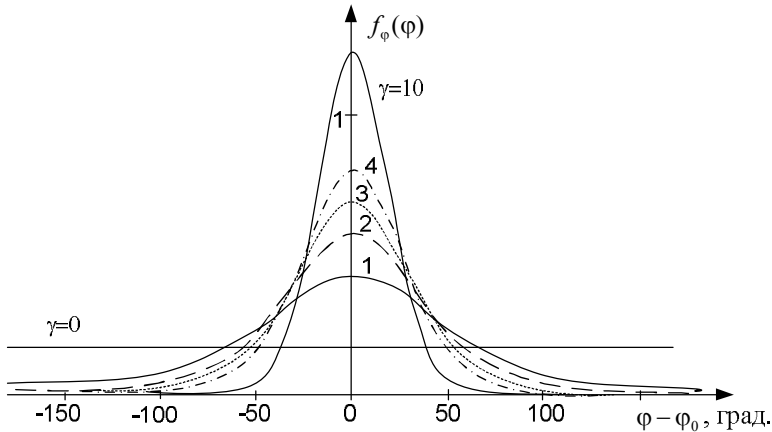


Рис.47. Закон распределения фазы смеси сигнал+шум

5.9. Теорема Котельникова

Взаимосвязь временных и частотных характеристик сигналов может быть использована для измерения характеристик сигналов. Основополагающей здесь является теорема об отсчетах, известная в отечественной литературе как теорема Котельникова. Рассмотрим её суть сначала в общем случае, а затем уточним для узкополосных СП [1].

Сформулируем теорему Котельникова для СП следующим образом: «Случайный процесс с ограниченным энергетическим спектром полностью характеризуется дискретным набором своих сечений, взятых с шагом не большим, чем половина периода наиболее высокой частоты в энергетическом спектре». Речь идет об описании стационарных СП в пределах корреляционной теории.

Рассмотрим стационарный СП, энергетический спектр которого отличен от нуля в пределах диапазона $[-\Omega, \Omega]$. Из теории рядов Фурье известно, что функция, обладающая такими свойствами, представима рядом Фурье:

$$W(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left\{-i \frac{\pi n}{\Omega} \omega\right\},$$

где коэффициенты разложения определяются интегралами от этой функции

$$c_n = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp\left\{i \frac{\pi n}{\Omega} \omega\right\} W(\omega) d\omega.$$

По теореме Винера – Хинчина можно записать

$$c_n = \frac{\pi}{\Omega} K\left(\tau = \frac{\pi n}{\Omega}\right).$$

В результате для энергетического спектра имеем

$$W(\omega) = \frac{\pi}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K\left(\tau = \frac{\pi n}{\Omega}\right) \exp\left\{-i \frac{\pi n}{\Omega} \omega\right\}.$$

С другой стороны, по той же теореме Винера – Хинчина сама корреляционная функция может быть вычислена через энергетический спектр:

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} W(\omega) \exp\{i\omega\tau\} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega\tau - n\pi)}{(\Omega\tau - n\pi)}. \quad (5.10)$$

Полученный ряд называется *рядом Котельникова*.

Согласно определению КФ для стационарных СП можно записать

$$K\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right) = \left\langle \delta\xi\left(t + \frac{\pi n}{\Omega}\right) \delta\xi(t) \right\rangle. \quad (5.11)$$

Величина t здесь произвольная, а значит, может быть и дискретной, например,

$$t_m = \pi m / \Omega.$$

Это означает, что для получения (5.11) вполне достаточно отчетов случайного процесса в дискретных сечениях t_m . Эти сечения и сами отсчеты КФ в (5.10) взяты с шагом

$$\Delta\tau = \pi / \Omega = T / 2,$$

где $T = 2\pi / \Omega$ – период самой высокой частоты в спектре. Если теперь искусственно раздвинуть спектр, дополнив его нулями, то это будет эквивалентно увеличению Ω и уменьшению шага $\Delta\tau$. Точность восстановления КФ только возрастет.

Разложение в ряд Котельникова (5.10) может быть использовано и для узкополосных случайных процессов. Достаточно положить

$$\Omega = \omega_0 + \Delta \approx \omega_0.$$

В этом случае, по сути дела, привязка будет идти к несущей частоте сигналов. Однако правильность оцифровки этой составляющей не важна, поскольку величина ω_0 и так известна. Иначе говоря, при этом никак не используется, что энергетический спектр узкополосного СП равен нулю на значительной части частотного интервала

$$[-\omega_0 + \Delta, \omega_0 - \Delta].$$

Ситуация существенно улучшится, если сечения брать для квадратурных компонент, для которых спектр локализован диапазоном $[-\Delta, +\Delta]$ и ряд Котельникова записывается как

$$K_C(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_C\left(\frac{\pi n}{\Delta}\right) \frac{\sin(\tau\Delta - n\pi)}{(\tau\Delta - n\pi)},$$

$$K_{C,S}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{C,S}\left(\frac{\pi n}{\Delta}\right) \frac{\sin(\tau\Delta - n\pi)}{(\tau\Delta - n\pi)}.$$

В результате с использованием (5.7)

$$K_\xi(\tau) = K_C(\tau) \cos \omega_0 \tau - K_{C,S}(\tau) \sin \omega_0 \tau = K_\eta(\tau),$$

можно записать

$$K(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ K_C\left(\frac{\pi n}{\Delta}\right) \cos \omega_0 \tau - K_{C,S}\left(\frac{\pi n}{\Delta}\right) \sin \omega_0 \tau \right\} \frac{\sin(\tau\Delta - n\pi)}{(\tau\Delta - n\pi)}.$$

Шаг следования сечений взят как $\delta\tau = \pi/\Delta$, и поскольку для узкополосных СП $\Delta \ll \omega_0$, выигрыш будет значителен:

$$\delta\tau/\Delta\tau \approx \omega_0/\Delta \gg 1.$$

Теорема Котельникова для узкополосных СП может быть сформулирована следующим образом: «Узкополосный случайный процесс полностью характеризуется дискретным набором своих сечений, взятых с шагом не большим, чем половина периода наиболее высокой частоты в энергетическом спектре квадратурных компонент».

Глава 6. Прием сигналов в условиях шумов

Любой реальный сигнал является случайным процессом. Возникает лишь вопрос о соотношении его детерминированной и флуктуационной составляющих.

Детерминированная составляющая называется также когерентной составляющей или средним значением случайного процесса (СП).

Флуктуационная составляющая называется некогерентной составляющей, шумом или центрированным СП. Несмотря на кажущуюся очевидность такого представления, само деление сигналов на детерминированные и флуктуационные составляющие весьма условно: детерминированная составляющая может сложным образом изменяться во времени и внешне походить на шум. Последнее время эти сигналы начинают очень широко использоваться в системах сверхскоростной связи и сверхширокополосного зондирования. Что касается информации, то очевидно, что сложный сигнал переносит больше информации, чем простой.

В вопросе о приеме сигналов в условиях шумов выделяют две задачи: выделения сигналов из шумов и обнаружения сигнала. Рассмотрим каждую из них отдельно [1].

6.1. Оптимальный фильтр

Рассмотрим простейшую задачу выделения сигналов из шумов. Будем считать, что принимаемый нами сигнал представим в виде суммы

$$x(t) = \eta(t) + \xi(t),$$

где оба слагаемых являются центрированными стационарными СП, но один из них для нас является сложным полезным сигналом $\eta(t)$, а второй – шумом $\xi(t)$. Между собой они независимы.

Задача выделения заключается в построении такого способа декомпозиции суммарного сигнала, чтобы полезный сигнал в максимально неискаженном виде выделялся из смеси сигнал + шум.

Попытаемся решить задачу выделения с помощью линейной фильтрации. Мысленно построим такой фильтр, чтобы на его выходе формировался сигнал

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau,$$

максимально подобный полезному сигналу $\eta(t)$ (рис.48).

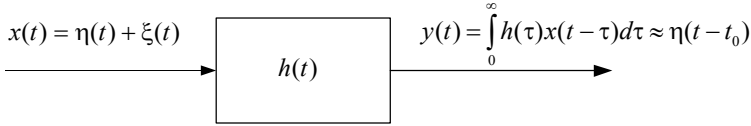


Рис. 48. Выделение сигнала оптимальным фильтром

Для этого потребуем, чтобы величина

$$\mu^2 = \left\langle [y(t) - \eta(t-t_0)]^2 \right\rangle,$$

называемая дисперсией ошибки воспроизведения, была минимальна. Здесь t_0 – некоторое время, которое необходимо фильтру для выполнения этой операции. Расписывая выражение, имеем

$$\mu^2 = \left\langle \left[\int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau - \eta(t-t_0) \right]^2 \right\rangle = \quad (6.1)$$

$$= \sigma_{\eta}^2 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau')h(\tau'') [K_{\eta}(\tau' - \tau'') + K_{\xi}(\tau' - \tau'')] d\tau' d\tau'' - 2 \int_0^{\infty} h(\tau')K_{\eta}(\tau' - t_0) d\tau',$$

где $\sigma_{\eta}^2 = K_{\eta}(0)$ и $K_{\eta}(\tau)$ – дисперсия и корреляционная функция полезного сигнала, а $K_{\xi}(\tau)$ – корреляционная функция шумового сигнала.

Для минимизации дисперсии ошибки воспроизведения применим вариационный анализ. Предположим, что мы уже нашли импульсную характеристику нужного нам фильтра $h(\tau)$. Проведем некоторую малую, вообще говоря, произвольную ее вариацию

$$h(\tau) \rightarrow h(\tau) + \delta h(\tau).$$

При этом для вариации дисперсии ошибки воспроизведения с точностью до первого порядка малости членов имеем

$$\delta(\mu^2) = 2 \int_0^{\infty} \delta h(\tau') \left\{ \int_0^{\infty} \delta h(\tau'') [K_{\eta}(\tau' - \tau'') + K_{\xi}(\tau' - \tau'')] d\tau'' - K_{\eta}(\tau' - t_0) \right\} d\tau'. \quad (6.2)$$

Вариационной производной называется функция

$$\frac{\delta(\mu^2)}{\delta h(\tau')} = 2 \left\{ \int_0^{\infty} h(\tau'') [K_{\eta}(\tau' - \tau'') + K_{\xi}(\tau' - \tau'')] d\tau'' - K_{\eta}(\tau' - t_0) \right\} d\tau'.$$

Если импульсная характеристика $h(\tau)$ найдена нами оптимально, то при произвольного вида малой вариации $\delta h(\tau)$ интеграл (6.2) должен быть следующего порядка малости. Это может быть только в случае, если выражение, стоящее в фигурных скобках под интегралом, обращается в нуль, т.е.

$$\int_0^{\infty} h(\tau'') [K_{\eta}(\tau' - \tau'') + K_{\xi}(\tau' - \tau'')] d\tau'' = K_{\eta}(\tau' - t_0).$$

Это интегральное уравнение для оптимизирующей импульсной характеристики фильтра. Уравнение называется *уравнением Винера – Хопфа*.

Решение уравнения Винера – Хопфа может быть получено в предположении, что время, необходимое для разделения сигналов t_0 , достаточно велико по сравнению с интегральными масштабами корреляции каждого из процессов в смеси сигнал+шум:

$$t_0 \gg \tau_{\eta}, \tau_{\xi}. \quad (6.3)$$

В этом случае можно считать, что

$$|\tau' - t_0| \leq \tau_{\eta}, \text{ но } |\tau' - \tau''| \leq \tau_{\eta}, \tau_{\xi}.$$

Поэтому под интегралом в (6.2) можно принять

$$|\tau'' - t_0| \leq \tau_{\eta}, \tau_{\xi} \text{ и далее } \tau'' \leq \tau_{\eta}, \tau_{\xi}.$$

В конечном счете, это означает, что с учетом предположения (6.3) нижний предел в интеграле без большой ошибки может быть раздвинут до минус бесконечности. Решим уравнение, выразив корреляционные функции через энергетические спектры с помощью уравнений Винера – Хинчина и используя связь передаточной функции и импульсной характеристики. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau'') \exp(-i\omega\tau'') d\tau'' \left[(W_{\eta}(\omega) + W_{\xi}(\omega)) \exp(i\omega\tau') - W_{\eta}(\omega) \exp\{i\omega(\tau' - t_0)\} \right] d\omega = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left[(W_{\eta}(\omega) + W_{\xi}(\omega)) \exp(i\omega\tau') - W_{\eta}(\omega) \exp\{i\omega(\tau' - t_0)\} \right] d\omega = 0.$$

Интеграл равен нулю независимо от выбора параметров τ' и t_0 . Поэтому тождественно равно нулю подынтегральное выражение. В результате для передаточной функции искомого фильтра получаем

$$H(\omega) = \frac{W_{\eta}(\omega)}{W_{\eta}(\omega) + W_{\xi}(\omega)} \exp(-i\omega t_0).$$

Фильтр с такой характеристикой называется *оптимальным*. Смысл полученного результата таков: частотный коэффициент передачи оптимального фильтра, минимизирующего среднеквадратическую ошибку, должен быть значителен на тех частотах, где сосредоточена основная доля мощности полезного сигнала. Там, где велика спектральная плотность мощности помехи, коэффициент передачи оптимального фильтра должен уменьшиться.

Минимальное значение ошибки воспроизведения получается, если в (6.1) подставить $H(\omega)$:

$$\min(\mu^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_{\eta}(\omega)W_{\xi}(\omega)}{W_{\eta}(\omega) + W_{\xi}(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Очевидно, наилучшее разделение шума и сигнала происходит при полном неперекрывании их энергетических спектров. Так, используя оптимальный фильтр, можно попытаться, например, разделить голос певца и музыки в записи песни.

6.2. Согласованный фильтр

Часто при приеме сигналов в условиях шумов важным является не правильное восстановление формы полезного сигнала, а само установление наличия такового. Такая задача возникает при радиолокационном обнаружении целей. Аналогичная задача решается в теории распознавания образов. Здесь известно, какие в принципе могут быть сигналы, и ставится задача идентификации предъявляемых реализаций. Рассмотрим основные положения теории обнаружения. Первым понятием здесь является согласованная фильтрация.

Для простоты будем считать, что полезный сигнал является детерминированным $S_0(t)$, а шум – центрированным стационарным случайным процессом с известным энергетическим спектром $W_{\xi}(\omega)$. Суммарный принимаемый сигнал записывается как

$$x(t) = S_0(t) + \xi(t).$$

Количественной мерой наличия шума в таком сигнале является отношение сигнал – шум (ОСШ), которое определяется как

$$\gamma_0(t) = \frac{|S_0(t)|^2}{\sigma_{\xi}^2}.$$

Если дисперсия шума σ_{ξ}^2 мала, то ОСШ должно быть велико при наличии сигнала. На практике шумы могут быть велики, и тогда до принятия каких-либо решений о наличии полезного сигнала сначала желательно увеличить ОСШ. Попытаемся отыскать решение с использованием линейной фильтрации.

Сигнал на выходе линейного фильтра запишем в виде

$$y(t) = S(t) + \zeta(t),$$

где полезный сигнал на выходе выражается через спектр сигнала на входе и передаточную функцию фильтра:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S_0(\omega) \exp\{i\omega t\} d\omega.$$

Дисперсия шума на выходе меняется и определяется соотношением

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 W_{\xi}(\omega) d\omega.$$

Изменяется и ОСШ на выходе:

$$\gamma(t) = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S_0(\omega) \exp\{i\omega t\} d\omega \right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 W_{\xi}(\omega) d\omega}$$

Поставим себе задачу максимально повысить ОСШ за счет подходящего выбора передаточной функции фильтра $H(\omega)$. Применяя вариационный подход, получим выражение для искомой характеристики фильтра

$$H(\omega) = \frac{S_0^*(\omega) \exp(-i\omega t_0)}{W_{\xi}(\omega)}. \quad (6.4)$$

Фильтр с такой характеристикой называется *согласованным*. Частотный коэффициент передачи согласованного фильтра пропорционален спектральной плотности полезного сигнала, для выделения которого этот фильтр предназначен, и обратно пропорционален спектральной плотности шума. Значение момента времени t_0 входит лишь в выражение фазовой характеристики фильтра. При этом множитель $\exp(-i\omega t_0)$ описывает смещение выходного отклика фильтра по оси времени на величину t_0 .

На выходе фильтра полезный сигнал

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_{\xi}(\omega)} \exp\{i\omega(t-t_0)\} d\omega.$$

Форма этого сигнала нелинейно искажается: он как бы обостряется во времени и усиливается в момент времени $t = t_0$. В этот момент сигнал становится положительным и максимальным:

$$S_m \equiv S(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_{\xi}(\omega)} d\omega.$$

Дисперсия шума, наоборот, относительно уменьшается и становится равной

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_{\xi}(\omega)} d\omega = S_m.$$

В целом ОСШ на выходе согласованного фильтра

$$\gamma(t) = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S_0(\omega) \exp\{i\omega(t - t_0)\} d\omega \right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_{\xi}(\omega)} d\omega}$$

и достигает своего максимального значения в момент времени $t = t_0$:

$$\max \gamma(t) = \gamma(t_0) = S_m.$$

Заметим, что сам момент времени $t = t_0$, вообще говоря, произвольный, априорно задается исследователем, но должен быть много больше интегрального масштаба корреляции входного шума и характерного времени изменения входного сигнала.

6.3. Корреляционный прием

Рассмотрим частный случай, когда в смеси сигнал + шум на входе согласованного фильтра шум является белым:

$$W_{\xi}(\omega) = W_0 = \text{const.}$$

На выходе согласованного фильтра полезный сигнал имеет вид

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_0(\omega)|^2}{W_0} \exp\{i\omega(t - t_0)\} d\omega.$$

Импульсная характеристика фильтра определяется путем преобразования Фурье передаточной функции $H(\omega)$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_0^*(\omega) \exp(-i\omega t_0)}{W_0} \exp(i\omega t) d\omega.$$

Учитывая свойство спектров функций

$$S_0^*(\omega) = S_0(-\omega),$$

получаем

$$h(t) = \frac{1}{2\pi W_0} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) \exp\{i\omega(t_0 - t)\} d\omega = \frac{1}{W_0} S_0(t_0 - t).$$

Выходное напряжение фильтра при поступлении на его вход процесса $S_0(t)$ определяется с помощью интеграла Дюамеля

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) S_0(t - \tau) d\tau = \frac{1}{W_0} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(t_0 - \tau) S_0(t - \tau) d\tau. \quad (6.5)$$

Полный сигнал на выходе

$$y(t) = \frac{1}{W_0} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(t_0 - \tau) [S_0(t - \tau) + \xi(t - \tau)] d\tau. \quad (6.6)$$

В то время, как ОСШ на входе исчезающе мало, $\gamma_0 \rightarrow 0$, на выходе

$$\gamma(t) = \frac{|S(t)|^2}{\sigma_{\xi}^2} = \frac{|S(t)|^2}{S_m} = \frac{|S(t)|^2}{S(t_0)} = \frac{\frac{1}{W_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} S_0(t_0 - \tau) S_0(t - \tau) d\tau \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_0(t_0 - \tau) S_0(t_0 - \tau) d\tau}$$

и при $t = t_0$ достигает максимального значения:

$$\max \gamma(t) = \gamma(t_0) = S_m = \frac{1}{W_0} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(t_0 - \tau) S_0(t_0 - \tau) d\tau.$$

Это величина конечная. Выигрыш достаточно большой:

$$\gamma(t_0) / \gamma_0 \gg 1.$$

Заметим, что выражения (6.5) и (6.6) с точностью до постоянного множителя представляют собой корреляционные функции. Поэтому согласованную фильтрацию часто ассоциируют с корреляционным приемом.

Для примера представим себе входной сигнал в виде прямоугольного импульса:

$$S_0(t) = S_0 \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Задав $t_0 = 0$, получаем

$$S(t) = \frac{S_0^2 T}{W_0} \left(1 - \frac{|t|}{T}\right), \quad \gamma(t) = S_m \left(1 - \frac{|t|}{T}\right), \quad S_m = \frac{S_0^2 T}{W_0}, \quad |t| \leq T.$$

Сигнал исказил свою форму: из прямоугольного сигнал превратился в треугольный (рис.49). Обострение сигнала в момент времени t_0 и обеспечивает максимальное увеличение ОСШ в этот момент.

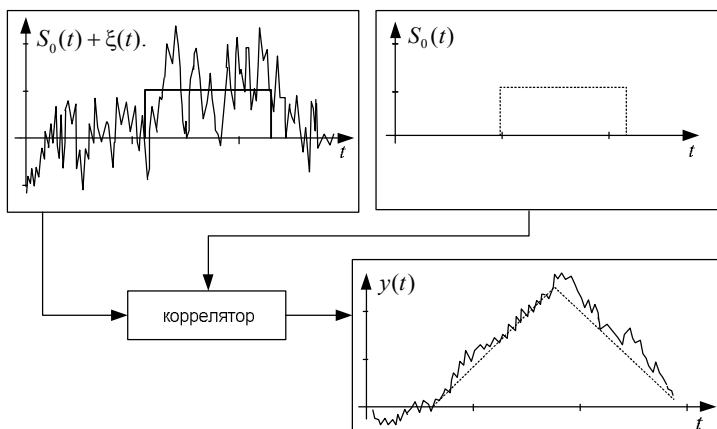


Рис.49. К пояснению понятия «корреляционный прием»

Рассмотрим подробнее работу корреляционного приемника на основе функциональной схемы, изображенной на рис.50 [2]. Линия задержки имеет общую задержку, равную априорному интервалу T ожидаемых значений τ . От линии задержки сделаны равномерно отводы; разность в задержках между соседними отводами равна постоянной величине Δ . При этом схема позволяет получить на выходе интеграторов, следующих за множителями, значения взаимной функции корреляции, соответствующие задержкам $\tau_i = i\Delta$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$; $N\Delta = T$.

Если дополнить корреляционный приемник схемой сравнения, которая выдавала бы на выходе номер m -го подынтервала Δ , в котором сигнал имеет наибольший максимум, то все устройство можно использовать для определения неизвестного момента появления импульсного сигнала. При этом точность измерения будет характеризоваться величиной Δ . Для импульсных радиолокационных станций величину Δ берут приблизительно равной длительности импульса.

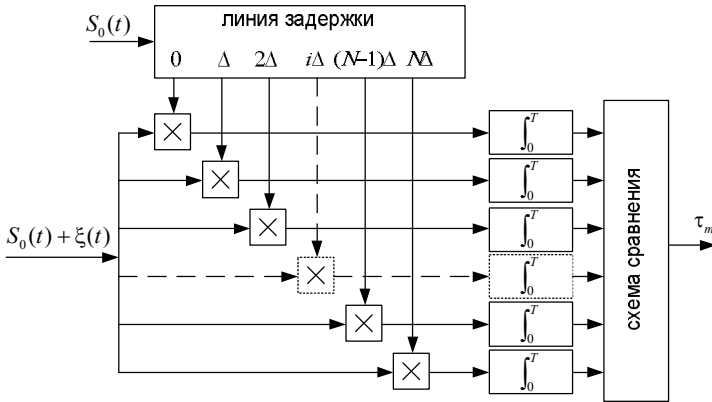


Рис. 50. Функциональная схема корреляционного приемника для определения временного положения импульсного сигнала.

6.4. Отношение правдоподобия и обнаружение сигнала

Максимально увеличив ОСШ в результате согласованной фильтрации для выходного сигнала

$$y(t_0) = S_m + \zeta(t_0), \quad (6.7)$$

можно приступить к решению следующей здесь задачи – задачи обнаружения и принятия решения о наличии полезного сигнала [1]. Делать это лучше в момент t_0 . Сигнал $z \equiv y(t_0)$ остается случайным, и поэтому решение этой задачи должно использовать вероятностный подход. Действуя стандартным способом, определим, так называемое, отношение правдоподобия следующим образом:

$$\Lambda = \frac{f(z|1)}{f(z|0)},$$

где $f(z|1)$ и $f(z|0)$ – плотности распределения суммарного сигнала при условии, что в смеси (6.7) на самом деле сигнал есть или нет соответственно. Если $f(\zeta)$ – безусловная плотность распределения шума, то $f(z|0) = f(z)$ и $f(z|1) = f(z - S_m)$.

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда шум распределен по нормальному закону. Тогда

$$f(z|0) = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$f(z|1) = f(z - S_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(z - S_m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$\Lambda = \exp\left\{-\frac{(z - S_m)^2}{2\sigma_\zeta^2} + \frac{z^2}{2\sigma_\zeta^2}\right\} = \exp\left\{z - \frac{S_m}{2}\right\}.$$

Здесь учтено, что

$$\sigma_\zeta^2 = S_m.$$

Для принятия решения необходимо из каких-либо соображений задать пороговое значение отношения правдоподобия Λ_n . Принятие решения основано на следующем. Если для измеренного значения z оказалось $\Lambda \geq \Lambda_n$, то принимается решение о наличии полезного сигнала в смеси сигнал + шум. Если же оказалось, что $\Lambda < \Lambda_n$, то принимается решение об отсутствии полезного сигнала. Часто используется равнозначная форма соответствующих неравенств: $z \geq z_n$ и $z < z_n$, где $z_n = \ln \Lambda_n + S_m/2$.

Выбор порогового уровня z_n соответствует делению всего диапазона возможных значений на две дополняющие друг друга части. Попадание измеренного значения z в одну из них, например, превышение порога, соответствует принятию положительного решения о наличии сигнала. Попадание в другую часть – решению об отсутствии сигнала. Для выбора пороговых значений Λ_n или z_n существует множество подходов, некоторые из которых мы рассмотрим далее.

6.5. Критерии обнаружения

Все критерии обнаружения имеют своей целью определение пороговых значений [1]. Наиболее широко этот подход используется в радиолокации, поэтому для наглядности, следуя традициям этого раздела радиофизики, при обнаружении сигнала будем говорить об обнаружении цели. Выбор того или иного порога, в конечном счете, приводит к принятию решения, вытекающего из обнаружения или необнаружения. Например, пуску или не пуску ракет по самолетам противника.

6.5.1. Критерии максимального правдоподобия и идеального наблюдателя

Самый очевидный и простой критерий получается, если априорно появление цели или её отсутствие равнозначны. В этом случае полагают $\Lambda_n = 1$. Что более вероятно в отношении правдоподобия – числитель или знаменатель, в ту сторону и склоняются при принятии решения. Отсюда и название – *критерий максимального правдоподобия*. Уровень порогового значения по

уровню зарегистрированного сигнала выбирается равным $z_{п} = S_m/2$, т.е. половине ожидаемой максимальной амплитуды полезного сигнала от цели после согласованной фильтрации. Смысл выбора порога иллюстрируется рис.51.

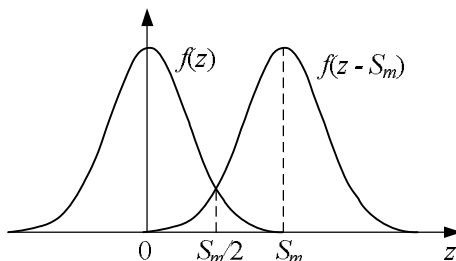


Рис.51. Иллюстрация порогового значения

Оптимальный пороговый уровень определяется точкой пересечения графика распределения шума с графиком совместного распределения сигнала и шума.

Для формулировки *критерия идеального наблюдателя* предварительно все возможные ошибки принятия решений разделим на два класса. К первому классу отнесем ошибки типа пропуска цели. Это ошибки, возникающие при принятии решения об отсутствии цели, если на самом деле она была. Вероятность такой ошибки определяется как

$$P_{0,1} = p(S \neq 0) \int_{-\infty}^{z_{п}} f(z|1) dz,$$

где $p(S \neq 0)$ – безусловная (априорная) вероятность появления цели. Последствия от ошибки этого типа могут быть самыми катастрофическими, например, уничтожение наблюдателя.

Ко второму классу отнесем ошибки типа ложной тревоги. Это ошибки, возникающие при принятии решения о наличии цели, если на самом деле она отсутствовала. Вероятность такой ошибки определяется как

$$P_{1,0} = p(S = 0) \int_{z_{п}}^{\infty} f(z|0) dz,$$

где $p(S = 0) = 1 - p(S \neq 0)$ – безусловная (априорная) вероятность отсутствия цели. Последствия от ошибки этого типа могут быть не самыми катастрофическими, но неприятными, например, ложный пуск ракет.

Критерий идеального наблюдателя по выбору порогового значения $z_{п}$ заключается в требовании сведения к минимуму вероятности всех ошибок:

$$\min_{z_n} \{P_{0,1} + P_{1,0}\} = \min_{z_n} \left\{ p(S \neq 0) \int_{-\infty}^{z_n} f(z|1) dz + p(S = 0) \int_{z_n}^{\infty} f(z|0) dz \right\}.$$

Приравнивание к нулю производной по z_n от функции, стоящей в фигурных скобках, приводит к уравнению

$$\frac{p(S = 0)}{p(S \neq 0)} = \frac{f(z_n|1)}{f(z_n|0)} = \Lambda_n. \quad (6.8)$$

Смысл выбора порога иллюстрируется рис.52.

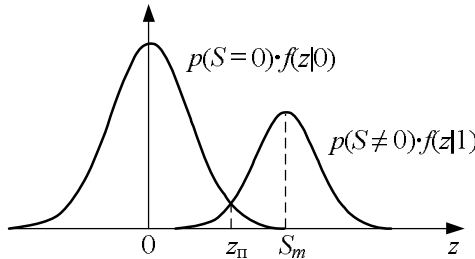


Рис.52. Иллюстрация порогового значения

Оптимальный уровень определяется точкой пересечения графика распределения шума с графиком совместного распределения сигнала и шума с учётом масштабных коэффициентов – вероятностей. При сильном сигнале уровень z_n должен выбираться высоким, а при слабом этот уровень приближается к среднеквадратичному напряжению шума.

Само пороговое значение z_n находится как

$$z_n = \ln \frac{p(S = 0)}{p(S \neq 0)} + \frac{S_m}{2}.$$

Априорное знание повышает или понижает пороговое значение. Например, в мирное время вероятность появления самолетов потенциального противника менее вероятно, чем их отсутствие. В результате

$$\ln \frac{p(S = 0)}{p(S \neq 0)} \geq 0,$$

и пороговое значение для пуска ракет увеличивается. В военное время ситуация обратная.

Приведём пример. Подлежащий определению сигнал является огибающей суммарного высокочастотного колебания, которое вызвано как воз-

действием шума, так и полезного высокочастотного сигнала (радиоимпульса).

При воздействии одного шума плотность распределения огибающей A высокочастотного колебания описывается распределением Релея. При совместном воздействии шума и высокочастотного сигнала огибающая имеет плотность распределения, подчиняющуюся закону Релея – Райса.

Графики функций и приведены на рис.46. Кривая при отношении сигнал-шум $\gamma = 0$ соответствует распределению шума и отсутствию сигнала. Кривая с $\gamma \gg 1$ соответствует смеси сигнала с шумом. Оптимальный уровень опять определяется точкой пересечения кривой распределения шума с кривой совместного распределения сигнала и шума, только масштабы графиков должны измениться в соответствии с уравнением (6.8).

6.5.2. Критерий Неймана – Пирсона

В радиолокационных системах обнаружения используется критерий, называемый критерием Неймана – Пирсона. Использование другого критерия объясняется тем, что ложное обнаружение цели может иметь весьма нежелательные последствия. Поэтому вероятность ложной тревоги должна быть весьма малой, обычно задаются её значением порядка $10^{-6} \div 10^{-10}$. Часто её значение не может быть увеличено, даже учитывая то, что при этом снижается вероятность обнаружения сигнала. Итак, при использовании критерия Неймана – Пирсона вероятность ложной тревоги фиксируется изначально. Так как вероятность ложной тревоги функционально связана с относительным порогом, то последний также оказывается заданным.

Практически стараются удовлетворить одновременно двум противоречивым требованиям: 1) чтобы вероятность $P_{0,1}$ пропуска сигнала не превосходила некоторой величины и 2) чтобы вероятность $P_{1,0}$ ложной тревоги была минимальна. Качественно логика такого выбора иллюстрируется рис.53.

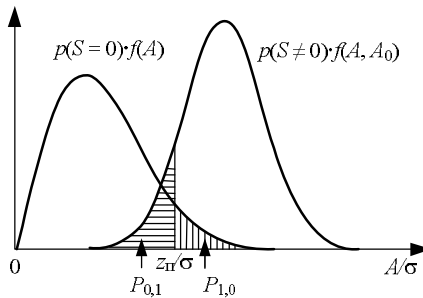


Рис.53. Иллюстрация порогового значения

Вертикальная линия, восстановленная из точки соответствующего значения относительного порога z_n/σ , совместно с графиками ограничивает площади, соответствующие вероятностям пропуска сигнала $P_{0,1}$ и ложной тревоги $P_{1,0}$. Они отмечены разной штриховкой. Приведенные графики позволяют качественно проанализировать различные ситуации. Так при увеличении отношения сигнал/шум график функции $p(S \neq 0):f(A, A_0)$ будет смещаться вправо. Поэтому для сохранения допустимой величины $P_{0,1}$ окажется возможным увеличить относительный порог z_n/σ . При этом вероятность $P_{1,0}$ уменьшится! Верно и обратное.

Поэтому единственной возможностью увеличения вероятности правильного обнаружения цели остаётся повышение отношения сигнал/шум на входе порогового устройства, т.е. на выходе линейного тракта приёмного устройства.

Задаются вероятностью ошибочной регистрации сигнала при наличии на входе только шума, называемой вероятностью ложной тревоги, полагая

$$\int_{z_n}^{\infty} f(z|0)dz = C. \quad (6.9)$$

Минимизируемая вероятность при этом носит название вероятности пропуска цели.

В этом случае задача является задачей на условный экстремум. Решается она путем минимизации по z_n функционала

$$F(z_n, \lambda) = \int_{-\infty}^{z_n} f(z|1)dz + \lambda \int_{z_n}^{\infty} f(z|0)dz,$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа. Для порогового значения $z_n(\lambda)$ получается уравнение

$$\frac{f(z_n|1)}{f(z_n|0)} = \lambda.$$

Согласно этому соотношению, неопределенный множитель λ сам и является пороговым значением Λ_n . Для нахождения его следует взять такое значение, чтобы уравнение (6.9) удовлетворялось. Так, например, для нормальных шумов уравнение (6.9) имеет вид

$$\int_{z_n}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{z^2}{2S_m}\right\}}{\sqrt{2\pi S_m}} dz = C.$$

Заканчивая этот раздел, заметим, что на практике пороговое значение часто определяется чисто экспериментально.

Глава 7. Элементы теории информации

Рассмотрим такой важный момент, как информационное содержание СП. С одной стороны, кажется, что случайность процессов, их стохастичность должна только разрушать информационность сигналов. С другой – простейшие сигналы мало несут в себе информации, и только сложные сигналы обладают достаточной информационной емкостью. Но случайные процессы и являются обобщенной моделью сложных сигналов. Возникает кажущееся противоречие: чем больше шумов, тем меньше информации и чем больше стохастичности, тем её больше. Чтобы разобраться с этим, обратимся к количественному определению информации [1].

7.1. Количественное определение информации

Для простоты ограничим себя сразу рассмотрением дискретной информации, переносимой некоторыми символами, например цифрами, буквами, знаками и т.д. Под информацией будем понимать совокупность сведений ими переносимыми. Попытаемся ввести меру этой информации.

Пусть в некотором сообщении содержится N различных символов $\{x_n\}$. Вся совокупность этих символов образует алфавит сообщения, число N является его объемом. Будем считать, что символы взаимно независимы и $p_n = P(x_n)$ – вероятность появления отдельного символа в сообщении. Из общих соображений понятно, что информация, доставляемая отдельным символом, зависит от вероятности его появления:

$$I_n = \varphi(p_n). \quad (7.1)$$

При этом должно выполняться два условия. Во-первых, информация, доставляемая двумя независимыми символами, равна сумме информации, доставляемой каждым символом. Во-вторых, если какой-то символ априорно известен, то информация, доставляемая им, равна нулю. Математически эти два условия записываются соответственно как

$$\varphi(p_n p_m) = \varphi(p_n) + \varphi(p_m). \quad (7.2)$$

$$\varphi(p_n = 1) = 0. \quad (7.3)$$

Установим вид этой функции.

Продифференцируем (7.2) по p_n и затем помножим обе части уравнения на p_n . В результате имеем

$$p_n p_m \varphi'(p_n p_m) = p_n \varphi'(p_n).$$

Поскольку в общем случае p_n и p_m относительно произвольные величины, то должно выполняться равенство

$$p_n \varphi'(p_n) = C_1 = \text{const.}$$

Общее решение возникающего простейшего дифференциального уравнения задается формулой

$$\varphi(p_n) = C_1 \ln(p_n) + C_2.$$

Используя условие (7.3) как начальное, получаем, что самым общим представлением меры информации является функция

$$\varphi(p_n) = C_1 \ln(p_n). \quad (7.4)$$

Константа C_1 связана с выбором системы единиц. Если за единицу информации (1 бит) взять такое её количество, которое доставляется одним из двух равновероятных символов ($p_1 = p_2 = 1/2$), то тогда

$$1\text{бит} = C_1 \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

и величина

$$C_1 = -1/\ln(2).$$

В целом получаем, что

$$\varphi(p_n) = -\log_2(p_n) [\text{бит}]$$

При выборе другого основания у логарифма получают другие единицы информации. Например,

$$\varphi(p_n) = -\log_8(p_n) [\text{байт}]$$

Другими менее распространенными единицами являются

$$\varphi(p_n) = -\ln(p_n) [\text{непер}],$$

$$\varphi(p_n) = -\lg(p_n) [\text{диг}].$$

С принципиальной точки зрения выбор основания логарифмов не имеет значения, так как по известной формуле

$$\log_b c = \log_a c \cdot \log_b a$$

легко перейти от одной системы логарифмов к другой.

В общем случае будем писать, не конкретизируя основание:

$$I_n = \varphi(p_n) = -\log(p_n).$$

Очевидно, собственная информация конкретного символа не может быть отрицательной,

$$I_n \geq 0.$$

7.2. Средняя собственная и взаимная информация

Из-за наличия помех и случайных искажений выходные символы $\{y_k\}$ и входных символы $\{x_n\}$ связаны неоднозначно, т.е. один и тот же передаваемый символ x_n может перейти в различные символы y_k , и наоборот. Поэтому можно говорить о совместных вероятностях $P(y_k, x_n)$ появления на выходе символа y_j , если на входе был символ x_i . Тогда говорят об условной вероятности появления символов

$$P(y_k|x_n) = \frac{P(y_k, x_n)}{P(x_n)}$$

и условной информации

$$I(y_k|x_n) = -\log P(y_k|x_n)$$

и аналогично

$$I(x_n|y_k) = -\log P(x_n|y_k)$$

Можно говорить о взаимной информации, доставляемой символом $\{y_k\}$ о символе $\{x_n\}$, определяемой как разность

$$I(x_n; y_k) = I(x_n) - I(x_n|y_k) = -\log P(x_n) + \log P(x_n|y_k).$$

Взаимная информация симметрична:

$$\begin{aligned} I(x_n; y_k) &= -\log \frac{P(x_n)P(y_k)}{P(x_n|y_k)P(y_k)} = -\log \frac{P(x_n)P(y_k)}{P(x_n, y_k)} = \\ &= -\log \frac{P(x_n)P(y_k)}{P(y_k|x_n)P(x_n)} = I(x_k; y_n). \end{aligned}$$

Эта информация является мерой передаваемой элементарной информации.

От символа к символу элементарная информация меняется, и так как, вообще говоря, символы являются случайными, то случайной величиной является и элементарная информация. Определим среднюю собственную информацию как информацию, приходящуюся в среднем на один символ сообщения:

$$\langle I(x_n) \rangle = -\sum_n p_n \log p_n \equiv H(\bar{x}).$$

В теории информации её также называют энтропией сообщения.

Энтропию можно истолковать как количественную меру неопределенности о сообщении до его приема, т.е. как то количество информации, которое должно быть получено для опознавания любого сообщения множества $\{x_i\}$.

Энтропия не может быть отрицательной величиной, так как собственная информация

$$I_n = -\log(p_n) \geq 0.$$

Поэтому энтропия равна нулю лишь в том случае, когда одна из вероятностей p_i равна единице, а все остальные равны нулю. Этот результат хорошо согласуется с физическим смыслом энтропии как меры неопределенности: действительно, в этом случае может передаваться только одно сообщение, которое заранее достоверно известно. Прием такого сообщения (достоверного) не доставляет получателю никакой информации.

Средняя взаимная информация определяется аналогично:

$$\begin{aligned} \langle I(x_n; y_k) \rangle &= -\sum_n \sum_k P(x_n, y_k) \log \frac{P(x_n)P(y_k)}{P(x_n, y_k)} = \\ &= H(\bar{x}) - H(\bar{x} | \bar{y}) = H(\bar{y}) - H(\bar{y} | \bar{x}) \equiv H(\bar{x}; \bar{y}). \end{aligned}$$

Она характеризует, сколько информации содержится в среднем в одном выходном символе об одном входном символе и наоборот.

7.3. Свойства средней собственной и взаимной информации

Перечислим основные свойства средней информации:

1. При полностью достоверном приеме средняя взаимная информация совпадает с энтропией сообщения:

$$H(\bar{x}; \bar{x}) = H(\bar{x}).$$

Свойство вытекает из равенства

$$H(\bar{x} | \bar{x}) = 0.$$

2. При полностью недостоверном приеме средняя взаимная информация равна нулю:

$$H(\bar{x}; \bar{x}) = H(\bar{x}) - H(\bar{x}) = 0.$$

3. В общем случае средняя взаимная информация не отрицательна:

$$H(\bar{x}; \bar{y}) \geq 0.$$

Для доказательства, используя (7.4), запишем

$$H(\bar{x}; \bar{y}) = -\sum_n \sum_k P(x_n | y_k) P(y_k) \log \frac{P(x_n)}{P(x_n | y_k)}.$$

Воспользуемся неравенством:

$$-\ln x \geq 1 - x,$$

так что

$$H(\bar{x}; \bar{y}) \geq \log e \sum_n \sum_k P(x_n | y_k) P(y_k) \left[1 - \frac{P(x_n)}{P(x_n | y_k)} \right] = 0.$$

Утверждение доказано.

4. Энтропия максимальна при полностью неопределенной ситуации, т.е. при равновероятном распределении символов сообщения.

Найдем распределение вероятностей p_n , при котором энтропия сообщения

$$H(\bar{x}) \equiv - \sum_n p_n \log p_n$$

максимальна. Необходимо только учесть, что

$$\sum_n p_n = 1.$$

Сформулируем функционал для задачи на условный экстремум:

$$F(p_1, p_2, \dots, p_n) = - \sum_n p_n \log p_n + \lambda \left[\sum_n p_n - 1 \right].$$

Здесь λ – множитель Лагранжа. Простое нахождение экстремума приводит к уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial p_n} = - \log e [\ln p_n + 1] + \lambda = 0,$$

откуда следует $p_n = \text{const}$, т.е. не зависит от n . Условие нормировки дает, что

$$p_n = 1/N.$$

Утверждение доказано. Нетрудно подсчитать, что само максимальное значение энтропии при этом равно

$$H(\bar{x}) \equiv \log N.$$

7.4. Пропускная способность канала. Теорема Шеннона о помехоустойчивом кодировании

Представим себе обобщенную схему канала связи (рис.54) в виде последовательности элементов: 1) источник сообщения, формирующий символы $\{x_n\}$; 2) кодер, шифрующий исходные символы путем однозначного перевода в другие символы $\{\xi_n\}$; 3) канал связи, вообще говоря, добавляющий внешние шумы, разрушающий достоверность передачи и доставляющий символы $\{\zeta_k\}$; 4) декодер, на выходе которого сообщение декодируется и проявляются символы $\{y_k\}$, поступающие потребителю информации.

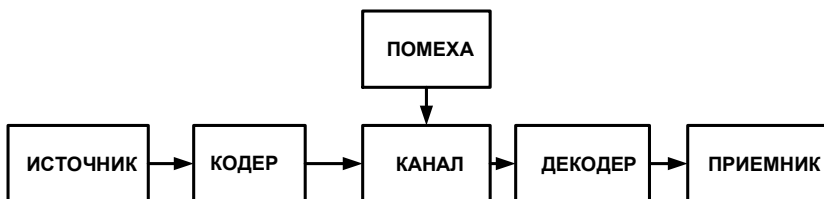


Рис.54. Функциональная схема одноканальной системы связи

Качество канала связи оценивается, в конечном счете, по количеству средней взаимной информации, передаваемой по нему в единицу времени. Эта величина называется скоростью передачи информации:

$$v = \frac{H(\bar{\xi}; \bar{\zeta})}{\tau}.$$

Здесь τ – время, затрачиваемое на передачу одного символа. Скорость передачи информации зависит, с одной стороны, от качества канала, а с другой – от закона распределения информации по символам. Максимально возможное её значение называется пропускной способностью канала связи.

Шеннон на этот счет доказал основополагающую теорему: «Существует, по крайней мере, одна процедура кодирования сообщения, при которой информация может передаваться со скоростью меньшей, но сколь угодно близкой к пропускной способности канала при произвольно малой вероятности ошибок».

Литература

1. Якубов В.П. Статистическая радиофизика: Учебное пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2006.
2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982.
3. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч.1, 2. М.: Наука, 1976.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1983.
5. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: Наука, 1981.
6. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. М.: Сов. радио, 1969.
7. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. М.: Мир, 1989.
8. Липкин И.А. Статистическая радиотехника. Теория информации и кодирования, М.: «Вузовская книга», 2002.
9. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем, М.: Радио и связь, 2004.
10. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных, М.: Мир, 1989, ISBN 5–03–001071–8.
11. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по статистической радиофизике, часть 1, Учебное издание, Издательство Саратовского университета, 1992.
12. Яневич Ю.М. Задачи приема сигналов и определения их параметров на фоне шумов, Лекции для студентов СПбГУ, www.phys.spbu.ru.
13. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника: Примеры и задачи. Учебное пособие для вузов, М.: Сов. радио, 1980.
14. Данверпорт В.Б., Рут В.Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов, М.: Изд. Иностранной литературы, 1960.