

Національний Університет ім. Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика

Семестр Перший

Навчальний предмет теоретична механіка

### ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 1

1. Законы Ньютона и законы сохранения для системы материальных точек. При каком виде потенциальной энергии взаимодействия материальных точек выполнены все три закона Ньютона? Если потенциал парного взаимодействия для каждой пары частиц с координатами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  имеет вид

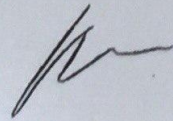
$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A(x_1 - x_2)^2 + B(y_1 - y_2)^2 + C(z_1 - z_2)^2,$$

то при каких соотношениях коэффициентов  $A, B, C$  справедливы все законы Ньютона? Какой закон Ньютона не выполняется при произвольных  $A, B, C$ ? Какой закон сохранения при этом нарушается?

2. Скобки Пуассона – определение и простейшие свойства. Найдите скобку Пуассона для компонент момента импульса  $M_x$  и  $M_y$  для тела массой  $m$ . Найдите скобки Пуассона для  $z$  – компоненты момента импульса,  $\{M_z, \varphi\}$  и  $\{M_z, r\}$ , где  $r, \varphi$  – полярные координаты на плоскости  $x, y$

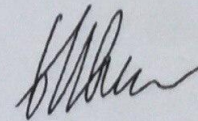
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 2**

1. Общие свойства одномерного движения, его анализ на фазовой плоскости. Период движения. Особые точки фазовой плоскости седло и центр. Сепаратриса. При каких значениях энергии движение тела массы  $m$  в потенциале  $U=U_0[(x/a)-(x/a)^3]$  может быть периодическим? Чему равна частота малых (линейных) колебаний в этом потенциале? При какой энергии период стремится к бесконечности? Постройте фазовую плоскость и найдите уравнение сепаратрисы.
2. Анализ интегрируемой механической задачи с двумя степенями свободы. Проведите анализ динамики системы с функцией Лагранжа  $L = (a/2)(\dot{q}_1^2 + q_1^2 \cdot \dot{q}_2^2) - bq_1^2, b > 0$ . Какие здесь есть интегралы движения? При каких значениях интегралов движения движение будет иметь вид  $q_2 = vt, v$  - постоянная величина?

Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою

/ Висоцький В.І./

Екзаменатор

/ Іванов Б.О./



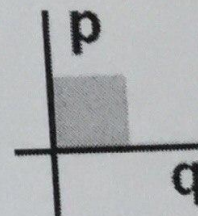
Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший

Навчальний предмет теоретична механіка

### ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 3

1. Малые колебания при наличии трения. Слабое и сильное трение. Отрицательное трение. Особые точки фазовой плоскости фокус и узел (устойчивые и неустойчивые). Анализ нелинейной динамики при наличии трения на фазовой плоскости. Тело массой  $m$  движется в потенциале  $U = U_0[(a/x)+(x/a)]$ . Сила трения определяется формулой  $F = -\alpha\dot{x}$ . При каком соотношении констант задачи будет реализоваться особая точка типа фокус? Узел?

2. Анализ динамической задачи в рамках метода Гамильтона с использованием фазовой плоскости. Дана фазовая плоскость  $(p, q)$ , функция Гамильтона  $H = -a(q^2 + p^2)$ ,  $a > 0$ . Как изменяется со временем форма области, изображенной на рисунке? Что изменится для случая  $H = +a(q^2 + p^2)$ ? Для случая  $H = a(q^2 + p^2) + A(q^2 + p^2)^2$ ?



Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою

/ Висоцький В.І./ Екзаменатор

/ Іванов Б.О./



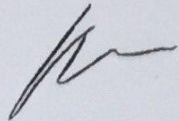
Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 4**

1. Знакопеременное трение. Предельный цикл. Постройте (качественно) фазовую плоскость для материальной точки, движущейся в потенциале  $U = U_0[(a/x)+(x/a)]$  при наличии силы трения, которая определяется формулой  $f = \alpha \dot{x} [3 - (x/a) - (a/x)]$ , константа  $\alpha$  мала. При каком знаке  $\alpha$  цикл будет устойчивый? Неустойчивый?
2. Скобки Пуассона – определение и простейшие свойства. При каких значениях параметров  $a, b, c$  преобразование  $Q = p + q, P = ap + bq + cp^2$  будет каноническим?

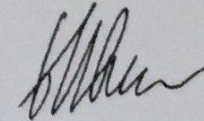
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший

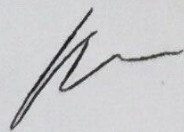
Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 5**

1. Обобщенные координаты, принцип наименьшего действия и уравнения Лагранжа. Постройте функцию Лагранжа для тела массой  $m$ , движущегося вдоль поверхности  $x^2 + y^2 = R^2 + z^2$ , и найдите все интегралы движения (Подумайте, к каким обобщенным координатам надо перейти, чтобы получить больше интегралов движения)
2. Теорема Лиувилля для системы с одной степенью свободы. Выполняется ли эта теорема для систем уравнений  
1)  $\dot{p} = \lambda p - \alpha p q^2, \dot{q} = -\lambda q + \alpha q p^2$  ? 2)  $\dot{p} + \lambda p = q, \dot{q} + \lambda q = -p$  ? Объясните ответ.

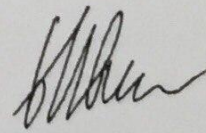
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший

Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ №6**

1. Функция Лагранжа для системы материальных точек. Кинетическая и потенциальная энергия. Связь с уравнениями Ньютона. Обобщенные координаты. Постройте функцию Лагранжа и запишите уравнения Лагранжа для материальной точки массой  $m$ , движущегося по поверхности лежащего горизонтально цилиндра радиусом  $R$ , учесть поле тяжести. Какие координаты здесь будут наиболее естественными? Запишите интегралы движения.
2. Общие закономерности движения в центрально-симметричном поле. Какие законы Кеплера выполняются для потенциала  $U = -\alpha/r^{3/2}$ ? Какие законы Кеплера не выполняются? При каком соотношении между моментом импульса  $M$  и энергией  $E$  движение материальной точки массой  $m$  в этом потенциале будет финитным? будет происходить по окружности? Чему равен радиус этой окружности?

Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою

/ Висоцький В.І./

Екзаменатор

/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший

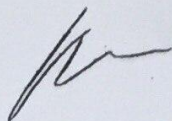
Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 7**

1. Общий вид функции Лагранжа. Преобразования координат, зависящие от времени, гироскопические механические системы. Постройте функцию Лагранжа для материальной точки массой  $m$  в новых координатах  $q_1, q_2$ ,  $q_1 = x \cos \omega t + y \sin \omega t$ ,  $q_2 = -x \sin \omega t + y \cos \omega t$ ,  $x, y$  - координаты в лабораторной (инерциальной) системе. Будет ли эта система гироскопической? Сохраняется ли тут энергия?
2. Уравнения Гамильтона. Циклические координаты в методе Гамильтона. Запишите функцию Гамильтона для частицы массой  $m$ , движущейся в трехмерном пространстве при наличии силы тяжести. Найдите интегралы движения.

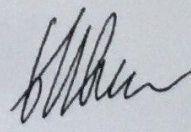
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка  
**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 8**

1. Законы сохранения как следствие инвариантности функции Лагранжа относительно некоторых преобразований. Циклические координаты в методе Лагранжа. Закон сохранения энергии, в том числе для гироскопических систем. Найдите три закона сохранения для функции Лагранжа

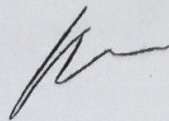
$$L = \frac{A}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (x^2 + y^2)\dot{z}^2] + g(xy - yx) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2),$$

где  $x, y, z$  –некоторые обобщенные (не декартовы) координаты. (Подумайте, к каким координатам надо перейти, чтобы получить эти три интеграла движения)

2. Функция Гамильтона  $H = A(p^2 - q^2)$ . Какая особая точка будет на плоскости  $p, q$ ? Чему равна скобка Пуассона  $\{\dot{q}, q\}$ ?  $\{\dot{q}, p\}$ ?

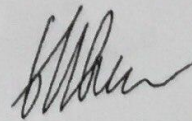
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./

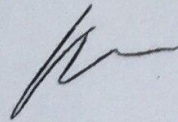


Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка  
**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ №9**

1. Механическое подобие. Для какого потенциала при движении по геометрически подобным траекториям будет одинаковыми: период движения? момент импульса ?
2. Разделение переменных в уравнении Гамильтона – Якоби. Запишите уравнение Гамильтона – Якоби для механической задачи с функцией Лагранжа вида  $L = (a/2)[\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2] - U(q_1, q_2)$ . При каком потенциале  $U(q_1, q_2)$  переменные разделяются?

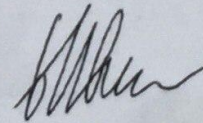
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший

Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 10**

1. Теорема вириала. Найдите среднее значение кинетической энергии системы материальных точек, движущихся в потенциале  $U = -\frac{a}{(x^2 + y^2 + z^2)^\beta}$ ,  $a, \beta > 0$ , если полная энергия равна  $E$ . При каком значении  $\beta$  и  $E$  возможно финитное движение?
2. Одномерное движение при наличии трения. Проведите с помощью метода фазовой плоскости анализ движения, которое описывается уравнением  $m\ddot{x} - \alpha\dot{x}(1 - \dot{x}^2 / v^2) + k \sin x / \cos^3 x = 0$ , ( $\alpha > 0$  мало,  $k > 0$ ).

Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою

/ Висоцький В.І./

Екзаменатор

/ Іванов Б.О./



**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 11**

1. Малые (линейные) колебания со многими степенями свободы. Нормальные координаты. Фигуры Лиссажу, замыкание траекторий, почти-периодическое движение. Найдите собственные частоты малых (линейных) колебаний и постройте нормальные координаты для материальной точки массой  $m$ ,

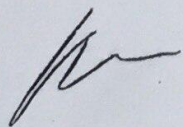
движущейся в потенциале  $U = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{U_0 a^2}{a^2 + xy}$  При каких значениях

параметров ответ имеет смысл? Почему не при всех? При каком соотношении параметров траектории движения будут замкнутыми? При каком значении параметров все траектории будут иметь форму эллипсов?

2. Канонические преобразования. При каких значениях параметров  $a, b, A$  преобразование  $Q = Aq^a \sin p, P = q^b \cos p$  будет каноническим?

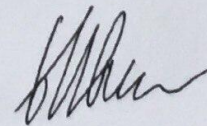
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика

Семестр Перший

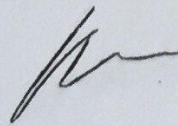
Навчальний предмет теоретична механіка

### ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 12

1. Вынужденные гармонические колебания без трения. Гармоническая вынуждающая сила. Резонанс. Биения. При каких условиях для материальной точки массой  $m$ , которая движется вдоль оси  $x$  в потенциале  $U(x) = kx^2 / 2 - xF_0 \cos(\gamma t)$ , имеет место резонанс?
2. Одномерное движение. Тело массы  $m$  движется в потенциале  $U = -U_0 \exp\{-(x^2 / a^2)\}$ . Постройте фазовую плоскость (трение не учитывать). При каких значениях энергии движение будет периодическим? Чему равна частота малых (линейных) колебаний в этом потенциале? Если на тело действует сила трения  $F = -\alpha\dot{x}$ , то при каком  $\alpha$  реализуется особая точка фокус, а при каком  $\alpha$  – узел?.

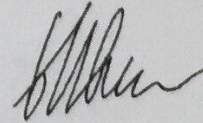
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший

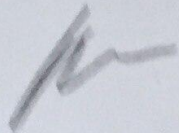
Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 13**

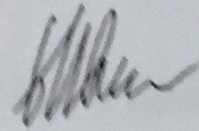
1. Гармонические колебания с трением и внешней силой. Поглощаемая мощность. Резонанс. Найдите зависимость поглощаемой мощности от частоты для материальной точки массой  $m$ , которая движется вдоль оси  $x$  в потенциале  $U(x) = kx^2 / 2 - xF_0 \cos(\gamma t)$  при наличии силы трения  $F_{fric} = -\alpha \dot{x}$ , константа  $\alpha$  мала.
2. Анализ динамической задачи в рамках метода Гамильтона с использованием фазовой плоскости. Постройте фазовую плоскость, если функция Гамильтона имеет вид  $H = A(q^2 + p^2)$ . Сделайте то же самое для более сложного случая  $H = Aq^2 + U_0 \sin^2(\alpha p)$ , и в этом случае найдите уравнение сепаратрисы.

Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав. кафедрою



/ Висоцький В.І./ Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



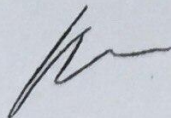
Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 14**

1. Движение в неинерциальной системе отсчета. Постройте все интегралы движения для системы материальных точек, которая движется с постоянным ускорением  $\vec{a} = a\vec{e}_x$ . То же, если система вращается вокруг оси  $z$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . В обеих задачах сила тяжести направлена вдоль оси  $z$ .
2. Теорема Лиувилля о сохранении площади на фазовой плоскости. Для какой из трех систем уравнений теорема Лиувилля выполняется и для какой не выполняется?
  - 1)  $\dot{p} = \alpha q + \gamma p, \dot{q} = -\beta p + \gamma q$  ?
  - 2)  $\dot{p} = \alpha q + \beta p, \dot{q} = -\alpha p + \gamma p$  ?
  - 3)  $\dot{p} = \alpha q - \gamma p, \dot{q} = -\beta p + \gamma q$  ?

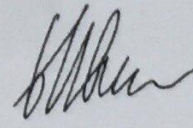
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший

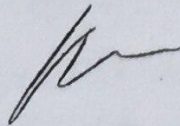
Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 15**

1. Задача двух тел. Приведенная масса. Эффективная потенциальная энергия. Два тела с массами  $m$  и  $2m$  взаимодействуют по закону  $U = U_0 \ln(r/a)$ . При каком соотношении между моментом импульса и энергией они будут двигаться по окружностям? Чему равны радиусы этих окружностей?
2. Уравнения Гамильтона (получите для системы с одной степенью свободы). Дана функция Гамильтона  $H = p^2 + apq + q^2$ . Какая особая точка реализуется на фазовой плоскости  $(p, q)$  при различных  $a$ ? Может ли нарушиться теорема Лиувилля при каком-то значении  $a$ ?

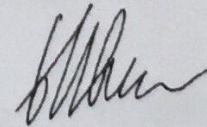
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика

Семестр Перший

Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 16**

$$-U = \frac{\alpha e^{-r/a}}{r^2}$$

1. Движение в центрально-симметричном поле. Общие закономерности, почти – периодическое движение. Замыкание траектории. Для каких центрально-симметричных потенциалов все траектории замкнуты? Падение на центр. Тело массой  $m$  движется в потенциале  $U = \alpha e^{-ar} / r^2$ . При каком соотношении между полным моментом импульса  $M$  и полной энергией  $E$  тело может достичь точки  $r = 0$  ?

2. Постройте фазовую плоскость, если функция Гамильтона имеет вид  $H = A(q^2 - p^2)$ . Сделайте то же самое для более сложного случая  $H = Aq^2 + U_0 \cos^2(\alpha p)$ , и в этом случае найдите уравнение сепаратрисы.

Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою

/ Висоцький В.І./

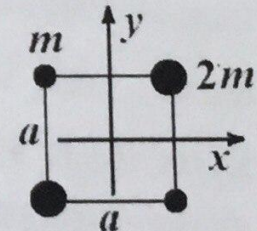
Екзаменатор

/ Іванов Б.О./



**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 17**

1. Задача Кеплера (получите формулу для траектории финитного движения).  
Законы Кеплера. Какие законы Кеплера выполняются и какие не выполняются для потенциала  $U = -\alpha/\sqrt{r}$ ?  $U = -\alpha/r$ ?  $U = +\alpha/r$ ? Считайте, что  $\alpha > 0$ .
2. Запишите уравнения Эйлера для твердого тела в форме квадрата, в вершинах которого расположены массы  $m$  и  $2m$ , см. рис. Когда для этого тела угловая скорость и момент импульса параллельны? При произвольной ориентации угловой скорости  $\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{e}_x + \Omega_y \vec{e}_y + \Omega_z \vec{e}_z$ , запишите интегралы движения для этого тела. Вращение вокруг каких направлений описывается решением  $\vec{\Omega} = \text{const}$ ? Вращение вокруг какого направления будет устойчивым? неустойчивым?



Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою

/ Висоцький В.І./

Екзаменатор

/ Іванов Б.О./

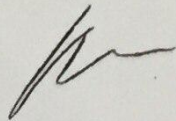


Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка  
**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 18**

1. Инфинитное движение в центрально-симметричном поле. Рассеяние. Сечение рассеянья. Найдите сечение рассеяния для материальных точек (радиус мал), падающих на абсолютно твердый шарик радиусом  $R$ .
2. Движение в системе отсчета, движущейся с ускорением. Постройте все интегралы движения для системы матерьяльных точек в системе координат, которая движется с постоянным ускорением  $\vec{a} = a\vec{e}_x$  и находится в поле тяжести, сила тяжести направлена вдоль оси  $z$ .

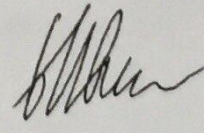
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./

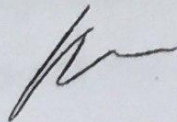


Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка  
**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 19**

1. Сечение рассеянья (дайте определение). Выведите формулу Резерфорда.
2. Скобки Пуассона. Их простейшие свойства. Найдите скобки Пуассона  $\{p_x, ux\}$ ,  $\{p_x, up_r\}$ ,  $\{y, \dot{r}\}$ ,  $\{\dot{x}, \varphi\}$ , где  $x, y, r$  и  $\varphi$  - декартовы и полярные координаты материальной точки массы  $m$  по плоскости  $z = 0$ , а  $p_r$  и  $p_x$  - соответствующие импульсы.

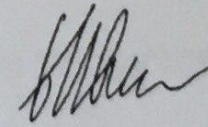
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./

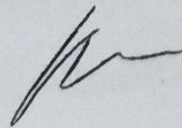


**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 20**

1. Анализ общей интегрируемой механической задачи с двумя степенями свободы и одной циклической переменной. Опишите движение материальной точки с массой  $m$ , движущейся в трехмерном пространстве по поверхности  $z = x^2 / 2a$ , тяжести направлена вдоль оси  $z$ . Является ли эта система интегрируемой? Постройте решение, описывающее какое-то простейшее движение этой системы.
2. Законы Кеплера. Какие законы Кеплера выполняются и какие не выполняются для потенциала  $U = -\alpha / \sqrt{r}$ ?  $U = -\alpha / r$ ?  $U = +\alpha / r$ ? Считайте, что  $\alpha > 0$ .

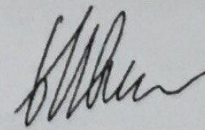
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший

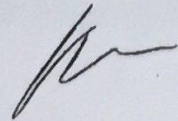
Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 21**

1. Движение твердого тела. Угловая скорость. Кинетическая энергия и момент импульса твердого тела. Тензор инерции твердого тела, его общие свойства. Классификация твердых тел. Постройте тензор инерции для тела в форме правильного шестиугольника со сторонами  $a$ , в вершинах которого расположены массы  $m$ . Куда направлен момент импульса, если направление угловой скорости составляет с плоскостью тела угол  $\theta$ ? Как изменится ответ для случая правильного  $n$  – угольника с  $n > 3$ ?
2. Обобщенные координаты. Постройте функцию Лагранжа для материальной точки с массой  $m$ , движущейся по поверхности  $z = (x^2 + y^2) / 2a$ , сила тяжести направлена вдоль оси  $z$ . Найдите все интегралы движения для этой системы. Является ли эта система интегрируемой? Опишите движение этой системы, постройте решение, описывающее какое-то простейшее движение.

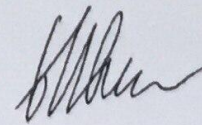
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор

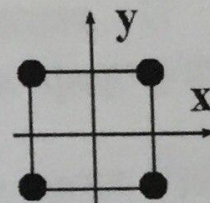


/ Іванов Б.О./



**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 22**

1. Описание поворотов твердого тела. Углы Эйлера. Функция Лагранжа твердого тела. Запишите функцию Лагранжа для тела в форме квадрата со стороной  $a$ , в вершинах которого расположены одинаковые массы  $m$ , см. рисунок. Какие углы Эйлера являются здесь циклическими координатами? Найдите частоту прецессии оси волчка и частоту вращения волчка вокруг своей оси.



2. Функция Гамильтона  $H = A p q$ . Какая особая точка будет на плоскости  $p q$ ?  
Чему равна скобка Пуассона  $\{\dot{q}, q\}$ ?  $\{\dot{q}, p\}$ ?

Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою

/ Висоцький В.І./

Екзаменатор

/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика

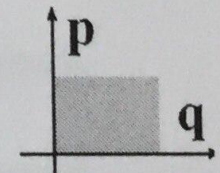
Семестр Перший

Навчальний предмет теоретична механіка

### ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 23

1. Свободное движение шарового и симметрического волчков. Постройте тензор моментов инерции для тела, образованного четырьмя частицами с одинаковыми массами  $m$  и координатами  $(0,0,0)$ ,  $(0,a,0)$ ,  $(a,0,0)$ ,  $(a,a,0)$ . Запишите и решите для него уравнения Эйлера при произвольной ориентации начального значения угловой скорости  $\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{e}_x + \Omega_y \vec{e}_y + \Omega_z \vec{e}_z$ . Какие еще две характерные частоты движения для симметрического волчка вы знаете?

2. Теорема Лиувилля о сохранении площади на фазовой плоскости для системы с одной степенью свободы. Дана фазовая плоскость  $(p, q)$ , функция Гамильтона  $H=q^2$ . Как будут изменяться со временем положения точек, изображенных на рис.? Что изменится для случая  $H = q$ ?



Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою

/ Висоцький В.І./

Екзаменатор

/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика

Семестр Перший

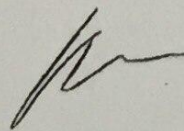
Навчальний предмет теоретична механіка

### ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 24

1. Динамические уравнения Эйлера для движения твердого тела, их законы сохранения. Случай асимметрического волчка. Запишите уравнения Эйлера для тела, образованного материальными точками с массой  $m$ , расположенными в плоскости  $(x, y)$  с координатами  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, 2a)$ ,  $(0, -2a)$ . Вращение вокруг какой оси описывается решением  $\vec{\Omega} = \text{const}$ ? Для каких осей это вращение будет устойчивым? неустойчивым?
2. Законы сохранения для системы материальных точек. Какие компоненты импульса и момента импульса сохраняются для потенциала  $U = \alpha(x^2 + y^2)$ ?  $U = k(x^2 + axy + by^2)$ ?  $U = k[(ax + y)^2 + bz^2]$  При каких частных ненулевых значениях  $a$  и  $b$  число интегралов будет больше?

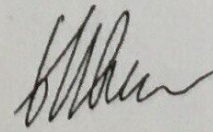
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



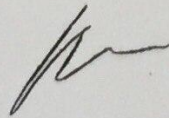
Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 25**

1. Уравнения Гамильтона. Циклические координаты в методе Гамильтона. Анализ динамической задачи в рамках метода Гамильтона с использованием фазовой плоскости. Постройте функцию Гамильтона, и запишите уравнения Гамильтона для тела массы  $m$ , движущегося по поверхности  $z^2 = R^2 + x^2 + y^2$ , в потенциале  $U = k(x^2 + y^2)$ , силы тяжести нет. (Используйте те координаты, которые более удобны). Проанализируйте движение.
2. Законы сохранения для системы материальных точек. Какие компоненты импульса и момента импульса сохраняются для потенциала  $U = \alpha(x^2 + y^2)$ ?  $U = k(x^2 + axy + by^2)$ ?  $U = k[(ax + y)^2 + bz^2]$  При каких частных ненулевых значениях  $a$  и  $b$  число интегралов будет больше?

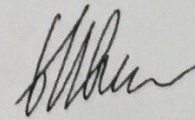
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка  
**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 26**

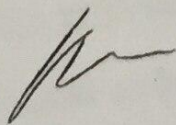
1. Функция Рауса. Уравнение Рауса. Постройте функцию Рауса и запишите уравнение Рауса для материальной точки массой  $m$ , движущегося по поверхности лежащего горизонтально цилиндра радиусом  $R$ , учесть поле тяжести. Какие координаты здесь будут наиболее естественными?
2. Используя метод фазовой плоскости, проанализируйте движение механической системы, описывающейся уравнением

$$m\ddot{x} + F_0(1 - a^2/x^2) - \alpha\dot{x}(1 - x^2/4a^2) = 0.$$

Считайте, что  $F_0 > 0$ ,  $\alpha$  мало; рассмотрите разные знаки  $\alpha$ .

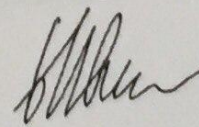
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



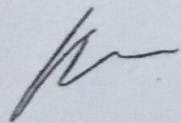
Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 27**

1. Скобки Пуассона. Определение и свойства. Найдите скобки Пуассона  $\{\dot{q}_1, q_2\}$ ,  $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2\}$ ,  $\{q_1, \dot{q}_2\}$  для механической системы с функцией Лагранжа  $L = (a/2)(q_2^2 \dot{q}_1^2 + q_1^2 \cdot \dot{q}_2^2)$ .
2. Задача двух тел. Приведенная масса. Эффективная потенциальная энергия. Два тела с массами  $m$  и  $2m$  взаимодействуют по закону  $U = -aU_0/r$  При каком соотношении между моментом импульса и энергией они будут двигаться по окружностям? Чему равны радиусы этих окружностей? Что можно сказать об общем виде траекторий финитного движения?

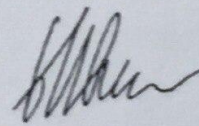
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./

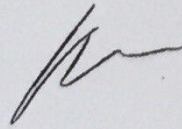


Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка  
**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 28**

1. Канонические преобразования. Производящие функции типа  $F$  и  $\Phi$ . Какая производящая функция дает преобразование  $Q_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $Q_2 = \text{arctg}(y/x)$ , то есть переход к полярным координатам  $Q_1 = r$ ,  $Q_2 = \varphi$ ? Какой вид при этом имеют новые обобщенные импульсы  $P_1$  и  $P_2$ ?
2. Законы сохранения для системы материальных точек. Какие компоненты импульса и момента импульса сохраняются для потенциала  $U = ax^2 + by^2$ ??  
 $U = (ax + by + cz)^2$  ?  $U = (ax + by)^2 + c^2z^2$  При каких частных ненулевых значениях  $a$  и  $b$  число интегралов будет больше?

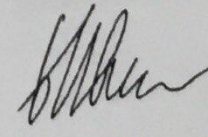
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./

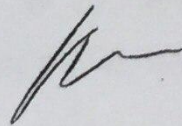


Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка  
**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 29**

1. Каноническое преобразование, которое делает гармонический (линейный) маятник механической системой с циклической координатой. Используя тот же метод, решите задачу о динамике нелинейной системы, для которой функция Гамильтона имеет вид  $H = A(p^2 + \alpha q^2) + B(p^2 + \alpha q^2)^2$ .
2. Какие величины сохраняются для системы материальных точек, движущихся в потенциале  $U = a(x^2 + z^2) + b(x^4 + z^4)$ ? Что изменится при  $b = 0$ ? при  $a = 0$ ?

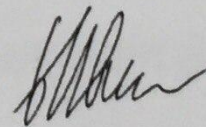
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор

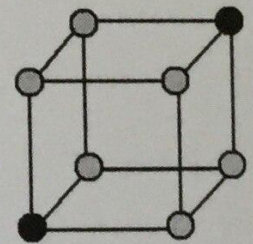


/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка  
**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 30**

1. Движение как каноническое преобразование. Уравнение Гамильтона - Якоби. Действие как функция координат. Запишите уравнение Гамильтона – Якоби для движения материальной точки с массой  $m$  в плоскости  $z = 0$  в полярных координатах.
2. Свойства тензора моментов инерции, классификация твердых тел. Постройте тензор моментов инерции для тела в форме куба, в вершинах которого расположены восемь одинаковых материальных точек с массой  $m$  (и серые, и черные кружки на рисунке). Когда для этого твердого тела момент импульса и угловая скорость параллельны? Что изменится, если массы двух точек, обозначенных на рис. черными кружками, будут равны  $2m$ ?



Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою

/ Висоцький В.І./

Екзаменатор

/ Іванов Б.О./



**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 31**

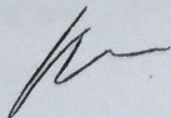
1. Уравнение Гамильтона – Якоби как метод решения механических задач. Разделение переменных в уравнении Гамильтона – Якоби. Для каких потенциалов возможно разделение переменных для механической системы, которая описывается функцией Лагранжа вида

$$L = (m/2)[\dot{q}_1^2 + (1 + q_1^2/a^2)\dot{q}_2^2] - U(q_1, q_2)$$

2. Какие компоненты импульса и момента импульса сохраняются для системы материальных точек, движущихся в потенциале  $U = k(x+z)^2 + y^2$ ?  $U = ax^2z^2 + b(x^4 + z^4)$ ? Как выбрать параметр  $k$ ; в первом потенциале, или  $a$  и  $b$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , во втором потенциале, чтобы число интегралов движения было больше?

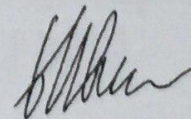
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./



Національний Університет ім.Тараса Шевченка  
Спеціальність радіофізика Семестр Перший  
Навчальний предмет теоретична механіка

**ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 32**

1. Интегральные инварианты канонических преобразований. Теорема Лиувилля (можно доказать только для системы с одной степенью свободы). Выполняется ли эта теорема для систем уравнений

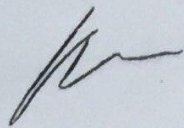
1)  $\dot{p} = \alpha q - \gamma a \sin p \cos aq, \dot{q} = \beta p + \gamma \cos p \sin aq$  ?

2)  $\dot{p} = \alpha p - \gamma \sin p \cos aq, \dot{q} = \beta q + \gamma a \cos p \sin aq$  ?

2. Законы Кеплера. Какие законы Кеплера выполняются и какие не выполняются для потенциала  $U = -\alpha/\sqrt{r}$  ?  $U = -\alpha/r$  ?  $U = +\alpha r^2$  ? Для каких потенциалов все траектории замкнуты ? (Считайте, что  $\alpha > 0$ ).

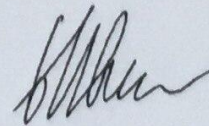
Затверджено на засіданні кафедри математики та теоретичної радіофізики  
протокол №6 від 25.12.2015.

Зав.кафедрою



/ Висоцький В.І./

Екзаменатор



/ Іванов Б.О./