#4

Невласні інтеграли

Нехай $[a,+\infty) \xrightarrow{f} R$ і $\forall x > a \quad f \in R[a,x]$. Тоді визначено функцію $[a,\infty) \xrightarrow{I} R$, де

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1}$$

Якщо існує $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = I \in R$, то f називається ***<u>інтегрованою за Ріманом на проміжку</u>*** $[a,+\infty)$ (в невласному розумінні), а число I – ***<u>її невласним інтегралом першого ряду</u>***. При цьому позначають

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{2}$$

Якщо вказана границя не існує, або дорівнює нескінченності, то кажуть, що відповідний невласний не існує, чи розбігається.

<u>Теорема 2.</u> *(Ознака порівняння)*

Нехай функції $[a,+\infty) \xrightarrow{f_1} R$, $[a,+\infty) \xrightarrow{f_2} R$ невід'ємні, неперервні на області визначення за винятком множин лебегової міри нуль. Якщо $\exists x_0 \ge a \ \exists c : \forall x \ge x_0$ виконується нерівність $f_1(x) \le cf_2(x)$, то із збіжності $I_2(x)$ слідує збіжність $I_1(x)$, і з розбіжності $I_1(x)$ слідує розбіжність $I_2(x)$.

Доведення. $\forall x \ge x_0$ маємо: $I_1(x) - I_1(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(t)dt \le \int\limits_{x_0}^{x} f_2(t)dt = I_2(x) - I_2(x_0) \Rightarrow$ слідує все що треба.

Теорема доведена.

<u>Наслідок 1.</u> *(Інтегральна ознака збіжності числового ряду)*

Нехай невід'ємна функція $[a,+\infty) \xrightarrow{f} R$ неперервна в кожній точці області визначення за виключенням множини лебегової міри нуль, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ збігається тоді і тільки тоді, коли $\exists(x_n) : x_n \to \infty$ для якої ряд $\sum \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ - збіжний.

Доведення. З теореми 1 із збіжності інтегралу слідує збіжність ряду для будь-якої послідовності (x_n), таким чином необхідність доведена. Для доведення достатності використаємо умову невід'ємності функції f. $\forall x \in R$ $\int\limits_a^{x} f(t)dt \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$, а тому $I(x)$ - монотонна й обмежена, з чого і слідує, що $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ - збіжний.

Теорема доведена.

#5

Невласні інтеграли від степеневої функції. Проінтегруємо степеневу функцію по відрізку [a,b], де 0<a<b. У результаті отримаємо

Виходячи з формули , неважко зробити висновки про збіжність чи розбіжність невласних інтегралів першого й другого родів від степеневої функції прирізних значення параметра *p*

При p<1 розбігається

при p=1

при p>1 збігається

#6

1. Невласні інтеграли

Нехай $[a,+\infty)\xrightarrow{f} R$ і $\forall x>a \quad f\in R[a,x]$. Тоді визначено функцію $[a,\infty)\xrightarrow{I} R$, де

$$I(x)=\int_a^x f(t)dt \tag{1}$$

Якщо існує $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)=I\in R$, то f називається ***<u>інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a,+\infty)$</u>*** (в невласному розумінні), а число ***<u>$I-$її невласним інтегралом першого ряду</u>***. При цьому позначають

$$I=\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{2}$$

Якщо вказана границя не існує, або дорівнює нескінченності, то кажуть, що відповідний невласний не існує, чи розбігається.

Повністю аналогічно, для функції $(-\infty,a]\xrightarrow{f} R \left((-\infty,+\infty)\xrightarrow{f} R\right)$, якщо $\forall x<a \ (\forall x,y: x<y)\ f\in R[x,a]\ (f\in R[x,y])$ і існує

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt=I \quad \left(\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to+\infty}}\int_x^y f(t)dt=I\right),\text{ то } I\overset{def}{=}\int_{-\infty}^a f(t)dt \quad \left(I\overset{def}{=}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt\right).$$

Теорема 1. *(Критерій Коші)*

Інтеграл $F(\alpha)$ збігається рівномірно на інтервалі I_2 тоді і тільки тоді, коли

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A_0\ge a:\ \forall A_1>A_0,\ A_2>A_0 \Rightarrow \sup_{\alpha\in I_2}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(t,\alpha)dt\right|<\varepsilon \tag{6}$$

Доведення. Необхідність. Нехай $F(\alpha)$ рівномірно збігається, тобто для нього виконується умова (4), з неї слідує, що $\forall\varepsilon>0\ \exists A(\varepsilon)\ge a:\ \forall A_1\ge A,\ A_2>A \Rightarrow$

$$\sup_{\alpha\in I_2}\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(t,\alpha)dt\right| < \varepsilon \ , \ \sup_{\alpha\in I_2}\left|\int_{A_2}^{+\infty} f(t,\alpha)dt\right| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \sup_{\alpha\in I_2}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(t,\alpha)dt\right| = \sup_{\alpha\in I_2}\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(t,\alpha)dt - \int_{A_2}^{+\infty} f(t,\alpha)dt\right| \le$$

$$\sup_{\alpha\in I_2}\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(t,\alpha)dt\right| + \sup_{\alpha\in I_2}\left|\int_{A_2}^{+\infty} f(t,\alpha)dt\right| < 2\varepsilon \, .$$

Необхідність доведена.

Достатність. Якщо виконується умова **(6)**, з урахуванням збіжності $F(\alpha)$ маємо: $\lim\limits_{A_2\to\infty}\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)dx\right| = \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| \le \varepsilon \ \ \forall \alpha \in I_2$. Тепер переходимо до супремуму по $\alpha \in I_2$ і маємо потрібне, враховуючи що A_1 - довільне і $A_1 \ge A$ $\sup\limits_{\alpha\in I_2}\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(t,\alpha)dt\right| \le \varepsilon$.

Теорема доведена.

<u>Теорема</u> Якщо для функції $[a,+\infty) \xrightarrow{f} R$ збігається інтеграл $\int_a^{+\infty}|f(t)|dt$, то $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ називається ***<u>абсолютно збіжним</u>***. Не абсолютно збіжний інтеграл називається ***<u>умовно збіжним</u>***.

<u>Теорема 3.</u> *(Зв'язок абсолютної та умовної збіжності інтегралу)*

Якщо $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ абсолютно збігається, то він збіжний.

Доведення. Використаємо критерій Коші. Все слідує з умови $\forall\varepsilon > 0 \quad \forall x_1, x_2 \ge x$ $f, |f| \in R[x_1, x_2]$ $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| < \varepsilon$

та нерівності $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \le \int_{x_1}^{x_2}|f(t)|dt$. $\quad \forall x_1, x_2 \ge x \quad \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt < \infty$

#7.Ознака Абеля збіжності невласного інтегралу 1-го роду: означення: збіжність у підінтегральної функції довільного знаку.

Нехай функції $[a,+\infty) \xrightarrow{f} R$, $[a,+\infty) \xrightarrow{g} R$ такі, що $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ - збігається, а функція g - монотонна й обмежена, то $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ - збігається.

Функцію довільного знаку можна представити у вигляді різниці двох невідємних функцій:

$\Phi(x) = \phi^{+}(x) - \phi^{-}(x)$

#8.Ознака Діріхле збіжності невласного інтегралу 1-го роду: означення: збіжність у підінтегральної функції довільного знаку.

Нехай функції $[a,+\infty) \xrightarrow{f} R$, $[a,+\infty) \xrightarrow{g} R$ такі, що $\int\limits_a^A f(t)dt$ - обмежений, а функція g - монотонно прямує до нуля, то $\int\limits_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ - збігається.

Функцію довільного знаку можна представити у вигляді різниці двох невідємних функцій:

$\Phi(x) = \phi^{+}(x) - \phi^{-}(x)$

#9.Невласні інтеграли 2-го роду: означення, збіжність,. застосування основної теореми інтегрального числення.

Нехай $[a,b) \xrightarrow{f} R$, і b особлива точка функції f. Нехай f необмежена на $[a,b)$, але обмежена $\forall x \in [a,b)$ на $[a,x]$ і $f \in R[a,x]$. Позначимо $I(x) = I \in R$, то f називається інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a,b]$, а число I –її невласним інтегралом другого роду. Тоді невласний інтеграл позначають $\int_a^b f(x)\,dx$ і називають **збіжним.**

Якщо у функції ϕ(x) існує первісна Φ(x), то

I = $\int_a^b$ ϕ(x) dx = Φ(b) – Φ(a). – основна формула інтегрального числе

#10.Невласні інтеграли 2-го роду: основні властивості (теореми 1, 2).

Теорема 1 (Критерій коші)

$\int_a^b f(x)\,dx$ існує $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in [a,b) :\ 0 < b - x_1 < \delta,\ 0 < b - x_2 < \delta$ виконується нерівність $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$.

Теорема 2 (практична ознака збіжності)

Нехай $[a,b) \xrightarrow{f} R$, $\forall x \in (a,b)\ f \in R[a,x]$.

Якщо $\exists c_1 > 0\ \lambda < 1 :\ \overline{\lim\limits_{x \to b-0}} (b-x)^{\lambda} |f(x)| = c_1$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ -збіжний.

Якщо $\exists c_2 > 0\ \lambda \geq 1 :\ \underline{\lim\limits_{x \to b-0}} (b-x)^{\lambda} |f(x)| = c_2$ $\int_a^b f(x)\,dx$ не існує.

Теорема 3: $f(x,y)$ f'_y

Невласні інтеграли 2-го роду: Осн. вл. Теорема 3, 4.

11

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix} a \le x < +\infty \\ c \le y \le d \end{matrix} \right\}$$

$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ – збіжний $= I(y)$

$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)$ – є рівном. збіжним по y

тоді $I(y)$ – є диферен. і:

$$\boxed{I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx}$$

Доведення: $J(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$

$\forall y \in [c,d]$

$$\int_c^y J(t)dt = \int_c^y dt \underbrace{\int_a^{+\infty} f'_t(x,t)dx}_{\text{рівн збіж}} \overset{T.2}{=} \int_a^{+\infty} dx \int_c^y f'_t(x,t)dt =$$

$$= \int_a^{+\infty} f(x,t)\Big|_c^y dx = \int_a^{+\infty} \big(f(x,y) - f(x,c)\big)dx = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} f(x,c)dx =$$

$= I(y) - I(c)$

$$\left(\int_c^y J(t)\,dt\right)'_y = I'(y); \qquad J(y) = I'(y)$$

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx = I'(y).$$

Теорема 4: $f(x,y)$ визначено і неперервно на

$$Q = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} a \le x < +\infty \\ b \le y < +\infty \end{matrix} \right\}$$

$$\dot{J}(x) = \int_b^{+\infty} f(x,y)\,dy \qquad I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$a \le x \le A \qquad b \le y \le B$$

$$(\forall A \ge a) \qquad (\forall_y \in B)$$

Тоді, якщо хоча б один з інтегралів:

$$\int_a^{+\infty} dx \int_b^{+\infty} |f(x,y)|\,dy \qquad \int_b^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx$$

є збіжними, то:

$$\int_a^{+\infty} \dot{J}(x)\,dx = \int_b^{+\infty} I(y)\,dy$$ – збігається.

12–13. Збіжність інтегралів II роду у випадку додатньої підінтегральної функції.

I Теорема (1 озн. порів.) 12

Нехай $f(x), g(x) \geq 0$ візн. $\forall x \in [a, b)$

$f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b)$

Якщо $\int_a^b g(x)dx < \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty$.

$\int_a^b f(x)dx$ - розб. $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ - розб.

Дов: Нехай $\int_a^{+\infty} g(x)dx \Rightarrow G(b) = \int_a^b g(x)dx \leq M \ \forall b \geq a$.

Далі $F(b) = \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx = G(b) \leq M \ \forall b \geq a \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$.

2) Нехай $\int_a^b f(x)dx = \infty$, тоді

$F(b) = \infty = \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx = G(b) \leq M$ – протиріччя, бо $M < \infty$.

Отже, якщо $\int_a^b f(x)dx$ – розб., то і $\int_a^b g(x)dx$ – розб.

II. Теорема (2 озн. порів) 13

Нехай $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$;

1) Якщо $f(x) = O^*(g(x))$, $x \to b-0$, то характер збіжності та розбіжності $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b g(x)dx$ однаковий,

2) Якщо $f(x) = o(g(x))$, $x \to b-0$, то із збіжності $\int_a^b g(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty$.

А з розбіжності $\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b g(x)dx = \infty$.

Дов:

з умов теореми $\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to A = const \neq 0. \Rightarrow A - \varepsilon < \frac{f}{g} < A + \varepsilon$, $\forall x$.

помножимо на g: $(A-\varepsilon)g \leq f < (A+\varepsilon)g$, $\forall x$.

#13. Невласні інтеграли 2-го роду: збіжність у випадку додатної підінтегральної функції. 2 теорема порівняння.

(с)Горбаченко В.А. Конспект Моторной. Оригинал Карпович Вита

$f(x) \to 0, \qquad g(x) \geq 0 \qquad \forall x \epsilon [a,b]$

$\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \qquad (0 \leq k \leq +\infty)$

1) $\int\limits_a^{b(вкружочку)} g(x)dx \qquad < -\infty \qquad => \int\limits_a^{b(вкружочку)} f(x)dx < \infty \qquad 0 < k \leq +\infty$

2) $\int\limits_a^{b(вкружочку)} g(x)dx \qquad розбіжний \qquad => \int\limits_a^{b(вкружочку)} f(x)dx - розбіжний \qquad 0 < k \leq +\infty$

#14. Збіжність $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx,\ \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx.$

(c)Горбаченко В.А. Конспект Моторной. Оригинал Карпович Вита

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\delta\to+0}\int_{a+\delta}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\delta\to+0}\int_{a+\delta}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\delta\to+0}\left.\frac{|x+a|^{-a+1}}{-a+1}\right|_{a+\delta}^b =$$

$$= \lim_{\delta\to+0}\frac{1}{1-a}\cdot\left(\frac{1}{(b-a)^{a-1}} - \frac{1}{\delta^{a-1}}\right) = \begin{Bmatrix} const, a-1<0 \\ -\infty, a-1>0 \end{Bmatrix}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\frac{dx}{x-a} = \lim_{\delta\to+0}\ln(x-a)\Big|_{a+\delta}^b = \lim_{\delta\to+0}\ln|b-a| - \ln|\delta-a| - \ln|\delta| \qquad mupe\infty$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^a} \to \begin{cases} зб. & a<1 \\ розб & a\ge 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^a} \to \begin{cases} зб. & a<1 \\ розб & a\ge 1 \end{cases}$$

$f\epsilon[a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{b-h} f(x)dx + \int_{b-h}^b f(x)dx$$

$\forall h\epsilon[0,b-a]$

#15.Невласні інтеграли 2-го роду: збіжність у випадку підінтегральної функції довільного знаку. Критерій Коші. Абсолютна збіжність. Теорема.

(с)Горбаченко В.А. Конспект Моторной. Оригинал Карпович Вита

Критерії Коші. $\int_a^{b(\text{вкружочку})} f(x)dx = \lim_{h\to+0} \int_a^{b-h} f(x)dx$ для збіжності такого інтеграла необхідно і достатньо $\forall \mathrm{E} > 0 \quad \exists \delta(\mathrm{E}) > 0 \quad \forall \, {}^{h`}_{h``} \epsilon [0, b-a]$

$$\begin{matrix} 0 < h` < \delta \\ 0 < h`` < \delta \end{matrix} \qquad |\varPhi(h'') - \varPhi(h')| = \left| \int_0^{b-h''} f(x)dx - \int_0^{b-h'} f(x)dx \right| = \left| \int_{b-h'}^{b-h''} f(x)dx \right| < \mathrm{E}$$

Теорема. f(x),∀xϵ[a,b)

$$\int_a^b |f(x)|dx < \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \infty$$

Озн. $\int_a^{b(\text{вкружочку})} f(x)dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл від модуля функції $\int_a^b |f(x)|dx$

<u>#16.</u> ***Ознака Абеля***

Нехай функції $[a,+\infty) \xrightarrow{f} R$, $[a,+\infty) \xrightarrow{g} R$ такі, що $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ - збігається, а функція g - монотонна й обмежена, то $\int\limits_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ - збігається.

Доведення. За другою теоремою про середнє внаслідок монотонності функції g можемо записати рівність $\forall x_2, x_2 > a$ $I(x_1, x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx = g(x_1)\int\limits_{x_1}^{\xi} f(x)dx + g(x_2)\int\limits_{\xi}^{x_2} f(x)dx$. Якщо записати критерій Коші збіжності інтегралу $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$, то $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A > 0 \;\; \forall x_1, x_2 > A \;\; \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$, а тому $|I(x_1, x_2)| \le 2M\varepsilon$.

Теорема доведена.

Ознака Діріхле

#17.

Нехай функції $[a,+\infty) \xrightarrow{f} R$, $[a,+\infty) \xrightarrow{g} R$ такі, що $\int\limits_a^A f(t)dt$ - обмежений, а функція g - монотонно прямує до нуля, то $\int\limits_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ - збігається.

Доведення. За другою теоремою про середнє внаслідок монотонності функції g можемо записати рівність $\forall x_2, x_2 > a$

$I(x_1, x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx = g(x_1)\int\limits_{x_1}^{\xi} f(x)dx + g(x_2)\int\limits_{\xi}^{x_2} f(x)dx$. Якщо записати критерій Коші збіжності функції g до нуля, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x_1, x_2 > A \quad g(x) < \varepsilon$, а тому $\left| I(x_1, x_2) \right| \le 2M\varepsilon$.

Теорема доведена.

#19: Інтегрування частинами(а) та заміна змінних(б) у невласних інтегралах

А) Нехай функції $f, g \in C[a,+\infty)$, диференційовані в кожній точці області визначення та їх похідні неперервні скрізь, за виключенням множини точок лебегової міри нуль, і крім того існує $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) = A \in R$. За цих умов із збіжності одного з інтегралів $\int\limits_a^{+\infty} f(t)g'(t)dt$, $\int\limits_a^{+\infty} f'(t)g(t)dt$ слідує збіжність іншого і при цьому виконується рівність

$\int\limits_a^{+\infty} f(t)g'(t)dt = A - f(a)g(a) - \int\limits_a^{+\infty} f'(t)g(t)dt$, яку називають ***<u>формулою інтегрування частинами</u>*** для невласного інтегралу першого роду.

Доведення. Все слідує з аналогічної формули для інтегралу Рімана (власного) інтегралу: $\int\limits_a^{x} f(t)g'(t)dt = f(t)g(t)\Big|_{t=a}^{t=x} - \int\limits_a^{x} f'(t)g(t)dt$. Далі граничний перехід при $x \to +\infty$.

Б) Нехай функція $f \in C[a,+\infty)$, функція $[\alpha,+\infty) \xrightarrow{g} R$ диференційована, зростаюча, а її похідна g' неперервна в кожній точці D_g, за виключенням множини лебегової міри нуль, а також $g(\alpha) = a$, $E_g = [a,+\infty)$. Якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ - збігається, то $\exists \int\limits_\alpha^{+\infty} (f \circ g)(t)g'(t)dt$ і при цьому виконується рівність:

$\int\limits_a^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_\alpha^{+\infty} (f \circ g)(t)g'(t)dt$, яку називають формулою ***<u>заміни змінної</u>*** в невласному інтегралі першого роду.

Доведення. Ця теорема також є наслідком аналогічної властивості для інтегралу Рімана. $\forall [a,x] \subset [a,+\infty)$ $\exists [\alpha, y]$: $E_{g[\alpha,y]} = [a,x]$, де $g(y) = x$ (внаслідок неперервності та монотонності функції g) $\Rightarrow$

$\int\limits_a^{x} f(t)dt = \int\limits_\alpha^{y} (f \circ g)(t)g'(t)dt$, ну а далі граничний перехід при одночасному прямуванні x, y до нескінченносты

#20: Головне значення розбіжного інтегралу

Нехай $c \in [a,b] \subset R$, функція $[a,b] \setminus \{c\} \xrightarrow{f} R$ інтегрована $\forall [\alpha, \beta] \subset [a,b] \setminus \{c\}$, та інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ розбігається, але існує $\lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right) = I \in R$, то цю границю називають ***<u>головним значенням у розумінні Коші</u>*** розбіжного інтеграла і позначають $v.p.\int_a^b f(x)dx$.

#21: Власні інтеграли, залежні від параметра(а). Теорема про неперервність(б) . Наслідки(в)

А) Нехай $E = I \times J$, де $I = [a,b]$, $J = (c,d)$, $f : E \to R$ інтегрована за Ріманом $\forall \alpha \in J$ на сегменті I функція. Тоді на інтервалі J визначимо функцію F: $F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)dx$ яку ми назвемо ***<u>інтегралом Рімана, залежним від параметра</u>*** α

Б) Якщо функція f неперервна на E, то $F \in C(J)$.

Доведення. Нехай $\alpha_0 \in J$ - довільна точка цього проміжку, розглянемо звуження $f\Big|_{E'}$, де $E' = I \times J'$. З того, що E' - компакт f - рівномірно неперервна на E'. Тому $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall h: |h| < \delta \ |f(x,\alpha_0 + h) - f(x,\alpha_0)| < \varepsilon \Rightarrow$

$$|F(\alpha_0 + h) - F(\alpha_0)| = \left|\int\limits_a^b (f(x,\alpha_0 + h) - f(x,\alpha_0))dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x,\alpha_0 + h) - f(x,\alpha_0)|dx < < \varepsilon(b-a),$$

що й доводить неперервність F в точці α_0 внаслідок довільності з цього й слідує, що $F \in C(J)$.

В) В умовах попередньої теореми має місце рівність:

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int\limits_a^b f(x,\alpha)dx = \int\limits_a^b \left(\lim_{\alpha \to \alpha_0} f(x,\alpha)\right)dx = \int\limits_a^b f(x,\alpha_0)dx.$$

#22. Диференціювання власного інтеграла, залежного від параметра (всі випадки).

Теорема 3. *(Диференційованість ІЗП)*

Якщо функція f має на E неперервну часткову похідну $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, то функція F (з(1)) диференційована на J і її похідна обчислюється таким чином:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\,dx \qquad \textbf{(4)}$$

(формула Лейбниця)

Доведення. За теоремою 1 $g : \alpha \mapsto \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\,dx$ є неперервною функцією на J, треба довести диференційованість F та рівність $F' = g$, це означає, що треба довести співвідношення:

$$F(\alpha + h) - F(\alpha) - g(\alpha)h = o(h) \qquad \textbf{(5)}$$

Зафіксуємо довільне $\alpha \in J$, і як в теоремі 1 виберемо сегмент $J' \subset J$, який містить α і позначимо $E' = I \times J'$. З рівномірної неперервності $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ на E' ми маємо, що $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \ \forall h : \ |h| < \delta \Rightarrow$ $\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha + h) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \ \ ((\alpha + h) \in J')$.

Застосовуючи теорему про середнє, будемо мати, якщо $|h| < \delta$:

$$\left| f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)h \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi)h - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)h \right| \le$$

$\le \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \cdot |h| < \frac{\varepsilon |h|}{b-a}$, так як ξ середня точка між α і $\alpha + h$. Остаточно маємо:

$$|F(\alpha + h) - F(\alpha) - g(\alpha)h| = \left| \int_a^b \left(f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)h \right) dx \right| \le$$

$\le \int_a^b \left| f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)h \right| dx < \varepsilon |h|$,звідки і слідує рівність **(5)**.

Теорема доведена.

Теорема 4. *(Диференційованість складної функції ІЗП)*

Якщо в умовах теореми 2 f неперервна на E разом із своєю похідною $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, а функції

φ і ψ диференційовані на J і її похідна обчислюється за формулою:

$$\Phi'(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx + f(\psi(\alpha),\alpha)\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha),\alpha)\varphi'(\alpha) \qquad \textbf{(6)}$$

Доведення. Позначимо праву частину рівності **(6)** як $g(\alpha)$ і для довільної точки $\alpha \in J$ і $\forall h : \alpha + h \in J$ розглянемо приріст функції Φ в точці α та оцінимо вираз:

$$|\Phi(\alpha+h) - \Phi(\alpha) - g(\alpha)h| \le \left| \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \left(f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) \right) dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} \left(f(x,\alpha+h) - f(\psi(\alpha),\alpha)\psi'(\alpha)h \right) dx \right| + \left| \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha+h)} \left(f(x,\alpha+h) - f(\varphi(\alpha),\alpha)\varphi'(\alpha)h \right) dx \right|.$$

За попередньою теоремою першій доданок є $o(|h|)$, легко також оцінити два інших доданки: $\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} f(x,\alpha+h)dx = (\psi(\alpha+h) - \psi(\alpha)) f(\xi,\alpha+h) = (\psi'(\alpha)h + o(h)) f(\xi,\alpha+h)$, де ξ - проміжна точка, між $\psi(\alpha)$ та $\psi(\alpha+h)$. З неперервності f,ψ маємо:

$f(\xi,\alpha+h) - f(\psi(\alpha),\alpha)\psi'(\alpha) \to 0$ при $h \to 0$. Тоді маємо таку оцінку різниці:

$$\left| \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\alpha+h)} \left(f(x,\alpha+h) - f(\psi(\alpha),\alpha)\psi'(\alpha)h \right) dx \right| \le$$

$\left| \psi'(\alpha)h \cdot f(\xi,\alpha+h) + o(h) + \psi'(\alpha)hf(\psi(\alpha),\alpha) \right| = o(h)$, аналогічно оцінюється третій доданок. Підсумовуючи все це маємо формулу **(6)**.

Нехай тепер $I_1 = [a,b],\ I_2 = [c,d],\ E = I_1 \times I_2,\ f \in C(R)$ тоді можна визначити неперервні функції $F : \alpha \mapsto \int_a^b f(x,\alpha)dx,\ \alpha \in I_2,\ \Phi : x \mapsto \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha,\ x \in I_1$ на своїх областях визначення. Позначимо:

$$A = \int_c^d F(\alpha)d\alpha = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx \right) d\alpha = \int_c^d d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)dx,$$

$$B = \int_a^b \Phi(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,\alpha)d\alpha \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha.$$

Інтеграли A, B називаються ***повторними***.

#23. Інтегрування власного інтеграла, залежного від параметра.

<u>Теорема 5.</u> *(Інтегрування по параметру ІЗП)*

Якщо $f \in C(R)$, то $A = B$.

Доведення. Розглянемо дві функції:

$\varphi : t \mapsto \int_c^t d\alpha \int_a^b f(x,\alpha)dx$, $t \in [c,d]$, $\psi : t \mapsto \int_a^b dx \int_c^t f(x,\alpha)d\alpha$, $t \in [c,d]$.

Легко побачити за теоремою 3, що $\varphi'(t) = \int_a^b f(x,t)dx = \psi'(t) \ \ \forall t \in [c,d]$, а також $\varphi(c) = \psi(c) = 0$. З останньої умови та тотожності $\varphi' \equiv \psi'$ слідує рівність $\varphi \equiv \psi$, а тому при $t = d$ маємо, що $A = B$.

Теорема доведена.

Зауважимо, що усі наведені теореми цього розділу є лише достатніми умовами.

#24. Невласні інтеграли, залежні від параметра: означення, рівномірна збіжність, зв/язок з ф.п. та ф.р. (теорема). Критерій Коші.

Невласні інтеграли 1 роду, залежні від параметра

Нехай $I_1 = [a, +\infty)$, $I_2 = (c, d)$, $E = I_1 \times I_2$, $f : E \to R$. Розглянемо інтеграл:

$$F(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx,\ \alpha \in I_2, \qquad \textbf{(1)}$$

який називається ***невласним інтегралом першого роду, залежним від параметра*** α (***НІЗП***).

Інтеграл $F(\alpha)$ називається ***збіжним*** на інтервалі I_2 (позначимо це таким чином $F(\alpha) \to$, або $F \to$), якщо він збігається $\forall \alpha \in I_2$, тобто

$$\forall \alpha \in I_2\ \exists \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t, \alpha) dt = I(\alpha) \in R. \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо розписати означення границі за Коші, то одержимо:

$$\forall \alpha \in I_2\ \exists I(\alpha) \in R\ \forall \varepsilon > 0\ \exists A(\alpha, \varepsilon) \ge a : \forall x \ge A \Rightarrow \left| I(\alpha) - \int_a^x f(t, \alpha) dt \right| < \varepsilon,$$

або еквівалентне наведеному:

$$\forall \alpha \in I_2\ \forall \varepsilon > 0\ \exists A(\alpha, \varepsilon) \ge a : \forall x \ge A \Rightarrow \left| \int_x^{+\infty} f(t, \alpha) dt \right| < \varepsilon. \qquad \textbf{(3)}$$

Збіжний на інтервалі I_2 ***інтеграл*** $F(\alpha)$ ***називається рівномірно збіжним на*** I_2 (позначимо це таким чином $F(\alpha) \rightrightarrows$, або $F \rightrightarrows$), якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) \ge a : \forall x \ge A \Rightarrow \sup_{\alpha \in I_2} \left| \int_x^{+\infty} f(t, \alpha) dt \right| < \varepsilon, \qquad \textbf{(4)}$$

або аналогічно можна записати:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) \ge a : \forall x \ge A\ \forall \alpha \ge A \Rightarrow \left| \int_x^{+\infty} f(t, \alpha) dt \right| < \varepsilon, \qquad \textbf{(5)}$$

Теорема 1. *(Критерій Коші)*

Інтеграл $F(\alpha)$ збігається рівномірно на інтервалі I_2 тоді і тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A_0 \geq a : \forall A_1 > A_0 , A_2 > A_0 \Rightarrow \sup_{\alpha \in I_2} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(t,\alpha)dt \right| < \varepsilon \qquad \textbf{(6)}$$

Доведення. Необхідність. Нехай $F(\alpha)$ рівномірно збігається, тобто для нього виконується умова (4), з неї слідує, що $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A(\varepsilon) \geq a : \forall A_1 \geq A, A_2 > A \Rightarrow$

$$\sup_{\alpha \in I_2} \left| \int_{A_1}^{+\infty} f(t,\alpha)dt \right| < \varepsilon \; , \; \sup_{\alpha \in I_2} \left| \int_{A_2}^{+\infty} f(t,\alpha)dt \right| < \varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; \sup_{\alpha \in I_2} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(t,\alpha)dt \right| = \sup_{\alpha \in I_2} \left| \int_{A_1}^{+\infty} f(t,\alpha)dt - \int_{A_2}^{+\infty} f(t,\alpha)dt \right| \leq$$

$$\sup_{\alpha \in I_2} \left| \int_{A_1}^{+\infty} f(t,\alpha)dt \right| + \sup_{\alpha \in I_2} \left| \int_{A_2}^{+\infty} f(t,\alpha)dt \right| < 2\varepsilon \, .$$

Необхідність доведена.

Достатність. Якщо виконується умова **(6)**, з урахуванням збіжності $F(\alpha)$ маємо: $\lim\limits_{A_2 \to \infty} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)dx \right| = \left| \int_{A_1}^{+\infty} f(x,\alpha)dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall \alpha \in I_2$. Тепер переходимо до супремуму по $\alpha \in I_2$ і маємо потрібне, враховуючи що A_1 - довільне і $A_1 \geq A \; \sup\limits_{\alpha \in I_2} \left| \int_{A_1}^{+\infty} f(t,\alpha)dt \right| \leq \varepsilon$.

Теорема доведена.

6. Невласні інтеграли 2-го роду, залежні від параметра

Нехай $I_1 = [a,b)$, $I_2 = (c,d)$, $E = I_1 \times I_2$, $f : E \to R$ і $\forall \alpha \in I_2$ збігається невласний інтеграл другого роду.

$$F(\alpha) = \int_a^{b-} f(x,\alpha)dx , \qquad \textbf{(1)}$$

то можна вважати визначеною функцію $F(\alpha)$, яку називатимемо <u>*невласним інтегралом другого роду, залежним від параметра* α</u>.

Інтеграл $F(\alpha)$ називається <u>*рівномірно збіжним на інтервалі*</u> I_2 , якщо він збігається на I_2 і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$:

$$\forall \delta \in (0,\delta) \; \forall \alpha \in I_2 \left| \int_{b-\delta}^{b-} f(x,\alpha)dx \right| < \varepsilon \qquad \textbf{(2)}$$

Невласний інтеграл другого роду (1) очевидною заміною $t = \dfrac{1}{b-x}$ перетворюється в невласний інтеграл першого роду, тому всі попередні твердження легко переформулюються на випадок невласного інтеграла другого роду.

#25

Теорема 2. *(Мажорантна ознака Вейєрштрасса)*

Для того, щоб інтеграл $F(\alpha)$ збігається рівномірно на інтервалі I_2 достатньо, щоб існувало таке число $x_0 \geq a$ і така функція $[x_0, +\infty) \xrightarrow{\varphi} R$, що $\forall \alpha \in I_2, x \geq x_0$ справджується нерівність $|f(x,\alpha)| \leq \varphi(x)$ та інтеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \varphi(x)dx$ був збіжним.

Доведення. За умовами теореми $\forall \alpha \in I_2$ інтеграл $F(\alpha)$ збігається (за мажорантою ознакою при фіксованому $\alpha \in I_2$). Із збіжності інтегралу $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \varphi(x)dx \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A_0 \geq a$: $\forall A > A_0 \int\limits_{A}^{+\infty} \varphi(x)dx < \varepsilon \Rightarrow \forall \alpha \in I_2 \left| \int\limits_{A}^{+\infty} f(t,\alpha)dt \right| \leq \int\limits_{A}^{+\infty} |f(t,\alpha)dt| \leq \leq \int\limits_{A}^{+\infty} \varphi(x)dx < \varepsilon$, внаслідок чого $F(\alpha)$ збігається рівномірно.

#26

Теорема 3. *(Ознака Абеля)*

Якщо інтеграл $F(\alpha)$ збігається рівномірно на проміжку I_2, а функція $\varphi : E \to R$ - обмежена, та монотонна по змінній x, то інтеграл $\Phi(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)dx$ збігається рівномірно на I_2.

Доведення. З рівномірної збіжності $F(\alpha)$ можемо записати критерій Коші: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_0 \geq a :\ \forall A_1 > A_0, A_2 > A_0$ $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(t,\alpha)dt\right| < \varepsilon$, позначимо $M = \sup\limits_{(x,\alpha)\in E} \left|\varphi(x,\alpha)\right| > 0$ (при $M = 0$ теорема очевидна). З монотонності φ та інтегрованості f на проміжку $[A_1, A_2]$ запишемо другу теорему про середнє:

$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)dx\right| = \left|\varphi(A_1,\alpha)\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)dx\right| + \left|\varphi(A_2,\alpha)\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)dx\right| \leq 2M\varepsilon$, а далі з критерію Коші все й слідує.

#27

Теорема 4. *(Ознака Діріхле)*

Якщо функція $\varphi : E \to R$ - монотонна по змінній x $\forall \alpha \in I_2$, а також $\varphi \rightrightarrows 0$ на проміжку I_2, а функція $x \mapsto \int\limits_a^x f(t,\alpha)dt$ - обмежена на E, то інтеграл $\Phi(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)dx$ збігається рівномірно на I_2.

Доведення. З рівномірної збіжності $\varphi \rightrightarrows 0$ можемо записати умову: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_0 \geq a$: $\forall A_1 > A_0$ $\forall \alpha \in I_2$ $|\varphi(A_1,\alpha)| < \varepsilon$, позначимо $M = \sup\limits_{(x,\alpha)\in E} \left| \int\limits_a^x f(t,\alpha)dt \right| > 0$ (при $M = 0$ теорема очевидна). З монотонності φ та інтегрованості f на проміжку $[A_1, A_2]$ запишемо другу теорему про середнє:

$$\left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)dx \right| = \left| \varphi(A_1,\alpha) \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)dx \right| + \left| \varphi(A_2,\alpha) \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)dx \right| \leq 2M\varepsilon$$, а далі з критерію Коші все й слідує.

#28

Теорема про неперервність інтеграла, залежного від параметра.

Теорема 2.

Якщо функція $f(x,y)$ визначена і неперервна як функція від двох змінних в прямокутнику $\Pi = \{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$, то інтеграл $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ є неперервною функцією від параметра $y \in [c,d]$.

○ За теоремою Кантора функція $f(x,y)$, неперервна на компакті, є рівномірно неперервною на цьому компакті, тобто для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, що із нерівностей $|x'' - x'| < \delta$, $|y'' - y'| < \delta$ слідує нерівність $|f(x'',y'') - f(x',y')| < \varepsilon$. Покладемо $x'' = x' = x$, $y'' = y, \quad y' = y_0$. Тоді при $|y - y_0| < \delta$ для будь-якого x маємо $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon$, а це означає, що при $y \to y_0$ $f(x,y) \to f(x,y_0)$ (прямує) рівномірно відносно x. Відповідно за теоремою 1 отримуємо $\lim\limits_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx$, тобто $\lim\limits_{y \to y_0} I(y) = I(y_0)$, а це означає, що функція $I(y)$ є неперервною на відрізку $[c,d]$, оскільки y_0 – довільна точка цього проміжку. ●

Оскільки функція $I(y)$ є неперервною на проміжку $[c,d]$, то ця функція є інтегрованою на $[c,d]$.

Теорема 2.

Якщо функція $f(x,y)$ є неперервною в прямокутнику $\Pi = \{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$, то $\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$.

○ Кожен з повторних інтегралів у цій формулі дорівнює подвійному інтегралу від функції $f(x,y)$ на прямокутнику П.●

#29

Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на Π_∞, а интеграл

$$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx,$$

сходится равномерно на отрезке $[c;\ d]$, то функция $I(y)$, определяемая этим интегралом, интегрируема на $[c;\ d]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \qquad (3.20)$$

Доказательство. Снова рассмотрим последовательность $I_n(y)$. По лемме 3.1 она сходится равномерно на отрезке $[c;\ d]$ к функции $I(y)$, а по теореме 3.8 функции последовательности интегрируемы на отрезке $[c;\ d]$. Тогда по теореме об интегрируемости предельной функции равномерно сходящейся последовательности функция $I(y)$ интегрируема на отрезке $[c;\ d]$ и

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_c^d I_n(y)dy = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^{a+n} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Лемма 3.1 *Если интеграл (3.13) сходится равномерно на множестве Y, то последовательность функций*

$$I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx \ \ (n \in \mathbb{N}) \qquad (3.19)$$

тоже равномерно сходится на множестве Y к функции $I(y)$.

Теорема 3.8 *Пусть функция f непрерывна на прямоугольнике Π. Тогда функция $I(y)$ интегрируема на отрезке $[c;\ d]$ и справедливо равенство*

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \qquad (3.2)$$

#31

Інтеграли Ейлера: *Г(а), В(а,в)* – області збіжності та рівномірної збіжності.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{x} dx, \qquad \textbf{(2)}$$

В околі нуля $e^{-x}x^{s-1} = O(x^{s-1})$, тому **збігається**, коли $\underline{s>0}$,а $I_2(s)$ збігається $\forall s>0 \Rightarrow \Gamma(s)$ існує при $s>0$.

Якщо розглянути $s: 0<s_1 \le s \le s_2 < +\infty$, то $e^{-x}x^{s-1} \le e^{-x}(x^{s_0-1} + x^{s_1-1})$, а інтеграл від функції в правій частині останньої рівності існує, то $\Gamma(s)$ **рівномірно збігається** на розглянутому проміжку, тобто $\Gamma(s)$ є неперервною на будь-якому додатному сегменті $[s_1, s_2]$, в наслідок довільності s_1 та s_2 будемо мати, що $\Gamma(s)$ неперервна $\forall s>0$.

(1)

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

Коли $x \sim 0$ $x^{p-1}(1-x)^{q-1} = O(x^{p-1})$ – **збіжний** при $p>0$ і коли $x \sim 1$

$x^{p-1}(1-x)^{q-1} = O((1-x)^{q-1})$ – збіжний при $q>0$. З цього слідує, що $B(p,q)$ існує у відкритому квадранті p,q. Взявши довільні $p_0>0$, $q_0>0$ і розглянувши область $p \ge p_0$, $q \ge q_0$ одержимо, що $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$, тобто інтеграл (1) **збігається рівномірно**, з чого слідує неперервність B $\forall p,q>0$.

#32

Інтеграли Ейлера: *Г(a)* – **формула пониження.**

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{x}\, dx$$

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^{s} e^{-x}\, dx = -x^{s} e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx = s\,\Gamma(s) \qquad \textbf{(4)}$$

#33

Інтеграли Ейлера: *B(a,в)* – симетрія, формула пониження.

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

1.(Симетрія) $B(p,q)=B(q,p)$ - доведення через заміну (y = 1-x) **(8)**

2.(Формула пониження) $\forall p>0, q>1\ B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$ **(9)**

Доведення.

$$B(p,q)=\int_0^1 (1-x)^{q-1}d\frac{x^p}{p}=\frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Big|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx=$$

$$\frac{q-1}{p}\int_0^1 \left(x^{p-1}(1-x)^{q-2}-x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right)dx=$$

$$\frac{q-1}{p}B(p,q-1)-\frac{q-1}{p}B(p,q)\Rightarrow$$ **(9)**

Аналогічно $\forall p>1, q>0$ має місце.

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$$ **(10)**

#34. Різні формули запису для B(a,b).

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$ - бета функція Ейлера

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)};$$

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\left|\begin{array}{l}1-x=\frac{1}{1+x};\\ x=1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t};\\ dx=\frac{dt}{(1+t)^2};\end{array}\right|=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a-1}}\frac{1}{(1+t)^{b-1}}\frac{dt}{(1+t)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}dt}{(1+t)^{a+b}};$$

$$B(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx=\left|\begin{array}{l}x=\frac{1}{t};1+x=1+\frac{1}{t}=\frac{1+t}{t}\\ dx=-\frac{dt}{t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx+\int_1^0\frac{t^{a+b}}{t^{a-1}(1+t)^{a+b}}\frac{dt}{t^2}=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx+\int_0^1\frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}dt=\int_0^1\frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}dx$$

#35. Зв'язок між *B(a,в)* та *Г(a)*.

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)};$$

Доведення:

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}dx$$

$$\Gamma(a+b)=\int_0^{\infty}x^{a+b-1}e^{-x}dx\quad\left|\begin{array}{l}x=(q+1)t\\ q-параметр\\ dx=(q+1)dt\end{array}\right|$$

$$\Gamma(a+b)=(q+1)\int_0^{+\infty}(q+1)^{a+b-1}t^{a+b-1}e^{(q+1)t}dt$$

$$\frac{1}{(q+1)^{a+b}}\Gamma(a+b)=\int_0^{+\infty}t^{a+b-1}e^{-(q+1)t}dt*q^{a-1}$$

$$\frac{q^{a-1}}{(1+q)^{a+b}}\Gamma(a+b)=\int_0^{+\infty}q^{a-1}t^{a+b-1}e^{-(q+1)t}dt$$

$$\Gamma(a+b)\int_0^{+\infty}\frac{q^{a-1}dq}{(1+q)^{a+b}}=\int_0^{+\infty}dq\int_0^{+\infty}q^{a-1}t^{a+b-1}e^{(q+1)t}dt=\int_0^{+\infty}t^{b-1}e^{-t}dt\int_0^{+\infty}q^{a-1}t^{a}e^{-qt}dq=$$

$$=\int_0^{+\infty}t^{b-1}e^{-t}dt\int_0^{+\infty}(qt)^{a-1}e^{-qt}d(tq)=\int_0^{+\infty}t^{b-1}e^{-t}dt\int_0^{+\infty}y^{a-1}e^{-y}dy=\Gamma(a)\Gamma(b)$$

$$\Gamma(a+b)B(a+b)=\Gamma(a)\Gamma(b)\to B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

#36. Інтеграли Ейлера: формула доповнення.

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

#37_1

Поняття: Якщо для функції $f: R \to R$ функції a_λ, b_λ обчислюються за формулами

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos \lambda t dt,\ b_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin \lambda t dt, \qquad \textbf{(1)}$$

то тригонометричний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x) d\lambda$$

називається ***інтегралом Фур'є*** (або ***повторним інтегралом Фур'є***) ***функції*** f.

Означення: Нехай функція $f(x)$ визначена на всій числовій прямій та задовольняє таким умовам:

Функція $f(x)$ є обмеженою та абсолютно інтегрованою на $(-\infty;\infty)$, тобто існує невластний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = Q < +\infty$$

2. У будь-якому скінченому проміжку $[-l, l]$ функція $f(x)$ розкладається у ряд Фур' є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.1)$$

де коефіцієнти Фур'є визначаються формулами

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx; \quad n = 0,1,2,\ldots \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx; \quad n = 1,2,3,.. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Підставивши замість коефіцієнтів a_n і b_n їх вирази, перепишемо ряд у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{nt\pi}{l}dt\right)\cos\frac{n\pi x}{l} + \left(\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{nt\pi}{l}dt\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Або $f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)dt$ (2.3)

Достатні ознаки розкладності функції в ряд Фур'є

Крапка   розриву функції   називають крапкою розриву першого роду, якщо існують кінцеві межі праворуч і ліворуч цієї функції в даній крапці.

ТЕОРЕМА 1 (Дирихле).   Якщо   періодична з періодом   функція безперервна або має кінцеве число крапок розриву 1-ого роду на відрізку [ ] і цей відрізок можна розбити на кінцеве число частин, у кожному з яких f(x) монотонна, то ряд Фур'є щодо функції сходиться до f(x) у крапках безперервності й до среднеарифметическому однобічних меж у крапках розриву роду (Функція задовольняючим цим умовам називається монотонною-монотонній-кусочно-монотонної).

ТЕОРЕМА 2.   Якщо f(x) періодична функція з періодом   , що на відрізку [ ] разом зі своєї похідної безперервна або має кінцеве число крапок розриву першого роду, то ряд Фур'є функції f(x) у крапках розриву до середнього арифметичного однобічних меж (Функція задовольняючій цій теоремі називається гладкою-гладкій-гладкої-кусочно-гладкої).

#38

Збіжний інтеграл з рядом Фур' є: $f(x)=\int_{0}^{+\infty}(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)d\omega$ (2.7)

Перетворимо за допомогою формули Ейлера підінтегральну функцію у формулі (2.7) до наступного вигляду

$$A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x=A(\omega)\frac{e^{j\omega x}+e^{-j\omega x}}{2}+B(\omega)\frac{e^{j\omega x}-e^{-j\omega x}}{2}=$$

$$=\frac{A(\omega)-jB(\omega)}{2}e^{j\omega x}+\frac{A(\omega)+jB(\omega)}{2}e^{-j\omega x}=c(\omega)e^{j\omega x}+c(-\omega)e^{-j\omega x} \quad (2.11)$$

де позначено

$$c(\omega)=\frac{A(\omega)-jB(\omega)}{2};\quad c(-\omega)=\frac{A(\omega)+jB(\omega)}{2}$$

Тоді

$$\int_{0}^{\omega}(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)d\omega=\int_{0}^{\omega}(c(\omega)e^{j\omega x}+c(-\omega)e^{-j\omega x})d\omega=$$

$$=\int_{0}^{\omega}c(\omega)e^{j\omega x}d\omega+\int_{-\omega}^{0}c(\omega)e^{j\omega x}d\omega=\int_{-\omega}^{\omega}c(\omega)e^{j\omega x}d\omega \quad (2.12)$$

Для $c(\omega)$ дістаємо вираз

$$c(\omega)=\frac{A(\omega)-jB(\omega)}{2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt-j\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos\omega t-j\sin\omega t)dt \quad (2.13)$$

Звідси

$$c(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\quad(\omega\geq 0) \quad (2.14)$$

Безпосередньо бачимо, що ці формули не втрачають сенс і при $\omega<0$, бо $c(-\omega)=\overline{c(\omega)}$. Тому із формули (2.7) випливає

$$f(x)=\lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{\omega}(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)d\omega=\lim_{\omega\to+\infty}\int_{-\omega}^{\omega}c(\omega)e^{j\omega x}d\omega \quad (2.15)$$

Отже, в точках неперервності функції

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty\omega}c(\omega)e^{j\omega x}d\omega \quad (2.16)$$ де

$$c_k(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega_k t}dt. \quad (2.17)$$

Вираз для $f(x)$ у формі (2.15) називають комплексною формою інтеграла Фур'є для функції $f(x)$.

Зауваження. Множник $\frac{1}{2\pi}$ можна записати у будь - яку з формул (2.16) чи (2.17): у вираз для $c(\omega)$, як у формулі (2.17), або у формулі (2.16), як це у подальшому буде зроблено для формул перетворення Фур' є відповідно до стандартів електротехніки.

#39

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega\,(t-x)dt \qquad (2.6)$$

Рівність (2.6) називається інтегральною формулою Фур'є, а інтеграл у її правій частині - інтегралом Фур'є. Зображення функції $f(x)$ у вигляді інтеграла Фур'є звичайно називають розкладанням цієї функції в інтеграл Фур'є.

Зауваження 1. Формула (2.6) має сенс тільки для точок неперервності функції $f(x)$, а у кожній точці x_0 розриву першого роду, як і для рядів Фур' є, інтеграл Фур'є збігається до числа

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Зауваження 2.

Якщо функція $f(x)$ - парна, то $B(\omega)=0$ $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt$ та інтеграл Фур'є для такої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\omega x d\omega\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt \quad (2.9)$$

У випадку непарної функції $f(x)$

$$A(\omega)=0 \;\; f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt$$

інтеграл Фур'є набуває вигляду

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\omega x d\omega\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt \quad (2.10)$$

#40

№40 Перетворення Фур'є.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda(t-x)}\, dt$$

$$\int_{-\eta}^{\eta} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt$$

$$\cancel{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \ldots d\lambda\, dt}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\lambda i t} dt \right)$$

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t} dt \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda \quad (2)$$

. . .

1) $\exists$ образ Фур'є визначений ф-лою 1

2) Справедлива ф-ла (2) яку слід розуміти як:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} \bar{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x} d\lambda;$$

#41

№41 sin та cos перетворення Фур'є.

Для функцій які задані на піввісі, як правило застосовують sin або cos. Якщо функція f визначена тільки на піввісі, то її можна продовжити на всю вісь в парний або непарний спосіб.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda x\,d\lambda\int_0^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\cos\lambda x\,d\lambda\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt\right)$$

Доведення:

Нехай $f_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt$ (1)

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f_c(\lambda)\cos\lambda x\,dx$ (2)

Функція f_c - функції cos від f.

Cos перетворення $f \to f_c$

Відтворення f по її cos образу (2) обернений cos перетворення по f.

$$f_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt$$

$$f(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\, f_s(\lambda)\,d\lambda$$

$f_s(\lambda)$ - синус образ від ф-ції f.

#42

N 42 Межові, внутрішні, граничні точки, область і т.д.
Теорема про віддільність 2-ох замкнених множин.

Означення: Точка A назив. межовою точкою множини D, якщо в $\forall$ околі цієї точки містяться точки які належать множині D так і точки, які $\notin D$.
Межа - сукупність межових точок.

Відстань між двома множинами

Множина $A \in R^2$ і мн. $B \in R^2$

$\rho(A:B) = \inf \rho(a;b)$: $\begin{matrix} a \in A \\ b \in B \end{matrix}$

Якщо A і B, такі, що в них є одна спільна точка то $\rho(A і B) = 0$. Обернене твердження не вірне.

Теорема (про віддільність замкнених множин)
Якщо A і B дві обмежені замкнені множини без спільних точок, то відстань між ними >0.

$\boxed{\rho(A, B) > 0}$

#43

(43)

Площа плоскої фігури (міра Жордана). Теореми 1 та 1' про умови квадровності в різних термінах.

Відповідь: площа плоскої фігури – багатокутною фігурою називається множина на площині, складена із скінченної кількості багатокутників.

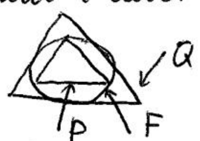
Площа багатокутної фігури – це невід'ємне число, яке має такі аксіоми.

1) Монотонність – якщо A і B – це дві многокутні фігури, причому $A \subset B$ то $S(A) \le S(B)$

2) Адитивність – якщо A і B дві багатокутні фігури, які не мають спільних внутрішніх точок, то $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$

3) Якщо A і B дві рівні багатокутні фігури, то $S(A) = S(B)$.

Нехай F деяка довільна плоска фігура, яка обмежена множиною Q на площині і містить в собі плоску фігуру P.



$P \subset F \qquad F \subset Q$

$S(p)$ числова множина, обмежена зверху

$S(Q)$ – обмежена знизу

$S_* = \sup_P S(p) \quad S^* = \inf_Q S(Q)$ S_* – називається внутрішньою площиною F, S^* – називається зовнішньою площиною F $S_* \le S^*$

Спільна частина квадровних фігур є квадровною. A B $F = A \cap B$, то межа фігури F складається з частини межі A і B, тому дане твердження випливає з того, що об'єднане множин площі $0 = 0$. Введене поняття площі називається площею за Жорданом.

Теорема квадровності. Фігура F є квадровною тоді і лише тоді, коли $\forall \varepsilon > 0 \; \exists p, Q$: $P \subset F$, $F \subset Q$, такі що $S(Q) - S(p) < \varepsilon$. Доведення достатності:

Нехай для F $\exists$ p і Q, як сказано в умовах теореми, тоді: $S(p) \le S_* \le S^* \le S(Q)$

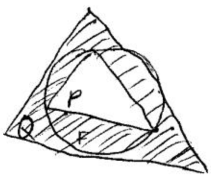
$0 \le \underbrace{S^* - S_*}_{\text{фіксовані величини}} \le S(Q) - S(p) < \varepsilon \Rightarrow$ тоді $S^* - S_* = 0$ звідси $S^* = S_*$

Доведення необхідності: $S_* = S^*$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; p \in \{P\}: S_* - \frac{\varepsilon}{2} < S(p) \le S_*$

$\exists \; Q \in \{Q\}: \; S^* \le S(Q) < S^* + \frac{\varepsilon}{2}$

$-S_* \le -S(p) < -S_* + \frac{\varepsilon}{2}$ +



$0 \le S(Q) - S(p) < \varepsilon$

Зауваження: для довільної плоскої фігури F $\{Q\}: F \subset Q$ $\{P\}: P \subset F$ якщо розглядати множину точок M: $M \subset (Q \setminus P)$, то дана множина є множиною яка містить множину фігури F.

Теорема 2: Умови попередньої теореми, означають, що $F \in$ квадровна тоді, коли її межа може бути розміщена в багатокутній фігурі, як завгодно малої площі.

Довільна множина на площині, зокрема крива називаються множиною $S = 0$. якщо її можна розмістити в багатокутній фігурі, як завгодно малої площі.

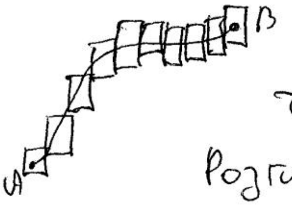
Розглянемо так: Для того, щоб F була квадровною необхідно і достатньо, щоб її межа була множиною площі 0. Спрямною кривою називається крива, яка має скінченну множину. Якщо крива задана параметрично.

$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \qquad \alpha \le t \le \beta \quad \varphi, \psi, \varphi', \psi' \in C_{[\alpha, \beta]}$

(44) Ш44

Лема про рівність 0 площі спрямної кривої. Властивості площі.

Відповідь: $\forall$ спрямна крива має площу=0.



$\ell(AB)=L$ Розіб'ємо цю криву за допомогою $n+1$ точки на частинки. Так щоб довжина кожної ділянки була менше ніж $\forall i: \ell(M_{i-1}, M_i) < \frac{L}{n-1}$

Розглянемо кожну з цих точок, як центр квадрата зі стороною $\frac{2L}{n-1}$. Вся наша крива знаходиться в багатокутній фігурі Q. $AB \subset Q$ $S(Q) \le \sum = \frac{4L^2}{(n-1)^2}\cdot(n+1)$

Так як $L=\text{const}$, n-довільна, тому якщо $n\to\infty$ то $0 < S(Q) \le 0$ це означає що $S(Q)=0$.

$\forall$ крива визначена рівнянням $y=f(x)$, де $f \in C_{[a,b]}$ мають площу $=0$.

$\forall$ фігура, межа якої складається з однієї, або більшої кількості спрямних кривих є квадровною.

Властивості площі:

1) Монотонність – якщо A і B – це дві багатокутні фігури, причому $A \subset B$, то $S(A) \le S(B)$.

2) Адитивність – якщо A і B дві багатокутні фігури, які не мають спільних внутрішніх точок, то $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$

3) Якщо A і B дві рівні багатокутні фігури, то $S(A)=S(B)$.

#45

(45) №45

Означення та необхідна умова існування подвійного інтегралу.

Означення довільного інтервала. Нехай D - це деяка квадровна фігура і $f(x,y)$ функція, яка визначена на $\forall (x,y) \in D$

Розіб'ємо D на $\forall$ кількість фігур

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

$\forall (x_i, y_i) \in D_i \quad \forall i = 1, \dots n$

Через $S(D_i)$ назвемо площу D_i.

$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot S(D_i)$ така сума називається інтегральною для фігури D і $f(x,y)$.

Позначимо через D $\max_i d(D_i) = d = \sup_{\substack{M \in D_i \\ W \in D_i}} (M, W)$ - діаметр фігури

$\Delta = \max_i d_i$

I називається границею інтегральних сум σ при $\Delta \to 0$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0$ таке: $|\Delta| < \delta$

$|\sigma - I| < \varepsilon$, незалежно від розбиття d на частинки.

Якщо I при $\Delta \to 0$ $\exists$ і є скінченною

$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S(D_i) = I < \infty$, то вона називається подвійним інтегралом.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

#46

46. Властивості подвійних інтегралів

① $\iint\limits_D 0\,dxdy = 0.$

② $\forall (x,y) \quad f(x,y) \le g(x,y)$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

③ $$\left| \iint\limits_D f(x,y)dxdy \right| \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

④ Адетивність

$D = D_1 \cup D_2$ і f - неперервна в D_1 та D_2, то тоді f - інтегровна у всій D.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

⑤ Властивість лінійності

$f(x,y),\ g(x,y) \subset D \Rightarrow \alpha f + \beta g \subset D \quad (\alpha, \beta = const)$

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

#47.Суми Дарбу та їх властивості (для подвійного інтегралу). Критерій існування подвійного інтегралу.

Суми $\overline{S_P}(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i V(I_i)$, $\underline{S_P}(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i V(I_i)$ називаються відповідно ***верхньою*** та ***нижньою інтегральними сумами Дарбу*** для функції f , що відповідають сітковому розбиттю P бруса $\overline{I}$

Нехай P - деяке сіткове розбиття бруса $\overline{I}$ на комірки I_i, $i=\overline{1,n}$. Розбиття P^* цього бруса, що утворюється з сіткового розбиття P шляхом подальшого сіткового розбиття деяких комірок I_i розбиття P на комірки I_{ij} називається ***продовженням розбиття P***.

Лема 1. *(Інтегральні суми на продовженому розбитті)*

Нехай $f:\overline{I}\to R$ - обмежена функція, що визначена на брусі $\overline{I}$, P^* - продовження сіткового розбиття P бруса $\overline{I}$, тоді виконуються нерівності:

$$\overline{S_{P^*}}(f)\le \overline{S_P}(f),\ \underline{S_{P^*}}(f)\ge \underline{S_P}(f) \qquad \textbf{(1)}$$

Обмежена функція $f:\overline{I}\to R$ називається інтегрованою у розумінні Дарбу на брусі $\overline{I}$, якщо виконується рівність: $\underline{\int} f dx=\overline{\int} f dx$. Це спільне значення верхнього та нижнього інтегралів Дарбу для функції f називається m - кратним (m - вимірним) інтегралом Дарбу

Теорема 1. *(Критерій інтегрованості у розумінні Дарбу)*

Функція f інтегрована на брусі $\overline{I}$ тоді і тільки тоді, коли $\forall\varepsilon>0$ існує сіткове розбиття бруса $\overline{I}$ таке, що $0\le \overline{S_P}(f)-\underline{S_P}(f)<\varepsilon$.

Теорема 2. (зв'язок інтегрованості за Дарбу та Ріманом)

Обмежена функція f інтегрована за Ріманом на брусі $\overline{I}$ тоді і тільки тоді, коли вона інтегрована у розумінні Дарбу.

Терема 4. (Лебега – критерій інтегрованості за Ріманом)

Нехай функція $f:\overline{I}\to R$ - обмежена, позначимо множину її точок розриву через $E\subset R^m$, тоді $f\in R(\overline{I})$ $\Leftrightarrow$ множина E має лебегову міру нуль.

#48

590. Классы интегрируемых функций. С помощью установленного выше признака интегрируемости легко доказать:

I. *Всякая непрерывная в области* (P) *функция* $f(x, y)$ *интегрируема.*

Действительно, если функция f непрерывна в (замкнутой) области (P), то по свойству равномерной непрерывности каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что в любой части области (P) с диаметром, меньшим чем δ, колебание функции будет меньше чем ε. Пусть теперь область (P) разложена на части (P_i), диаметры которых все меньше δ. Тогда все колебания $\omega_i < \varepsilon$, и

$$\sum_i \omega_i P_i < \varepsilon \sum_i P_i = \varepsilon P,$$

откуда и следует выполнение условия (6). Этим интегрируемость функции доказана.

Пусть δ будет наименьшее из двух чисел δ_1, δ_2. Разложим область (P) на части (P_1), (P_2), ..., (P_n), диаметры которых меньше δ, и рассмотрим соответствующую сумму

$$\sum_i \omega_i P_i.$$

Разобьем ее на две суммы:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''},$$

предполагая, что значок i' отвечает таким областям $(P_{i'})$, которые целиком лежат в н е выделенной области (Q), а значок i'' — всем прочим. Оценим каждую из этих сумм в отдельности.

Так как все $(P_{i'})$ лежат в области, полученной из (P) выделением (Q), и диаметры их $< \delta \leqslant \delta_1$, то все $\omega_{i'} < \varepsilon$, так что

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} P_{i'} < \varepsilon P.$$

С другой стороны, если через Ω обозначить колебание функции $f(x, y)$ во всей области (P), то будем иметь (так как $\omega_i \leqslant \Omega$)

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} \leqslant \Omega \sum_{i''} P_{i''}.$$

Здесь $\sum P_{i''}$ есть сумма площадей тех из областей (P_i), которые 1) либо целиком лежат в выключенной области (Q), 2) либо задевают границу (L) этой области. Общая площадь первых меньше ε, ибо $Q < \varepsilon$; то же можно сказать и об общей площади вторых, поскольку область разложена на части с диаметрами, меньшими чем $\delta \leqslant \delta_2$. Итак, $\sum P_{i''} < 2\varepsilon$, так что

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} < 2\Omega\varepsilon.$$

Окончательно, при $\lambda < \delta$, оказывается:

$$\sum_i \omega_i P_i < (P + 2\Omega)\,\varepsilon.$$

Так как правая часть этого неравенства произвольно мала вместе с ε, то выполняется условие (6) и т. д.

#49. **Адитивна функція області. Похідна по площі.**

Функція, аргументом для якої є не окрема точка, а множина називається **функцією області**.

Функція області F(D) називається адитивною, якщо(1) F(D) визначена для D1,D2 та для D1 U D2. (2) Якщо D1 та D2 не мають внутрішніх спільних точок, то F(D1;D2)=f(D1)+F(D2)

Ф(D)= через властивість 5 можна стверджувати – адитивна ф-ція області.

Властивість 5. D = D1 U D2 і **f** інтегровна в **D1** та **D2** , то f інтегровна і в усій області D та : = +

Похідна по площі.

Нехай **F(D) –**довільна адитивна функція області визначена для деяких квадровних множин**.**

S(D) – площа кожної розгляненої множини. Число **M** наз-ся — **,** якщо для

—

— *=A =* — *;* якщо то вона називається **похідною ф-ції F по площі.**

Доведення:

Розглянемо **Ф(D) =**

$\mathbf{M_0(x_0;y_0)}$ **D** $\mathbf{m = inf_D\ f(x;y)}$

$\mathbf{M = sup_D\ f(x;y)}$ **;**

— $\rightarrow$ —

$\mathbf{R \rightarrow 0\ \ D \rightarrow M}$

Якщо f(x;y) – неперервна $\mathbf{m \rightarrow f(M_0) = f(x_0;y_0)\ ;\ M \rightarrow f(x_0;y_0)}$

— $=f(x_0;y_0)$

#50. Застосування подвійних інтегралів

Розглянемо на площині деяку область $D \subset R^2$, яка має площу. Нехай в ній розподілена неперервно маса з густиною $\rho(x, y)$, тоді число

$$m = \iint_D \rho(x, y)\,dxdy \qquad \textbf{(2)}$$

називається ***масою пластинки***. Аналогічно в просторі R^3 (і в будь-якому R^m) ***масою тіла*** $T \subset R^3$ $(T \subset R^m)$ називається величина:

$$m = \iiint_T \rho(x, y, z)\,dxdydz \qquad \textbf{(3)}$$

Якщо це густини розповсюдження заряду, то з цих формул одержимо ***заряд тіла***, але він може приймати і від'ємні значення.

Статичні моменти відносно координатних осей матеріальної пластинки D визначаються за формулами:

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y)\,dxdy,\ M_y = \iint_D x\rho(x, y)\,dxdy \qquad \textbf{(4)}$$

Моменти інерції відносно координатних осей матеріальної пластинки D визначаються за формулами:

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x, y)\,dxdy,\ I_y = \iint_D x^2\rho(x, y)\,dxdy \qquad \textbf{(5)}$$

Координати ***центра ваги*** пластинки D (x_c, y_c) знаходяться з співвідношення:

$$my_c = M_x,\ mx_c = M_y \qquad \textbf{(6)}$$

Аналогічно визначаються статичні моменти для просторового тіла $T \subset R^3$.

Статичні моменти відносно координатних площин знаходяться за формулами:

$$M_{xy} = \iiint_T z\rho(x, y, z)\,dxdydz,... \qquad \textbf{(7)}$$

Моменти інерції:

$$I_{xy} = \iint_D z^2\rho(x, y, z)\,dxdydz,... \qquad \textbf{(8)}$$

#51

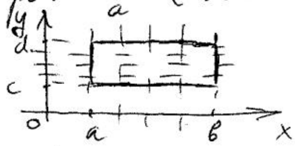
(51) Обчислення подвійного інтегралу у випадку прямокутної області.

$f(x,y)$ визначена на $P = \left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, \begin{matrix} a\le x\le b \\ c\le y\le d\end{matrix}\right\}$

$\iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy$ При кожному $x\in[a,b]$ $\Phi(y)=\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$

$\exists$ повторний інтеграл $\int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy$

Доведення:



$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$

$P_{ij} = \left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, \begin{matrix} x_{i-1}<x<x_i \\ y_{i-1}<y<y_i\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} i=1,\ldots n \\ j=1,\ldots l\end{matrix}$ $P=\bigcup\limits_{i,j=1}^{n,l} P_{ij}$

$m_{ij}=\inf\limits_{P_{ij}} f(x,y)$ $M_{ij}=\sup\limits_{P_{ij}} f(x,y)$ $\forall t_i\in[x_{i-1},x_i]$

$m_{ij}\le f(t_i,y)\le M_{ij}$ $\forall y\in[y_{j-1};y_j]$ $\Delta y = y_j - y_{j-1}$

$(m_{ij}\cdot\Delta y_j \le f(t_i,y)\cdot\Delta y_j \le M_{ij}\cdot\Delta y_j)$

$\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij}\,dy \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(t_i,y)\,dy \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} M_i\,dy$

$m_{ij}\cdot\Delta y_j \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} y(t_i,y)\,dy \le M_i\Delta y_j$

$\sum\limits_{j=1}^{l} m_{ij}\Delta y_j \le \sum\limits_{y=1}^{b}\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} y(t_i,y)\,dy \le \sum\limits_{j=1}^{l} M_i\Delta y$

$\sum\limits_{j=1}^{l} m_{ij}\Delta y_j \le \int\limits_c^d f(t_i,y)\,dy \le \sum\limits_{j=1}^{l} M_i\Delta y_j$

$\sum\limits_{j=1}^{l} m_{ij}\Delta y_j \le I(t_i) \le \sum\limits_{j=1}^{l} M_{ij}\Delta y \quad /\cdot\Delta x_i$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{l} m_{ij}\cdot\Delta y_j\cdot\Delta x_i \le \sum\limits_{i=1}^{n} I(t_i)\Delta x_i \le \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{l} M_i\cdot\Delta y_j\cdot\Delta x_i$

$\omega \le \sum\limits_{i=1}^{n} I(t_i)\Delta x_i \le \Omega$ $\quad \begin{matrix}\Delta x_i\to 0 & \omega\to\iint f(x,y)\,dx\,dy \\ \Delta y_i\to 0 & \Omega\to\iint f(x,y)\,dx\,dy\end{matrix}$

Звідси $\sum\limits_{i=1}^{n} I(t_i)\Delta x_i \to \iint f(x,y)\,dx\,dy$

$\to \exists \int\limits_a^b I(x)\,dx = \iint f(x,y)\,dx\,dy$

#53. ***Обчислення подвійного інтегралу у випадку криволінійної області*** **.**

Формула Гріна

Функція $\psi : [a,b] \to R$ називається ***<u>кусково-гладкою</u>***, якщо існує таке розбиття $P = \{x_k \mid x = \overline{0,n}\}$ сегмента $[a,b]$, що $\forall k = \overline{1,n}$ звуження $\psi\big|_{[x_{k-1},x_k]}$ є неперервно диференційованими функціями.

Множина $T_1 = \{(x,y) \in R^2 \mid a < x < b, \psi_1(x) < y < \psi_2(x)\}$ називається ***<u>криволінійною трапецією першого роду</u>***, якщо ψ_1 та ψ_2 - кусково-гладкі функції, що визначені на сегменті $[a,b]$.

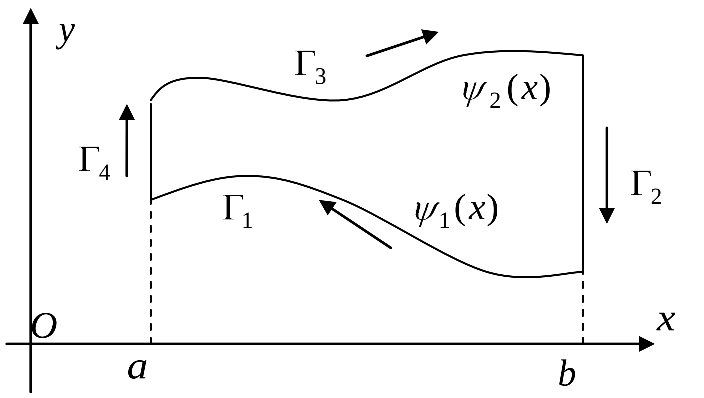
Нехай $\Gamma_j\ (j = \overline{1,4})$ гладкі орієнтовані криві з параметричними зображеннями $\varphi_j,\ (j = \overline{1,4})$, де:

$\varphi_1(t) = (t, \psi_1(t)),\ t \in [a,b]$,

$\varphi_2(t) = (b, t),\ t \in [\psi_1(b), \psi_2(b)]$,

$\varphi_3(t) = (t, \psi_2(t)),\ t \in [a,b]$,

$\varphi_4(t) = (a, t),\ t \in [\psi_1(a), \psi_2(a)]$.



<u>Теорема 1.</u>

Нехай функції $f_1 : \overline{T_1} \to R$, і $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ неперервні. Тоді $\displaystyle\iint_{T_1} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} dx dy = -\int_{\Gamma(T_1)} f_1(x,y)\, dx$

Доведення. $\displaystyle\iint_{T_1} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} dy = \int_a^b f_1(x,y)\Big|_{y=\psi_1(x)}^{y=\psi_2(x)} dx = -\int_{\Gamma(T_1)} f_1(x,y)\, dx$

Теорема доведена.

Указану межу називають орієнтованою *<u>проти руху годинникової стрілки</u>*.

Повністю аналогічно визначається *<u>трапеція другого роду</u>* T_2. При цьому додатна орієнтація T_2 буде відповідати руху годинникової стрілки. Додатною орієнтацією будемо вважати ту, яка протилежна рухові годинникової стрілки. В зв'язку з цим аналог формули **(1)** приймає вигляд:

$$\iint_{T_2} \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} dx\,dy = \int_{\Gamma(T_2)} f_2(x,y)\,dy \qquad \textbf{(2)}$$

зі змінени знак правої частини

#54

//Розглянемо подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ де D- область, обмежена простим кусково-гладким контуром L,а функція $f(x,y)$ є неперервною в обл. D x=x(ξ,η), y=y(ξ,η). Для того щоб змінити зміння перш за все потрібно розбит область D' на n частинок ($\Delta S_i'$), де D' область на площині O$\xi\eta$. потім розбивається область D на ΔS_i

Переглянемо перехід в подвійному інтегралі до полярних координат: x=$\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi,$ де праві частини є неперервно диференційованими функціями за змінними ρ і φ. Якобіан

I(ρ,φ) = $\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho$

Звідци ми отримуємо $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iiint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$, де $\rho d\rho d\varphi$-улумент площі в полярних координатах,D-область інтегрування в декартовій системі координат, D$'$-область інтеграла в полярній системі

Виходячи з декартової системи координат, можна визначити криволіну систему координат, тобто, наприклад, для тривимірного простору числа(x^1,x^2,x^3), зв'язаних із декартовими координатами (x,y,z) співвідношеннями:

$$x^1 = x^1(x,y,z), \qquad x^2 = x^2(x,y,z), \qquad x^3 = x^3(x,y,z),$$

де всі функції однозначні і неперервно диференційовані, причому якобіан:

$$\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(x,y,z)} \neq 0.$$

Прикладом криволінійної системи координат на площині є полярна система координат, в якій положення точки задається двома числами: відстанню ρміж точкою та початком координат, і кутом φ між променем, який сполучає початок координат із точкою та обраною віссю. Декартові та полярні координати точки зв'язані між собою формулами:

$$x = \rho\sin\varphi,$$
$$y = \rho\cos\varphi,$$

#54

(55)

Теорема (критерій кубовності)

Фігура є кубовною коли $\forall \varepsilon > 0 \ \exists_{Q}^{P} : \substack{G \subset Q \\ P \subset G} : V(Q) - V(P) < \varepsilon$

Зауваження, що сукупність точок, які належать Q не належать P є фігурою яка містить в собі межу мн-ни G

Теор Фігура G кубовна тоді коли, коли її межу можна розмістити в багатогранній фігурі як завгодно малого об'єму.

Означення: якщо деяку мн-ну можна розмістити в якзавгодно малому об'ємі, то її називають множиною об'єму 0.

Для того щоб просторова фігура була побудована необхідно і достатньо щоб її межа була об'єму 0.

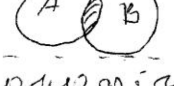
Введення поняття V задовольняє всім 3-м аксіомам об'єму багатогранної фігури.

Перетином двох кубовних фігур є фігура кубовна.

Міра Жордана

Якщо A і B дві рівні багатокутні фігури, то $S(A) = S'(B)$. Нехай F деяка довільна плоска фігура, яка обмежена многокутною Q та площиною і містить в собі плоску фігуру P.

$P \subset F$; $F \subset Q$. $S(P)$ - числова множина обмежена зверху $S(Q)$ - знизу S_* - внутрішня S^* - зовнішня площина



Спільна частина не є квадровною фігурою $F = A \cap B$

Фігура F складається з частин межі A і B тому випливає що $0 = 0$. Введене поняття називається площею за Жорданом.

#56.Визначення потрійних інтегралів та їх властивості.

Нехай $K \subset R^3$ - компакт, $f \in R(K)$, то інтеграл $\int\limits_K f(x)dx$ називається ***<u>подтрійним інтегралом</u>*** (тут в якості x виступає вже тривимірний вектор (x,y,z)) і позначається символом $\iint\limits_K f(x,y,z)dxdydz$.

Якщо компакт можна подати у вигляді:
$K = \{(x,y,z) | a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x), z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$, де y_1, y_2, z_1, z_2 - кусково-гладкі функції, то повністю аналогічно випадку двовимірного інтегралу можна його звести до повторних таким чином. Якщо $\forall x \in [a,b]$ існує подвійний інтеграл $\iint\limits_{\substack{y_1(x)\le y\le y_2(x)\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)}} f(x,y,z)dydz$,

то, застосовуючи теорему Фубіні, одержимо:

$$\iiint\limits_K f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{\substack{y_1(x)\le y\le y_2(x)\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)}} f(x,y,z)dydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \quad \textbf{(3)}$$

Об/єм просторової області (міра Жордана). Кубовні тіла, теореми, властивості кубовних тіл.

Означення: елементарним тілом називається об'єднання скінченного числа паралелепіпедів без спільних внутрішніх точо. Об'єм елементарного тіла визначається як сума об'ємів паралелепіпедів

Означення: внутрішнім об'ємом множини А називається тоочна верхня грань об'ємів елементарних тіл вписаних в площину А

Зовнішнім об'ємівмножини А називається точна нижня грань тіл включаючих в себе множину А .

Множина А називається кубованою, якщо внутрішній об'єм дорівнює зовнішньому і це спільне тіло називається об'ємом множини А.

" e > 0 $ R ,Q PÌ A Ì Q V(Q\P)<e Û " P,Q d AÌ Q\P Û V(d A) = 0 Теорема: нехай поверхня S задана рівнянням z = f(x,y) де f(x,y)Ì C(A), AÌ R2 тоді її об'єм = 0 Tграфік перетворення функції двох зміних на квадрованому компакті має об'єм 0

Доведення: розглянемо розбиття множини А площини ХОУ

" e > 0 $ e å ikD xiD yk < S(A) + e

f(x,y)Ì C(A) тому за теоремою Кантора вона рівномірнонеперервна w ik(f) < e Включимо частину поверхні, що лежить через прямокутник D xiD yk висотою 2e і розглянемо об'єднання всіх цих паралелепіпедів D ік

å ikV(D ik) = å ik2e D xiD yk < 2e e(S(A)) + e " e >0 Оскільки e більше 0 графік має об'єм 0.

Нслідок: всі множини, які обмежені графіками неперервних іункцій є кубовними, тобто мають об’єм зокрема поверхня називається кусково-гладкою, якщо її межа складається з скінченного числа графіків функцій $z = f(x,y)$Ì $C1(A)$ які перетинаються по кусково-гладких кривих. З доведення випливає, що всі області з кусковогладкою межею є кубовними.

#57.Суми Дарбу та їх властивості для потрійного інтегралу

Нехай $f:\bar{I}\to R$ обмежена на m- вимірному брусі $\bar{I}$ функція, $P=\{I_i | i=\overline{1,n}\}$ - сіткове розбиття бруса $\bar{I}$ на комірки, мірою комірки виступає її об'єм $V(I_i)$. Позначимо через $M_i=\sup_{x\in I_i} f(x)$, $m_i=\inf_{x\in I_i} f(x)$. Далі ми проведемо теорію визначення інтеграла Рімана через інтегрованість за Дарбу, аналогічно тому, як це ми зробили у випадку одновимірного інтеграла Рімана. Більшість тверджень доводяться повністю аналогічно одновимірному випадку, а тому залишаємо їх без доведення.

Суми $\overline{S_P}(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i V(I_i)$, $\underline{S_P}(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i V(I_i)$ називаються відповідно ***верхньою*** та ***нижньою інтегральними сумами Дарбу*** для функції f, що відповідають сітковому розбиттю P бруса $\bar{I}$.

Нехай P - деяке сіткове розбиття бруса $\bar{I}$ на комірки I_i, $i=\overline{1,n}$. Розбиття P^* цього бруса, що утворюється з сіткового розбиття P шляхом подальшого сіткового розбиття деяких комірок I_i розбиття P на комірки I_{ij} називається ***продовженням розбиття*** P.

Нехай P_1, P_2 - два сіткових розбиття бруса $\bar{I}$. Сукупність усіх перетинів комірок розбиття P_1 з комірками розбиття P_2 та навпаки визначає нове сіткове розбиття P бруса $\bar{I}$, яке називається ***спільним розбиттям*** для розбиттів P_1, P_2. Воно є продовженням кожного з розбиттів P_1 та P_2.

Лема 1. *(Інтегральні суми на продовженому розбитті)*

Нехай $f:\bar{I}\to R$ - обмежена функція, що визначена на брусі $\bar{I}$, P^* - продовження сіткового розбиття P бруса $\bar{I}$, тоді виконуються нерівності:

$$\overline{S_{P^*}}(f)\le \overline{S_P}(f),\ \underline{S_{P^*}}(f)\ge \underline{S_P}(f) \qquad \textbf{(1)}$$

Наслідок *(Зв'язок верхніх та нижніх інтегральних сум)*

к.

Для будь-яких двох сіткових розбиттів P_1, P_2 бруса $\bar{I}$ виконується нерівність:

, $\underline{S_{P_1}}(f) \geq \overline{S_{P_2}}(f)$ **(2)**

Нехай $f : \bar{I} \to R$ - обмежена функція, що визначена на брусі $\bar{I}$. Числа $\overline{\int} f dx = \inf\limits_P \overline{S_P}(f)$, $\underline{\int} f dx = \sup\limits_P \underline{S_P}(f)$ називаються відповідно ***<u>верхнім та нижнім інтегралом Дарбу</u>*** від функції f на брусі $\bar{I}$.

<u>Лема 2.</u> *(Зв'язок інтегралів Дарбу)*

Якщо $f : \bar{I} \to R$ - обмежена функція, що визначена на брусі $\bar{I}$, то

$\underline{\int} f dx \leq \overline{\int} f dx$ **(3)**

Обмежена функція $f : \bar{I} \to R$ називається інтегрованою у розумінні Дарбу на брусі $\bar{I}$, якщо виконується рівність: $\underline{\int} f dx = \overline{\int} f dx$. Це спільне значення верхнього та нижнього інтегралів Дарбу для функції f називається m - кратним (m - вимірним) інтегралом Дарбу

#59

(59.) Потрійний інтеграл, як адетивна функція області

Похідна по об'єму

Функція області $F(G)$ наз. адетив., якщо $\forall G_1, G_2$ визн. функ.

Якщо $F(G_1 \cup G_2) = F(G_1) + F(G_2)$, то $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \Phi(G)$

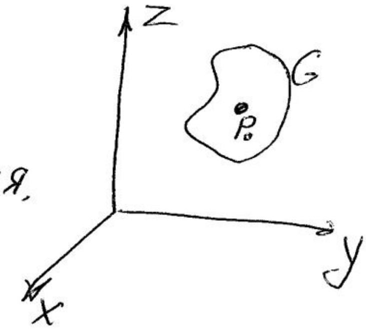
Похідна по об'єму

G_1, G_2 – деякі множини. $G = G_1 \cup G_2$, $f(x,y,z)$ – визначена.

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

$F(G)$ – деяка функ. $\quad A$ – гран. $\frac{F(G)}{V(G)}$, де $G \to P_0(x_0, y_0, z_0)$

$V(G)$ – об'єм.



$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \\ \forall G \subset B(P_0, \delta) \\ \left| \dfrac{F(G)}{V(G)} - A \right| < \varepsilon \end{array}\right| \Rightarrow \text{Якесь означення.}$$

$$\lim_{G \to P_0} \frac{F(G)}{V(G)} = A = \left.\frac{dF}{dV}\right|_{P_0}$$

$$V(G) \Big| \ m(V) \le \iiint f(x,y,z)\,dxdydz \le M(V)$$

$$\left(m \le f(x,y,z) \le M, \quad \forall (x,y,z) \in G \right) \qquad m \le \frac{\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz}{V(G)} \le M$$

$G \to P_0(x_0, y_0, z_0)$; $\quad m \to f(x_0, y_0, z_0)$

$M \to f(x_0, y_0, z_0)$

$$\boxed{\left.\frac{d\left(\iiint f(x,y,z)\,dxdydz\right)}{dV}\right|_{P_0} = f(x_0, y_0, z_0)}$$ – Похідна по об'єму.

#60. **Деякі застосування потрійного інтеграл**

1. Обчислення об'ємів. Якщо деяке тіло є обмеженою і замкненою областю G, що має об'єм V, то згідно **з** формулою

$$V = \iiint\limits_G dxdydz$$

Застосування у механіці. Нехай G – обмежена замкнена область простору R_3, яку займає деяке матеріальне тіло з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, де $\gamma(x, y, z)$ – неперервна функція в області G, тоді:

а)маса цього тіла

$$m = \iiint\limits_G \gamma dV$$

б)моменти інерції I_x, I_y, I_z тіла відносно координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно дорівнюють

$$I_x = \iiint\limits_G (y^2 + z^2)\gamma dV; \quad I_y = \iiint\limits_G (x^2 + z^2)\gamma dV; \quad I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)\gamma dV$$

Моменти інерції I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} тіла відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz обчислюються за формулами

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2\gamma dV; \quad I_{xz} = \iiint\limits_G y^2\gamma dV; \quad I_{yz} = \iiint\limits_G x^2\gamma dV$$

Момент інерції тіла відносно початку координат

$$I_0 = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\gamma dV;$$

в) статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тіла відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz обчислюються за формулами

$$M_{xy} = \iiint_G z\gamma dV; \quad M_{xz} = \iiint_G y\gamma dV; \quad M_{yz} = \iiint_G x\gamma dV$$

г) координати x_c, y_c, z_c центра маси тіла визначаються за формулами

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint_G x\gamma dV}{\iiint_G \gamma dV}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint_G y\gamma dV}{\iiint_G \gamma dV}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint_G z\gamma dV}{\iiint_G \gamma dV}$$

#61

61. Обчислення потрійного інтеграла (паралелепіпед)

Нехай $f(x,y,z)$ $T \in R^3$

$\exists \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$T = \left\{ (x,y) \in R^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} a < x < b \\ c < y < d \\ k < z < l \end{array} \right\}$$

$$P = \left\{ (x,y) \in R^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{array} \right\}$$

$$\forall z \in [k, l) \quad J(z) = \iint_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\int_k^l J(z)\,dz = \int_k^l dz \iint_P f(x,y,z)\,dx,dy = \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

<u>Доведення</u>

$$T_{ijr} = \left\{ (x,y,z) \in R^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{i-1} \le x \le x_i \\ y_{i-1} \le y \le y_i \\ z_{i-1} \le z \le z_i \end{array} \right\}$$

$$m_{ijz} = \inf f(x,y,z) \qquad M_{ijz} = \sup f(x,y,z)$$

$P = \cup_{ij} \cdot P_{ij}$

$$\sum_{r=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ijz}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_r \le \sum_{z=1}^{p} \iint_P f(x,y,z)\,dx\,dy \le \sum_{r=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} M_{ijz}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_r = \Omega$$

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_k^l dz \int_a^b dx \int_c^d f(x,y,z)\,dz$$

$$J(y) = \iint_{P'} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad P' = \left\{ (x,z) \in R^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a \le x \le b \\ k < z < l \end{array} \right\}$$

$$\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d dy \iint_P f(x,y,z)\,dx\,dz = \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$P'' = \left\{ (y,z) \in R^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} c \le y \le d \\ k < z \le l \end{array} \right\}$$

$$F(x) = \iint_D f(x,y,z)\,dy\,dz$$

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b dx \iint_{P''} f(x,y,z)\,dy\,dz = \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

#62

№ 62

Нехай $f(x,y)$ визначена на

$$D = \left\{ (x,y) \in R^2 \;\middle|\; \begin{matrix} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{matrix} \right\}$$

$y = y_1(x)$

$y = y_2(x) \qquad x \in [a, b]$

Нехай $\exists \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$

$$J(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \quad , \forall x \in [a,b]$$

Тоді $\int\limits_a^b J(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$

<u>Доведення</u>

$$C = \min y_1(x) \qquad d = \max y_2(x)$$

$$P = \left\{ (x,y) \in R^2 \;\middle|\; \begin{matrix} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{matrix} \right\}$$

$$f^* = \begin{cases} f(x,y) & , x,y \in D \\ 0 & , x,y \in (P \setminus D) \end{cases}$$

$$\iint\limits_{f^*} f^*(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f^*(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{P \setminus D} f^*(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

$$\int\limits_c^d f^*(x,y)\,dy = \int\limits_c^{y_1(x)} f^*(x,y)\,dy + \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy + \int\limits_{y_2(x)}^{d} f^*(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dxdy$$

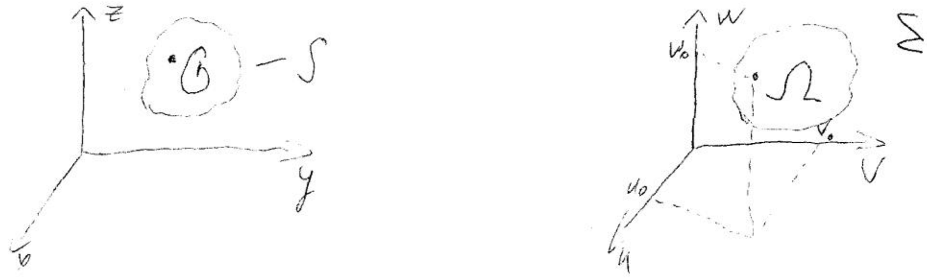
Отже f^* - задовільнає всі умови теореми, тоді

$$\iint\limits_P f^*(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f^*(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f^*(x,y)\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Заміна змінних в потрійному інтегралі

63 Відображення областей



$$(1)\quad \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \qquad \Omega \Rightarrow G$$

1) Відображення, яке задається (1) – взаємооднозначне і взаємонеперервним. $u = u(x,y,z)$; $v = v(x,y,z)$; $w = w(x,y,z)$ (1')

2) $\exists$; Є неперервними всі част. похідні I – го порядку

3) Ф-льний визначник (Якобіан) $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$ $\forall (u,v,w)$ Ω

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \frac{1}{\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}} \neq 0$$

Внутрішня – на внутрішню; межова – у межову переходить

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \\ w = w(t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x(u(t), v(t), w(t)) \\ y = y(u(t), v(t), w(t)) \\ z = z(u(t), v(t), w(t)) \end{cases}$$

$$\alpha \le t \le \beta$$

u, v, w – криволінійні координати $\forall$ коорд. точки з G

(I): $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$

(II) $\{ x = (u_0, v, w) \quad y = y(u_0, v, w) \quad z = z(u_0, v, w)$

$\{ x = (u, v_0, w) \quad y = y(u, v_0, w) \quad z = z(u, v_0, w)$

$\{ x = (u, v, w_0) \quad y = y(u, v, w_0) \quad z = z(u, v, w_0)$

Так як через кожну точку Ω проходить по одній площині (I), через кожну точку області G проходить по одній поверхні типу (II).

Про заміну змінних в $\iiint$

$f(x,y,z)$ в деякій замкненій обмеженій області G_{xyz}, $f \in C[G]$ або неперервного всюди, за можливим винятком множини об'єму 0.

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \quad (1)$$

взаємнооднозначне і взаємнонеперервне відображення $G_{xyz} \leftrightarrow \Omega_{uvw}$,

всі част. похідні $\exists$ і $\in C$ - неперервні; $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0$ $\forall (u,v,w) \in \Omega_{uvw}$, тоді:

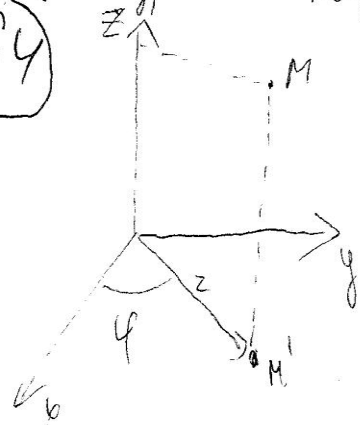
$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

Дана формула справедлива, якщо взаємнооднозн., взаємнонепер. або непер. диференц. відобр. (1) - порушується на деякій множині об'єму 0.

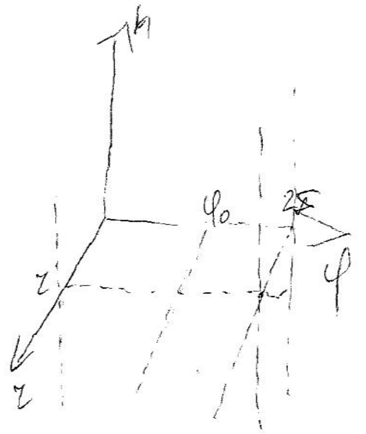
#64

Циліндричні координати

64



$$(*)\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \qquad (A)\begin{cases} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \varphi < 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$



$$r = r_0$$
$$\varphi = \varphi_0$$
$$h = h_0$$

$r = r_0$ – круговий циліндр з віссю, яка відповідає з Oz, а радіус $= r_0$

$\varphi = \varphi_0$ – вертикальні напівплощини

$h = h_0$ – $z = h_0$ горизонтальні площини

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

(*) – визначає відображення області (A) на весь простір (x, y, z), при цьому дане відображення є взаємооднозначним всюди, окрім точок, наприклад $(0, 0, z_0)$ $r = 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $z = z_0$ ∈ коорд. задовольняють такі умови.

#65

65 Сферичні координати (полярні координати в просторі)

(ρ, θ, φ)

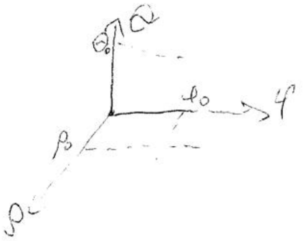
$\rho = OM$

θ – кут, просторовий радіус – вектор з "*" Oz

φ – кут між OM_1 "+" Ox

$(**)\ \{\ z = \rho\cos\theta \quad x = \rho\sin\theta\cos\varphi \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi$

$$(B)\begin{cases} 0 \le \rho \le +\infty \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$



$\rho = \rho_0$ – куля з центром $(0,0,0)$

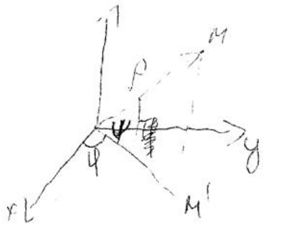
$\theta = \theta_0$ – напівконуси, радіуса з вершиною по y, z_0

$\varphi = \varphi_0$ – напівплощини

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$$

$(**)$ – визначає відображення (B) на весь простір (x,y,z), є взаємнооднозначним, за винятком таких випадків $(0,0,z_0)$ – напівсегментів $\rho = 0 \quad \theta = 0 \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$;

а точці $(0,0,0)$ – прямокутник $\rho = 0 \quad 0 \le \theta \le \pi \quad 0 \le \varphi < 2\pi$



$$\begin{cases} 0 \le \rho < +\infty \\ -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} z = r\sin\psi \\ x = \rho\cos\psi\cos\varphi \\ y = \rho\cos\psi\sin\varphi \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\psi,\varphi)} = \rho^2\cos\psi$$

1. Невласні інтеграли 1-го роду: означення, зв/язок з рядями. застосування ссновної теореми інтегрального числення.
2. Невласні інтеграли 1-го роду: основні властивості
3. Невласні інтеграли 1-го роду: збіжність у випадку додатної підінтегральної функції. 1 теорема порівняння.
4. Невласні інтеграли 1-го роду: збіжність у випадку додатної підінтегральної функції. 2 теорема порівняння.
5. Збіжність $\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx, a>0.$
6. Невласні інтеграли 1-го роду: збіжність у випадку підінтегральної функції довільного знаку. Критерій Коші. Абсолютна збіжність. Теорема.
7. Ознака Абеля збіжності невласного інтегралу 1-го роду: означення: збіжність у підінтегральної функції довільного знаку.
8. Ознака Діріхле збіжності невласного інтегралу 1-го роду: означення: збіжність у підінтегральної функції довільного знаку.
9. Невласні інтеграли 2-го роду: означення, збіжність,. застосування ссновної теореми інтегрального числення.
10. Невласні інтеграли 2-го роду: основні властивості (теореми 1, 2).
11. Невласні інтеграли 2-го роду: основні властивості (теореми 3, 4).
12. Невласні інтеграли 2-го роду: збіжність у випадку додатної підінтегральної функції. 1 теорема порівняння.
13. Невласні інтеграли 2-го роду: збіжність у випадку додатної підінтегральної функції. 2 теорема

28. Неперервність невласного інтеграла, залежного від параметра.
29. Інтегрування невласного інтеграла, залежного від параметра (всі випадки).
30. Диференціювання невласного інтеграла, залежного від параметра.
31. Інтеграли Ейлера: *Г(а), В(а,в)* – області збіжності та рівномірної збіжності.
32. Інтеграли Ейлера: *Г(а)* – формула пониження.
33. Інтеграли Ейлера: *В(а,в)* – симетрія, формула пониження.
34. Різні форми запису для *В(а,в).*
35. Зв/язок між *В(а,в)* та *Г(а)*.
36. Інтеграли Ейлера: формула доповнення.
37. Інтеграл Фур/є: поняття, означення. Теорема про представлення функції інтегралом Фур/є.
38. Комплексна форма запису інтеграла Фур/є.
39. Інтеграл Фур/є для парних та непарних функцій.
40. Перетворення Фур/є. Теорема.
41. sin- та cos-перетворення Фур/є.
42. Межові, внутрішні, граничні точки, область і т.д. Теорема про віддільність 2-ох замкнених множин.
43. Площа плоскої фігури (міра Жордана). Теореми 1 та $1'$ про умови квадровності в різних термінах.
44. Лема про рівність нулю площі спрямної кривої. Властивості площі.
45. Означення та необхідна умова існування подвійного інтегралу.
46. Властивості подвійних інтегралів.
47. Суми Дарбу та їх властивості (для подвійного інтегралу). Критерій існування подвійного інтегралу.
48. Класи інтегрованих функцій для

порівняння.

14. Збіжність $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx, \quad \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx.$
15. Невласні інтеграли 2-го роду: збіжність у випадку підінтегральної функції довільного знаку. Критерій Коші. Абсолютна збіжність. Теорема.
16. Ознака Абеля збіжності невласного інтегралу 2-го роду: означення: збіжність у підінтегральної функції довільного знаку.
17. Ознака Діріхле збіжності невласного інтегралу 2-го роду: означення: збіжність у підінтегральної функції довільного знаку.
18. Загальні властивості невласних інтегралів.
19. Інтегрування частинами та заміна змінних у невласних інтегралах.
20. Головне значення розбіжного інтегралу.
21. Власні інтеграли, залежні від параметра. Теорема про неперервність . Наслідки.
22. Диференціювання власного інтеграла, залежного від параметра (всі випадки).
23. Інтегрування власного інтеграла, залежного від параметра.
24. Невласні інтеграли, залежні від параметра: означення, рівномірна збіжність, зв′язок з ф.п. та ф.р. (теорема). Критерій Коші.
25. Ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметра.
26. Ознака Абеля рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметра.
27. Ознака Діріхле рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметра.

подвійних інтегралів.

49. Адитивна функція області. Похідна по площі.
50. Застосування подвійних інтегралів.
51. Обчислення подвійного інтегралу у випадку прямокутної області інтегрування.
52. Обчислення подвійного інтегралу у випадку прямокутної області інтегрування.
53. Обчислення подвійного інтегралу у випадку криволінійної області інтегрування.
54. Відображення областей. Криволінійні координати. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Полярні координати.
55. Об′єм просторової області (міра Жордана). Кубовні тіла, теореми, властивості кубовних тіл.
56. Визначенн потрійних інтегралів та їх властивості.
57. Суми Дарбу та їх властивості для потрійного інтегралу.
58. Умови існування потрійного інтегралу.
59. Потрійний інтеграл як адитивна функція області. Похідна по об′єму.
60. Застосування потрійних інтегралів.
61. Обчислення потрійного інтегралу у випадку, коли область інтегрування - паралелипіпед.
62. Обчислення подвійного інтегралу у випадку довільної області інтегрування.
63. Відображення областейу просторі . Криволінійні координати. Заміна змінних у потрійному інтегралі.
64. Циліндричні координати.
65. Сферичні координати.